J. Grbić, S. Theriault, Homotopy theory in toric topology,
*Uspekhi Mat. Nauk*, 2016, Volume 71, Issue 2, 3–80

DOI: 10.4213/rm9704

*2016 г. март — апрель* *т. 71, вып. 2 (428)*
***УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК***

УДК 515.1

# Теория гомотопий в торической топологии

**Е. Грбич, С. Терио**

В торической топологии каждому симплициальному комплексу $K$ на $m$ вершинах ставятся в соответствие два ключевых объекта: пространство Дэвиса–Янушкевича $DJ_K$ и момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$, которые входят в гомотопическое расслоение $\mathscr{Z}_K \xrightarrow{\widetilde{w}} DJ_K \to \prod_{i=1}^{m} \mathbb{C}P^{\infty}$. Получено большое количество результатов, описывающих свойства пространств $DJ_K$ и $\mathscr{Z}_K$, а также их обобщений – полиэдральных произведений. Эти результаты находят многочисленные приложения в алгебре, комбинаторике и геометрии.

В главе 1 настоящей работы мы даем обзор основных результатов гомотопической теории полиэдральных произведений. Глава 2 посвящена новому аспекту этой теории – изучению отображения $\widetilde{w}$. Мы показываем, что для некоторого семейства симплициальных комплексов $K$ отображение $\widetilde{w}$ представляет собой сумму высших и итерированных произведений Уайтхеда.

Библиография: 49 названий.

**Ключевые слова:** пространство Дэвиса–Янушкевича, момент-угол-комплекс, полиэдральное произведение, гомотопический тип, высшее произведение Уайтхеда, высшее произведение Самельсона.

DOI: 10.4213/rm9704

## Содержание

# Глава 1. Обзор гомотопических методов в торической топологии

В первой части мы даем обзор теории гомотопий момент-угол-комплексов и их обобщений – полиэдральных произведений. Не претендуя на исчерпывающее изложение, мы рассматриваем свойства и вопросы, которые мотивировали развитие исследований в этой области в течение последнего десятилетия.

## 1. Введение

**1.1. Пространства Дэвиса–Янушкевича и момент-угол-комплексы.** Тема наших исследований восходит к работе Дэвиса и Янушкевича [18], в которой дана конструкция, ставящая в соответствие простым многогранникам новые серии многообразий с действием тора. Однако для нас удобнее начать с обобщения этой конструкции на симплициальные комплексы, полученного Бухштабером и Пановым [14]. Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Рассмотрим $BT^m = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}P^\infty$ – классифицирующее пространство $m$-мерного тора $T^m = \prod_{i=1}^{m} S^1$. Для каждой грани $\sigma \in K$ положим

$$DJ_\sigma = \prod_{i=1}^{m} Y_i, \qquad \text{где} \quad Y_i = \begin{cases} \mathbb{C}P^\infty, & \text{если } i \in \sigma, \\ *, & \text{если } i \notin \sigma. \end{cases}$$

*Пространство Дэвиса–Янушкевича* $DJ_K$ определяется следующим образом:

$$DJ_K = \bigcup_{\sigma \in K} DJ_\sigma. \tag{1}$$

Заметим, что $DJ_K$ является подпространством в произведении $\prod\limits_{i=1}^{m} \mathbb{C}P^\infty$.

Имеется также другое фундаментальное пространство, конструкция которого аналогична конструкции пространства $DJ_K$. Для каждой грани $\sigma \in K$ положим

$$\mathscr{Z}_\sigma = \prod_{i=1}^{m} Y_i, \qquad \text{где} \quad Y_i = \begin{cases} D^2, & \text{если } i \in \sigma, \\ S^1, & \text{если } i \notin \sigma. \end{cases}$$

*Момент-угол-комплекс* $\mathscr{Z}_K$ определяется формулой

$$\mathscr{Z}_K = \bigcup_{\sigma \in K} \mathscr{Z}_\sigma. \tag{2}$$

Заметим, что $\mathscr{Z}_K$ является подпространством в произведении $\prod\limits_{i=1}^{m} D^2$. Имеется каноническое действие тора $T^m$ на $\prod\limits_{i=1}^{m} D^2$, задаваемое покоординатными вращениями дисков. Оно индуцирует действие тора $T^m$ на подпространстве $\mathscr{Z}_K$. Замечательным свойством этого действия является то, что гомотопическим пространством орбит для $\mathscr{Z}_K$ является $DJ_K$. Таким образом, имеется гомотопическая последовательность расслоения

$$T^m \to \mathscr{Z}_K \to DJ_K \to BT^m. \tag{3}$$

Дэвиса и Янушкевича интересовал случай, когда симплициальный комплекс $K$ является двойственным к границе простого многогранника. В этом случае можно показать, что момент-угол-комплекс является многообразием. В [18] рассматривались характеристические отображения $\lambda\colon T^m \to T^n$ для $n < m$, удовлетворяющие некоторому условию $(*)$. Ядро $\ker\lambda \simeq T^{m-n}$ такого отображения обладает тем свойством, что пространство орбит $M_\lambda = \mathscr{Z}_K/\ker\lambda$ является многообразием с действием тора $T^n$. Многообразия $M_\lambda$ известны под названием *квазиторических многообразий*; их геометрия и алгебраическая топология является предметом интенсивного изучения. Хороший обзор исследований в этом направлении дан в [17].

**1.2. Связи с коммутативной алгеброй и комбинаторикой.** Пространства $DJ_K$ и $\mathscr{Z}_K$ тесно связаны с рядом ключевых понятий коммутативной алгебры и комбинаторики.

Для того чтобы описать связь с коммутативной алгеброй, рассмотрим коммутативное кольцо $R$ с единицей и градуированное кольцо $R[v_1, \dots, v_m]$ многочленов от $m$ переменных, где $\deg v_i = 2$ для каждого $i$. Для симплициального комплекса $K$ на множестве вершин $[m]$ его *кольцо Стенли–Райснера* $R[K]$ (известное также как *кольцо граней* комплекса $K$) по определению есть факторкольцо

$$R[K] = R[v_1, \dots, v_n]/\mathscr{I}_K,$$

где $\mathscr{I}_K$ – однородный идеал, порожденный всеми мономами без квадратов $v^\sigma = v_{i_1}\cdots v_{i_s}$, для которых $\sigma = \{v_{i_1},\ldots,v_{i_s}\} \notin K$. В работах [18], [14] показано, что имеет место изоморфизм колец

$$H^*(DJ_K) \cong \mathbb{Z}[K].$$

Таким образом, изучение алгебраической топологии пространства $DJ_K$ дает информацию о кольце Стенли–Райснера $\mathbb{Z}[K]$ и наоборот. Более того, в работе [7] установлен изоморфизм колец

$$H^*(\mathscr{Z}_K;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}).$$

Tor-алгебра в правой части, соответствующая симплициальному комплексу $K$, может иметь весьма сложную структуру и включать нетривиальные произведения и высшие произведения Масси. Имеется важный частный случай, когда Tor-алгебра устроена наиболее просто. Локальное кольцо $R$ называется *голодовым* над $\mathbf{k}$, если все произведения Масси в $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(R,\mathbf{k})$ обращаются в нуль (здесь $\mathbf{k}$ – поле или кольцо $\mathbb{Z}$). В работе Голода [25] было показано, что если кольцо $R$ голодово, то его ряд Пуанкаре является рациональной функцией. Описание класса голодовых локальных колец является известной проблемой в коммутативной алгебре. В нашем случае можно задаться вопросом: в каком случае кольцо Стенли–Райснера $\mathbb{Z}[K]$ является голодовым? Это эквивалентно обращению в нуль произведений и высших произведений Масси в кольце $H^*(\mathscr{Z}_K)$. Как было показано Тревизаном [49], случай колец Стенли–Райснера достаточен для характеризации свойства голодовости для локальных колец, так как поляризация локального кольца сохраняет свойство голодовости.

Чтобы описать связь с комбинаторикой, снова рассмотрим симплициальный комплекс $K$ на множестве вершин $[m]$. Пусть $L_\sigma$ – *комплексное координатное подпространство* в $\mathbb{C}^m$, задаваемое формулой

$$L_\sigma = \{(z_1,\ldots,z_m)\in\mathbb{C}^m \mid z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0\},$$

где $\sigma = \{i_1,\ldots,i_k\}$ – подмножество в $[m]$. Взяв объединение всех таких $L_\sigma$ для $\sigma\notin K$, мы получаем *конфигурацию комплексных координатных подпространств*

$$\mathscr{C}\mathscr{A}(K) = \bigcup_{\sigma\notin K} L_\sigma.$$

Рассмотрим также ее дополнение

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \mathscr{C}\mathscr{A}(K).$$

Заметим, что тор $T^m$ действует покоординатно на каждом подпространстве $L_\sigma$ и эти действия согласованы на объединении, так что мы получаем действие тора на $\mathscr{C}\mathscr{A}(K)$ и на дополнении $U(K)$. Как было показано Бухштабером и Пановым в [14], момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ является $T^m$-эквивариантным деформационным ретрактом пространства $U(K)$. В частности, мы имеем гомотопическую эквивалентность

$$U(K) \simeq \mathscr{Z}_K.$$

Следовательно, гомотопические свойства пространств $\mathscr{Z}_K$ можно интерпретировать как гомотопические свойства дополнений соответствующих конфигураций комплексных координатных подпространств.

Эти взаимосвязи между пространствами Дэвиса–Янушкевича, момент-угол-комплексами, кольцами Стенли–Райснера, голодовыми кольцами и дополнениями конфигураций комплексных координатных подпространств мотивировали исследования по теории гомотопий пространств $DJ_K$ и $\mathscr{Z}_K$.

**1.3. Полиэдральные произведения.** Аналогия между конструкциями пространств $DJ_K$ и $\mathscr{Z}_K$ (см. (1) и (2)) подсказывает, что они являются частными случаями общей функториальной конструкции. Эти привело Бухштабера и Панова [15] к определению $K$-степеней, которое позднее в работах [27], [19], [4] развилось в более общее определение полиэдральных произведений. Пусть $K$ – симплициальный комплекс на $m$ вершинах. Для $1 \leqslant i \leqslant m$ пусть $(X_i, A_i)$ – пара $CW$-комплексов с отмеченными точками, т. е. $A_i$ – подпространство с отмеченной точкой в $X_i$. Пусть $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ – последовательность $CW$-пар с отмеченными точками. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ обозначим через $(\underline{X}, \underline{A})^\sigma$ подпространство в произведении $\prod\limits_{i=1}^m X_i$, определяемое формулой

$$(\underline{X}, \underline{A})^\sigma = \prod_{i=1}^m Y_i, \qquad \text{где} \quad Y_i = \begin{cases} X_i, & \text{если } i \in \sigma, \\ A_i, & \text{если } i \notin \sigma. \end{cases}$$

*Полиэдральным произведением*, соответствующим последовательности $(\underline{X}, \underline{A})$ и симплициальному комплексу $K$, называется пространство

$$(\underline{X}, \underline{A})^K = \bigcup_{\sigma \in K} (\underline{X}, \underline{A})^\sigma. \tag{4}$$

Заметим, что $(\underline{X}, \underline{A})^K$ – подпространство в произведении $\prod\limits_{i=1}^m X_i$. Заметим также, что конструкция полиэдрального произведения $(\underline{X}, \underline{A})^K$ естественна относительно отображений пар $(X_i, A_i) \to (X'_i, A'_i)$ и вложений симплициальных комплексов $K \to L$, где $K$ и $L$ могут иметь разные множества вершин. Если каждая пара $(X_i, A_i)$ равна фиксированной паре $(X, A)$, то мы будем обозначать соответствующее полиэдральное произведение через $(X, A)^K$. Формулы (1) и (2) показывают, что $DJ_K = (\mathbb{C}P^\infty, *)^K$ и $\mathscr{Z}_K = (D^2, S^1)^K$.

Так как полиэдральные произведения являются гомотопическими обобщениями пространств Дэвиса–Янушкевича и момент-угол-комплексов, естественно ожидать, что большинство гомотопических результатов о пространствах $DJ_K$ и $\mathscr{Z}_K$ также имеет место для соответствующих им более общих полиэдральных произведений вида $(X, *)^K$ и $(CX, X)^K$, где $CX$ – приведенный конус над пространством $X$. С другой стороны, нельзя ожидать, что геометрические результаты о момент-угол-комплексах, такие как наличие структуры многообразия, будут иметь место для общих полиэдральных произведений, за исключением случая, когда рассматриваются пары $(D^n, S^{n-1})$, где $n \geqslant 1$.

Чтобы освоиться с конструкцией полиэдральных произведений, полезно рассмотреть несколько примеров. Для пространств $X$ и $Y$ с отмеченными точками их *смаш-произведением* (или *приведенным произведением*) $X \wedge Y$ называется факторпространство $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$. Пусть $I$ обозначает единичный отрезок с отмеченной точкой 0. (Приведенным) *конусом* над пространством $X$ называется факторпространство $CX = (I \times X)/\sim$, где $(1, x) \sim (1, x')$ и $(t, *) \sim (0, *)$. (Приведенным) *джойном* (или *соединением*) $X * Y$ называется факторпространство $X * Y = (X \times I \times Y)/\sim$, где $(x, 0, y) \sim (x', 0, y)$, $(x, 1, y) \sim (x, 1, y')$ и $(*, t, *) \sim (*, 0, *)$. Хорошо известно, что имеет место естественная гомотопическая эквивалентность $X * Y \simeq \Sigma X \wedge Y$. Также известно, что джойн $X * Y$ гомотопически эквивалентен правому нижнему пространству в кодекартовом квадрате

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r] \arrow[d] & CX \times Y \arrow[d] \\ X \times CY \arrow[r] & (X \times CY) \bigcup\limits_{X \times Y} (CX \times Y) \end{tikzcd}$$

Пример 1.1. (i) Пусть каждое пространство $A_i$ – точка. Если $K$ является несвязным объединением $m$ точек, то

$$(\underline{X}, \underline{*})^K = X_1 \vee \cdots \vee X_m,$$

а если $K$ является $(m-1)$-симплексом $\Delta^{m-1}$, то

$$(\underline{X}, \underline{*})^{\Delta^{m-1}} = X_1 \times \cdots \times X_m.$$

(ii) Пусть снова каждое пространство $A_i$ есть точка. Для $0 \leqslant i \leqslant m-1$ через $\Delta_i^{m-1}$ обозначим полный $i$-мерный остов симплекса $\Delta^{m-1}$. Тогда

$$(\underline{X}, \underline{*})^{\Delta_i^{m-1}} = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i \;\middle|\; \text{не менее } m-i-1 \text{ точек } x_i \text{ суть } * \right\}.$$

Пространство в правой части представляет собой $i$-й член фильтрации Уайтхеда произведения $\prod\limits_{i=1}^m X_i$.

(iii) Если $K$ состоит из двух отдельных точек, то $(D^2, S^1)^K = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2$, где объединение берется вдоль общей границы $S^1 \times S^1$. Таким образом, $(D^2, S^1)^K$ есть граница шара $D^4$, т. е. сфера $S^3$. Так как каждый диск $D^2$ стягиваем, пространство $(D^2, S^1)^K$ входит в кодекартов квадрат из отображений $S^1 \times S^1 \to CS^1 \times S^1$ и $S^1 \times S^1 \to S^1 \times CS^1$. Следовательно,

$$\mathscr{Z}_K = (D^2, S^1)^K \simeq S^1 * S^1 \simeq S^3.$$

(iv) Обобщим пример (iii): если $K$ есть две отдельные точки, то

$$(\underline{CX}, \underline{X})^K \simeq X_1 * X_2.$$

В частности,

$$(D^{n+1}, S^n)^K \cong \partial D^{2n+2} \simeq S^n * S^n \simeq S^{2n+1}.$$

Полиэдральные произведения находят многочисленные приложения за пределами теории колец Стенли–Райснера и конфигураций координатных подпространств. Имеется обширная литература, посвященная изучению взаимосвязей полиэдральных произведений, квазиторических многообразий и малых накрытий. Другие приложения включают исследования групп, действующих на графах, представления монодромии, конфигурационные пространства шарнирных механизмов, $\mathbb{A}^1$-гомотопическую теорию гладких торических многообразий и различные классы конфигураций пространств. Все возрастающая популярность полиэдральных произведений связана с тем, что при всей сложности их топологической структуры имеется достаточно много подходов к ее изучению, что часто может быть использовано для проверки существующих или формулирования новых гипотез.

**1.4. Задачи.** Теперь мы имеем конструкцию, предоставляющую большой запас пространств с интересными гомотопическими свойствами, которые связывают их с различными разделами математики. Это приводит к постановкам естественных задач, включая следующие:

1) вычислить гомологии и когомологии этих пространств;

2) описать их рациональный гомотопический тип;

3) описать их стабильный гомотопический тип;

4) найти семейства симплициальных комплексов $K$ и $CW$-пар $(X, A)$, для которых гомотопический тип полиэдрального произведения $(X, A)^K$ может быть описан явно.

Многие из этих задач связаны друг с другом и приводят к постановкам новых вопросов, некоторые из них мы затронем в нашем изложении.

Большинство наших формулировок будет относиться к общим полиэдральным произведениям, так как существенная часть гомотопической теории фундаментальных пространств $DJ_K$ и $\mathscr{Z}_K$ не зависит от специфики пар $(\mathbb{C}P^\infty, *)$ и $(D^2, S^1)$, задающих эти конкретные полиэдральные произведения. Однако при этом всегда важно помнить, что именно пространства $DJ_K$ и $\mathscr{Z}_K$ отвечают за наибольшее количество взаимосвязей между алгебраической топологией, коммутативной алгеброй и комбинаторикой, которые привели к бурному развитию нашей теории.

## 2. Стабильный гомотопический тип

Мы начнем наше изложение с описания стабильного разложения пространства $(\underline{X}, \underline{A})^K$, так как оно играет ключевую роль в доказательстве многих других свойств полиэдральных произведений. Стабильное разложение дает описание групп гомологий пространства $(\underline{X}, \underline{A})^K$ и, что замечательно, может быть даже использовано для описания структуры умножения в когомологиях. Стабильное разложение также полезно для описания гомотопического типа различных специальных семейств полиэдральных произведений, так как оно помогает отслеживать важную топологическую информацию, такую как ряды Пуанкаре.

Слово "стабильный" может немного вводить в заблуждение, так как описываемое ниже стабильное разложение пространства $(\underline{X}, \underline{A})^K$ имеет место уже после одной надстройки. Тем не менее оно представляет собой функториальное разложение, которое нельзя улучшить (сделать более тонким), даже переходя к дальнейшим надстройкам. Хотя в некоторых случаях специальные полиэдральные произведения могут допускать дополнительные разложения после большего количества надстроек, эти дополнительные разложения происходят из стабильных свойств пространств, входящих в полиэдральные произведения, а не из свойств самого функтора полиэдрального произведения.

Для начала нам понадобится понятие полиэдрального смаш-произведения. Предположим, что $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, и пусть $(X_i, A_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, – пары $CW$-комплексов с отмеченными точками. Напомним, что

$$(\underline{X}, \underline{A})^\sigma = \prod_{i=1}^m Y_i, \qquad \text{где} \quad Y_i = \begin{cases} X_i, & \text{если } i \in \sigma, \\ A_i, & \text{если } i \notin \sigma, \end{cases}$$

а полиэдральное произведение было определено формулой

$$(\underline{X}, \underline{A})^K = \bigcup_{\sigma \in K} (\underline{X}, \underline{A})^\sigma.$$

Для $\sigma \in K$ положим

$$\widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^\sigma = \bigwedge_{i=1}^m Y_i, \qquad \text{где} \quad Y_i = \begin{cases} X_i, & \text{если } i \in \sigma, \\ A_i, & \text{если } i \notin \sigma. \end{cases}$$

*Полиэдральное смаш-произведение* определяется следующим образом:

$$\widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^K = \bigcup_{\sigma \in K} \widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^\sigma.$$

Вспомнив, что $(\underline{X}, \underline{A})^K$ является подпространством в произведении $\prod_{i=1}^m X_i$, мы получаем, что $\widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^K$ является образом пространства $(\underline{X}, \underline{A})^K$ при естественной проекции на факторпространство $\prod_{i=1}^m X_i \to \bigwedge_{i=1}^m X_i$.

Частным случаем стабильного разложения общего полиэдрального произведения является известная естественная гомотопическая эквивалентность

$$\Sigma(X_1 \times X_2) \simeq \Sigma X_1 \vee \Sigma X_2 \vee (\Sigma X_1 \wedge X_2).$$

Применяя это разложение последовательно, получаем гомотопическую эквивалентность

$$\Sigma(X_1 \times \dots \times X_m) \simeq \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m} \Sigma X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_k}.$$

Здесь индексы пробегают все упорядоченные подмножества множества $[m]$ и потому находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями симплекса $\Delta^{m-1}$. Кроме того, полиэдральное произведение $(\underline{X}, \underline{A})^{\Delta^{m-1}}$ есть в точности произведение $X_1 \times \dots \times X_m$, а каждый член $X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_k}$ есть полиэдральное смаш-произведение $\widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^{K_I}$ для $I = \{i_1, \dots, i_k\}$. Поэтому предыдущую гомотопическую эквивалентность можно переписать следующим образом:

$$\Sigma(\underline{X}, \underline{A})^{\Delta^{m-1}} \simeq \bigvee_{I \subseteq [m]} \Sigma\widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^{K_I}.$$

Эта формула подсказывает, что надстройка над произвольным полиэдральным произведением должна раскладываться в букет надстроек над полиэдральными смаш-произведениями, соответствующими всевозможным полным подкомплексам в $K$. Это и есть результат Бари, Бендерского, Коэна и Гитлера, доказанный в [4].

Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, и пусть для $1 \leqslant i \leqslant m$ заданы пары $(X_i, A_i)$ $CW$-комплексов с отмеченными точками. Предположим, что $I \subset [m]$. Включению $I$ в $[m]$ соответствует включение $K_I \to K$, которому, в свою очередь, соответствует отображение (ретракция) полиэдральных произведений $(\underline{X}, \underline{A})^K \to (\underline{X}, \underline{A})^{K_I}$. Взяв композицию, получаем отображение в полиэдральное смаш-произведение

$$(\underline{X}, \underline{A})^K \to (\underline{X}, \underline{A})^{K_I} \to \widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^{K_I}.$$

После надстройки мы можем просуммировать все эти композиции по всем полным подкомплексам в $K$, что дает отображение

$$\overline{H}\colon \Sigma(\underline{X}, \underline{A})^K \to \bigvee_{I \subseteq [m]} \Sigma(\underline{X}, \underline{A})^{K_I} \to \bigvee_{I \subseteq [m]} \Sigma\widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^{K_I}.$$

Следующий результат было доказан в [4; теорема 2.10].

Теорема 2.1. *Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, и пусть для $1 \leqslant i \leqslant m$ заданы пары $CW$-комплексов с отмеченными точками $(X_i, A_i)$. Тогда отображение*

$$\overline{H}\colon \Sigma(\underline{X}, \underline{A})^K \to \bigvee_{I \subseteq [m]} \Sigma\widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^{K_I}$$

*является гомотопической эквивалентностью.*

Более того, в частном случае, когда каждое из пространств $X_i$ стягиваемо, Бари, Бендерский, Коэн и Гитлер доказали, что 1) если $I \in K$, то полиэдральное смаш-произведение $\widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^{K_I}$ стягиваемо [4; теорема 2.21]; 2) если $I \notin K$ и $I = (i_1, \dots, i_k)$, то имеет место гомотопическая эквивалентность $\widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^{K_I} \simeq \Sigma(|K_I| \wedge \widehat{A}^I)$, где $\widehat{A}^I = \bigwedge_{j=1}^{k} A_{i_j}$ [4; теорема 2.19]. В частности, для пар вида $(CX_i, X_i)$, где $CX_i$ – приведенный конус над $X_i$, мы имеем $\widehat{(\underline{CX}, \underline{X})}^{K_I} \simeq \Sigma(|K_I| \wedge \widehat{X}^I)$, откуда вытекает следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, и пусть $X_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, – $CW$-комплексы с отмеченным точками. Тогда отображение $\overline{H}$ сводится к гомотопической эквивалентности*

$$H\colon \Sigma(\underline{CX}, \underline{X})^K \to \bigvee_{I \notin K} \Sigma\widehat{(\underline{CX}, \underline{X})}^{K_I} \xrightarrow{\simeq} \bigvee_{I \notin K} \Sigma^2(|K_I| \wedge \widehat{X}^I). \tag{5}$$

Важнейшим примером является момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$. В этом случае каждая пара есть $(D^2, S^1)$ и диск $D^2$ стягиваем. Кроме того, $X_i = S^1$, т. е.

$$\widehat{X}^I = \bigwedge_{j=1}^{k} (S^1)_{i_j} \simeq S^k, \qquad \text{где} \quad |I| = k.$$

Мы получаем следующий результат.

Следствие 2.3. *Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Существует гомотопическая эквивалентность*

$$\Sigma\mathscr{Z}_K \to \bigvee_{I \notin K} \Sigma^{|I|+2}|K_I|. \tag{6}$$

## 3. Гомологии и когомологии

Когомологии пространства Дэвиса–Янушкевича уже обсуждались выше. Имеет место изоморфизм колец

$$H^*(DJ_K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathscr{I}_K,$$

где в левой части стоит алгебра Стенли–Райснера (кольцо граней комплекса $K$), а $\mathscr{I}_K$ – однородный идеал, порожденный всеми мономами без квадратов $v^\sigma = v_{i_1} \cdots v_{i_s}$, для которых $\sigma = \{v_{i_1}, \dots v_{i_s}\} \notin K$.

Кольцо целочисленных когомологий момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_K$ изоморфно Tor-алгебре $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z})$, однако ее может быть трудно описать в явном виде. Имеется комбинаторное описание умножения в когомологиях пространства $\mathscr{Z}_K$ для любого симплициального комплекса $K$, полученное в [7], [14], [22]. Все группы когомологий будут рассматриваться с целыми коэффициентами. *Джойн* симплициальных комплексов $K_1$ и $K_2$ определяется следующим образом: $K_1 * K_2 = \{\sigma_1 \cup \sigma_2 \mid \sigma_i \in K_i\}$.

Теорема 3.1. *Имеет место изоморфизм градуированных коммутативных алгебр*

$$H^*(\mathscr{Z}_K) \cong \bigoplus_{I \subset [m]} \widetilde{H}^*(K_I)$$

*(здесь $\widetilde{H}^*(K_I)$ обозначает группы приведенных симплициальных гомологий полного подкомплекса $K_I \subset K$). Указанный изоморфизм представляет собой сумму изоморфизмов*

$$H^p(\mathscr{Z}_K) \cong \sum_{I \subset [m]} \widetilde{H}^{p-|I|-1}(K_I),$$

*а мультипликативная структура задается отображениями*

$$H^{p-|I|-1}(K_I) \otimes H^{q-|J|-1}(K_J) \to H^{p+q-|I|-|J|-1}(K_{I\cup J}),$$

*которые индуцированы каноническими симплициальными отображениями* $K_{I\cup J} \to K_I * K_J$, *если* $I \cap J = \varnothing$, *и являются отображениями в нуль в противном случае.*

Отметим два ключевых вывода из теоремы 3.1: аддитивно когомологии пространства $\mathscr{Z}_K$ определяются когомологиями полных подкомплексов в $K$, а нетривиальные произведения в мультипликативной структуре возникают только для классов когомологий, соответствующих непересекающимся полным подкомплексам.

Эти наблюдения были обобщены в [5] на случай полиэдральных произведений. Произведение в когомологиях пространства $M$ индуцировано диагональным отображением $\Delta\colon M \to M \times M$. Взяв композицию диагонали $\Delta$ с проекцией на смаш-произведение, мы получаем *приведенную диагональ*

$$\widehat{\Delta}\colon M \to M \wedge M.$$

Предположим теперь, что $I \subseteq [m]$, и рассмотрим пространство $Y^I = \prod_{i=1}^{m} Y_i$, где $Y_i = X_i$, если $i \in I$, и $Y_i = A_i$, если $i \notin I$. Тогда имеем приведенную диагональ

$$\widehat{\Delta}_I\colon \widehat{Y}^I \to \widehat{Y}^I \wedge \widehat{Y}^I.$$

Пусть $\pi_I\colon Y^{[m]} \to Y^I$ – проекция и $\widehat{\pi}_I$ – композиция

$$\widehat{\pi}_I\colon Y^{[m]} \xrightarrow{\pi_I} Y^I \to \widehat{Y}^I.$$

Заметим, что если $I = J \cup L$, то композиция отображений

$$Y^{[m]} \xrightarrow{\widehat{\Delta}} Y^{[m]} \wedge Y^{[m]} \xrightarrow{\widehat{\pi}_J \wedge \widehat{\pi}_L} \widehat{Y}^J \wedge \widehat{Y}^L$$

пропускается через $\widehat{\pi}_I$. Поэтому мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} Y^{[m]} \arrow[r, "\widehat{\Delta}_{[m]}"] \arrow[d, "\widehat{\pi}_I"] & Y^{[m]} \wedge Y^{[m]} \arrow[d, "\widehat{\pi}_J \wedge \widehat{\pi}_L"] \\ \widehat{Y}^I \arrow[r, "\widehat{\Delta}_I^{J,L}"] & \widehat{Y}^J \wedge \widehat{Y}^L \end{tikzcd} \tag{7}$$

где $\widehat{\Delta}_I^{J,L}$ – индуцированное отображение факторпространств. В частности, если $I = J = L$, то $\widehat{\Delta}_I^{J,L}$ превращается в обычную приведенную диагональ. При ограничении на $(\underline{X}, \underline{A})^K \subseteq X^{[m]}$ мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^K \arrow[r, "\widehat{\Delta}_K"] \arrow[d, "\widehat{\pi}^I"] & \widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^K \wedge \widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^K \arrow[d, "\widehat{\pi}^J \wedge \widehat{\pi}^L"] \\ \widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^{K_I} \arrow[r, "\widehat{\Delta}_I^{J,L}"] & \widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^{K_J} \wedge \widehat{(\underline{X}, \underline{A})}^{K_L} \end{tikzcd} \tag{8}$$

Пусть $u \in H^p((\underline{X},\underline{A})^{K_J})$ и $v \in H^q((\underline{X},\underline{A})^{K_L})$ – классы когомологий. Определим $*$-*произведение* классов $u$ и $v$ формулой

$$u * v = (\widehat{\Delta}_I^{J,L})^*(u \otimes v) \in H^{p+q}(\widehat{(\underline{X},\underline{A})}^{K_I}).$$

Из коммутативности диаграммы (8) вытекает, что

$$\widehat{\pi}_I^*(u * v) = \widehat{\pi_J}^*(u) \smile \widehat{\pi_L}^*(v),$$

где $\smile$ обозначает когомологическое умножение в $(\underline{X},\underline{A})^K$. Следующий результат был доказан в [5; теорема 1.4].

Теорема 3.2. *Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$ и пусть $(\underline{X},\underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ – пары $CW$-комплексов с отмеченными точками. Тогда имеет место изоморфизм колец*

$$H^*((\underline{X},\underline{A})^K) \cong \bigoplus_{I\subseteq[m]} \widetilde{H}^*\bigl(\widehat{(\underline{X},\underline{A})}^{K_I}\bigr),$$

*где мультипликативная структура в правой части задается $*$-произведением.*

Теорема 3.2 соответствует первому утверждению теоремы 3.1 – группы когомологий пространства $(\underline{X},\underline{A})^K$ определяются когомологиями полных подкомплексов в $K$. Второе утверждение, связывающее непересекающиеся полные подкомплексы с нетривиальными произведениями классов когомологий, обобщается на случай, когда каждая пара является надстройкой, при помощи следующего простого наблюдения: если $M$ является надстройкой (или хотя бы ко-$H$-пространством), то отображение приведенной диагонали $M \xrightarrow{\widehat{M}} M \wedge M$ гомотопно нулю. Предположим, что каждая пара в $(\underline{X},\underline{A})$ является надстройкой, т.е. $(X_i, A_i) = (\Sigma X_i', \Sigma A_i')$. Пусть $I = J \cup L$ и найдется хотя бы один номер $i$, принадлежащий $J \cap L$. Рассмотрим композицию

$$\theta\colon Y^{[m]} \xrightarrow{\widehat{\Delta}_{[m]}} Y^{[m]} \wedge Y^{[m]} \xrightarrow{\widehat{\pi}_J\wedge\widehat{\pi}_L} \widehat{Y}^J \wedge \widehat{Y}^L.$$

Так как $i \in J\cap L$, в каждом из приведенных произведений $\widehat{Y}^J$ и $\widehat{Y}^L$ содержится сомножитель $Y_i$. Переставляя сомножители в $Y^{[m]}$ так, чтобы $Y_i$ стоял на первом месте, мы получаем, что отображение $\theta$ есть композиция

$$Y_i\times Y^{[m]\setminus\{i\}} \xrightarrow{\widehat{\Delta}_{[m]}} (Y_i\times Y^{[m]\setminus\{i\}})\wedge(Y_i\times Y^{[m]\setminus\{i\}}) \xrightarrow{\widehat{\pi}_J\wedge\widehat{\pi}_L} (Y_i\wedge\widehat{Y}^{J\setminus\{i\}})\wedge(Y_i\wedge\widehat{Y}^{L\setminus\{i\}}).$$

Из диаграммы (7) мы получаем, что эта композиция пропускается через

$$(Y_i \wedge \widehat{Y}^{I\setminus\{i\}}) \xrightarrow{\widehat{\Delta}_I^{J,L}} (Y_i \wedge \widehat{Y}^{J\setminus\{i\}}) \wedge (Y_i \wedge \widehat{Y}^{L\setminus\{i\}}).$$

Но отображение $\widehat{\Delta}_I^{J,L}$ пропускается через $Y_i \wedge \widehat{Y}^{I\setminus\{i\}} \xrightarrow{\widehat{\Delta}\wedge 1} Y_i \wedge Y_i \wedge \widehat{Y}^{I\setminus\{i\}}$, а это отображение гомотопно нулю, так как $Y_i$ является надстройкой. Следовательно, отображение $\widehat{\Delta}_I^{J,L}$ также гомотопно нулю. Рассматривая ограничение на подпространство $\widehat{(\underline{X},\underline{A})}^K \subseteq X^{[m]}$, мы получаем, что отображение

$\widehat{(\underline{X},\underline{A})}^{K_I} \xrightarrow{\widehat{\Delta}_I^{J,L}} \widehat{(\underline{X},\underline{A})}^{K_J} \wedge \widehat{(\underline{X},\underline{A})}^{K_L}$ также гомотопно нулю. Так как это отображение индуцирует $*$-произведение в когомологиях, мы получаем следующее утверждение, доказанное в [5; теорема 1.6].

Теорема 3.3. *Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Предположим, что $(\underline{X},\underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ – набор пар, состоящий из надстроек над $CW$-комплексами с отмеченными точками. Пусть $I = J \cup L$ и $J \cap L \neq \varnothing$. Тогда для любых классов когомологий $u \in H^p\bigl(\widehat{(\underline{X},\underline{A})}^{K_J}\bigr)$ и $v \in H^q\bigl(\widehat{(\underline{X},\underline{A})}^{K_L}\bigr)$ их $*$-произведение $u * v$ равно нулю.*

**Момент-угол-комплексы над симплициальными частично упорядоченными множествами.** Как было отмечено выше, конструкцию момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_K = (D^2, S^1)^K$ можно обобщить, заменив топологическую пару $(D^2, S^1)$ на любую другую топологическую пару или последовательность пар $(\underline{X},\underline{A})$, что приводит к конструкции полиэдрального произведения $(\underline{X},\underline{A})^K$. Другой способ обобщения конструкции момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_K$ заключается в том, чтобы заменить симплициальный комплекс $K$ на более общий комбинаторный объект. Этот подход был развит в работах Лу, Маэды, Масуды и Панова [40], [38], в которых были определены и изучены момент-угол-комплексы над симплициальными частично упорядоченными множествами.

Частично упорядоченное множество $\mathscr{S}$ с отношением частичного порядка $\leqslant$ называется *симплициальным*, если оно содержит начальный элемент $\hat{0}$ и для любого $\sigma \in \mathscr{S}$ нижний отрезок $[\hat{0}, \sigma]$ является булевой решеткой (частично упорядоченным множеством граней симплекса). Мы рассматриваем только конечные частично упорядоченные множества и называем элементы $\sigma \in \mathscr{S}$ *симплексами*. Определим *функцию ранга* $|\cdot|$ на $\mathscr{S}$, положив $|\sigma| = k$ для $\sigma \in \mathscr{S}$, если $[\hat{0}, \sigma]$ является множеством граней $(k-1)$-мерного симплекса. *Вершинами* частично упорядоченного множества $\mathscr{S}$ называются элементы ранга один. Мы предполагаем, что $\mathscr{S}$ содержит $m$ вершин, и обозначаем множество вершин через $V(\mathscr{S}) = [m]$. Аналогично, мы обозначаем через $V(\sigma)$ множество вершин симплекса $\sigma$, т. е. множество таких $i$, что $i \leqslant \sigma$.

Каждому симплициальному частично упорядоченному множеству $\mathscr{S}$ можно поставить в соответствие алгебраический объект – его кольцо граней.

Определение 3.4 [47]. *Кольцом граней* симплициального частично упорядоченного множества $\mathscr{S}$ называется факторкольцо

$$\mathbb{Z}[\mathscr{S}] = \mathbb{Z}[v_\sigma \mid \sigma \in \mathscr{S}]/\mathscr{I}_{\mathscr{S}},$$

где $\mathscr{I}_{\mathscr{S}}$ – идеал, порожденный элементами $v_{\hat{0}} - 1$ и

$$v_\sigma v_\tau - v_{\sigma\wedge\tau} \sum_{\eta \in \sigma \vee \tau} v_\eta.$$

Кольцо $\mathbb{Z}[\mathscr{S}]$ обобщает кольцо Стенли–Райснера $\mathbb{Z}[K]$ симплициального комплекса $K$. Оно обладает замечательными алгебраическими и гомологическими свойствами, которые, однако, намного сложнее, чем свойства кольца граней $\mathbb{Z}[K]$. В отличие от $\mathbb{Z}[K]$, кольцо $\mathbb{Z}[\mathscr{S}]$ не порождается элементами наименьшей положительной степени.

Для того чтобы определить момент-угол-комплекс над симплициальным частично упорядоченным множеством, нам понадобится ряд предварительных понятий. Используя формальный категорный язык, рассмотрим *категорию граней* $\mathrm{CAT}(\mathscr{S})$, объектами которой являются элементы $\sigma \in \mathscr{S}$ и которая имеет единственный морфизм из $\sigma$ в $\tau$, если $\sigma \leqslant \tau$.

Для каждого $\sigma \in \mathscr{S}$ рассмотрим следующее подмножество в $(D^2)^m$:

$$B_\sigma = \{(z_1, \dots, z_m \in (D^2)^m \mid |z_j| = 1, \text{ если } j \nleq \sigma\}.$$

Тогда $B_\sigma$ гомеоморфно произведению $|\sigma|$ дисков и $m - |\sigma|$ окружностей. Если $\tau \leqslant \sigma$, то мы имеем вложение $B_\tau \subset B_\sigma$. Таким образом, соответствие $\sigma \mapsto B_\sigma$ задает диаграмму (функтор) из $\mathrm{CAT}(\mathscr{S})$ в TOP, которую мы обозначим через $(D^2, S^1)^{\mathscr{S}}$.

Определение 3.5. *Момент-угол-комплексом*, соответствующим симплициальному частично упорядоченному множеству $\mathscr{S}$, называется пространство

$$\mathscr{Z}_S = \mathrm{colim}(D^2, S^1)^{\mathscr{S}}.$$

Пространство $\mathscr{Z}_{\mathscr{S}}$ сохраняет многие важные топологические свойства, присущие исходному момент-угол-комплексу $\mathscr{Z}_K$, соответствующему симплициальному комплексу $K$. В работе Лу и Панова [38] доказано, что алгебра целочисленных когомологий пространства $\mathscr{Z}_{\mathscr{S}}$ изоморфна Tor-алгебре кольца граней $\mathbb{Z}[\mathscr{S}]$. Это непосредственно приводит к обобщению теоремы Хохстера, выражающему алгебраические числа Бетти кольца $\mathbb{Z}[\mathscr{S}]$ в терминах когомологий полных частично упорядоченных подмножеств в $\mathscr{S}$.

Теорема 3.6. *Имеет место изоморфизм градуированных колец*

$$H^*(\mathscr{Z}_{\mathscr{S}}; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[\mathscr{S}], \mathbb{Z}),$$

*градуированные компоненты которого задаются изоморфизмами групп*

$$H^p(\mathscr{Z}_{\mathscr{S}}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{-i+2|a|=p} \mathrm{Tor}^{-i,2|a|}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[\mathscr{S}], \mathbb{Z})$$

*в каждой размерности $p$. Здесь $|a| = j_1 + \dots + j_m$ для $a = (j_1, \dots, j_m)$.*

## 4. Рациональная теория гомотопий

Рациональная теория гомотопий представляет собой один из наиболее успешных разделов алгебраической топологии. Рациональный гомотопический тип пространства (конечного типа и нильпотентного) полностью определяется набором алгебраических инвариантов. Наиболее известным способом алгебраического описания рационального гомотопического типа является минимальная модель Сулливана, хотя имеются и другие эффективные модели.

Формально, *рациональной моделью* связного пространства $X$ называется коммутативная дифференциальная градуированная $\mathbb{Q}$-алгебра $\mathscr{M}$, которая связна, имеет конечный тип и квазиизоморфна коммутативной дифференциальной градуированной алгебре $AP_L(X)$ полиномиальных дифференциальных форм на $X$ с рациональными коэффициентами. В работе Фели и Танре [21] была построена рациональная гомотопическая модель произвольного полиэдрального произведения. Эта модель использовалась для описания рациональных гомотопических свойств. Чтобы сформулировать эти результаты, введем некоторые вспомогательные понятия.

Пусть $(\underline{X},\underline{A})=\{(X_i,A_i)\}_{i=1}^m$ – пары $CW$-комплексов с отмеченными точками, которые нильпотентны и имеют конечный тип. Для каждой пары $(X_i,A_i)$ выберем сюръективную модель $\varphi_i\colon \mathscr{M}_i\to\mathscr{M}_i'$ вложения $A_i\to X_i$. Для каждого $\sigma\subset[m]$ обозначим через $I_\sigma$ идеал в алгебре $\bigotimes\limits_{i=1}^m\mathscr{M}_i$, заданный следующим образом:

$$I_\sigma=E_1\otimes\cdots\otimes E_n,\qquad \text{где}\quad E_i=\begin{cases}\ker(\varphi_i), & \text{если } i\in\sigma,\\ \mathscr{M}_i, & \text{если } i\notin\sigma.\end{cases}$$

Положим

$$I(K)=\sum_{\sigma\notin K}I_\sigma.$$

Заметим, что алгебра $\bigotimes\limits_{i=1}^m\mathscr{M}_i/I(K)$ похожа на алгебру когомологий пространства Дэвиса–Янушкевича, $H^*(DJ_K;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{I}_K$, где $\mathscr{I}_K$ есть однородный идеал, порожденный всеми мономами без квадратов $v^\sigma=v_{i_1}\cdots v_{i_k}$ для $\sigma=\{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}\notin K$. Следующий результат был доказан в работе Фели и Танре [21].

Теорема 4.1. *Пусть $(\underline{X},\underline{A})=\{(X_i,A_i)\}_{i=1}^m$ – пары $CW$-комплексов с отмеченными точками, которые нильпотентны и имеют конечный тип. Выберем сюръективную рациональную модель $\varphi_i\colon\mathscr{M}_i\to\mathscr{M}_i'$ вложения $A_i\to X_i$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) *факторалгебра $\bigotimes\limits_{i=1}^m\mathscr{M}_i/I(K)$ является рациональной моделью для $(\underline{X},\underline{A})^K$*;

(b) *если $J\subset K$ – подкомплекс, то проекция*

$$\varphi_{K,J}\colon\bigotimes_{i=1}^m\mathscr{M}_i/I(K)\to\bigotimes_{i=1}^m\mathscr{M}_i/I(J)$$

*является рациональной моделью для вложения $(\underline{X},\underline{A})^J\to(\underline{X},\underline{A})^K$.*

Как и для всякого рационального пространства, наибольший интерес представляет не абстрактная теорема существования хорошей модели, а ее конкретные свойства (минимальная модель Сулливана всегда существует, но часто бывает весьма трудно описываемой).

Рациональное пространство $X$ называется *формальным*, если $H^*(X;\mathbb{Q})$ является моделью для $X$. Пусть $X_i=X$ и $A_i=*$ для любого $i$. Из рассмотрения рациональной модели полиэдрального произведения в теореме 4.1 непосредственно вытекает, что если $X$ формально, то и полиэдральное произведение $(X,*)^K$ формально. Отсюда также вытекает рациональная формальность пространства Дэвиса–Янушкевича; этот результат о формальности был доказан

Нотбомом и Рэем в [42] для когомологий с коэффициентами в любом коммутативном кольце.

Рациональное пространство $X$ называется *эллиптическим*, если его полная гомотопическая группа $\pi_*(X)$ имеет лишь конечное число слагаемых $\mathbb{Q}$. В противном случае пространство называется *гиперболическим*. Эти понятия хорошо изучены в рациональной теории гомотопий; замечательным является тот факт, что если рациональное пространство является гиперболическим, то размерность гомотопических групп $\pi_d(X)$ увеличивается экспоненциально с ростом $d$. Другими словами, не существует неэллиптических рациональных пространств, размерность гомотопических групп которых растет полиномиально. Используя свою модель полиэдрального произведения, Фели и Танре доказали, что если $X_i = X$ и $A_i = *$ для любого $i$, то пространство $(X, *)^K$ является гиперболическим при условии, что $K \neq \Delta^{m-1}$ и $H^*(X; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[v]$ для некоторого $v$ четной размерности. Для $CW$-пары $(D^2, S^1)$ в [6] доказано, что единственными рационально эллиптическими момент-угол-комплексами $\mathscr{Z}_K$ являются произведения нечетномерных сфер и дисков, что соответствует симплициальным комплексам $K$, представляющим собой джойн симплекса и границ симплексов.

## 5. Гомотопический тип полиэдральных произведений. I

Одной из причин интереса к описанию гомотопического типа момент-угол-комплексов $\mathscr{Z}_K$ является гомотопическая эквивалентность $\mathscr{Z}_K$ и дополнения конфигурации координатных подпространств (см. раздел 1). Важной проблемой в комбинаторике на протяжении многих лет было описание классов симплициальных комплексов $K$, для которых соответствующее дополнение $U(K)$ конфигурации координатных подпространств имеет гомотопический тип букета сфер. Эта проблема связана со следующим фактом из теории конфигураций гиперплоскостей (как наиболее изученных конфигураций): после двукратной надстройки дополнение любой конфигурации гиперплоскостей распадается в букет сфер. Дополнение $U(K)$ конфигурации координатных подпространств существенно отличается от дополнений конфигураций гиперплоскостей: в частности, $U(K)$ может иметь любое кручение в когомологиях. Большой прогресс в изучении дополнений $U(K)$ конфигураций был достигнут за счет привлечения методов гомотопической теории для анализа гомотопического типа $\mathscr{Z}_K$. В действительности использованные методы являются достаточно общими для анализа гомотопического типа произвольных полиэдральных произведений вида $(\underline{CX}, \underline{X})^K$.

Мы начнем обсуждение с некоторых комбинаторных определений. Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ определим его *звезду*, *дополнение* и *линк* как следующие подкомплексы:

$$\operatorname{star}_K(\sigma) = \{\tau \in K \mid \sigma \cup \tau \in K\};$$
$$K \setminus \sigma = K_{[m]\setminus\sigma} = \{\tau \in K \mid \sigma \cap \tau = \varnothing\};$$
$$\operatorname{link}_K(\sigma) = \operatorname{star}_K(\sigma) \cap K \setminus \sigma.$$

Напомним, что *джойном* симплициальных комплексов $K_1$, $K_2$ на непересекающихся множествах вершин называется симплициальный комплекс

$$K_1 * K_2 = \{\sigma_1 \cup \sigma_2 \mid \sigma_i \in K_i\}.$$

Из этих определений вытекает, что для вершины $\{v\} \in K$ ее звезда $\mathrm{star}_K(v)$ есть джойн,

$$\mathrm{star}_K(v) = \{v\} * \mathrm{link}_K(v),$$

и имеет место кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{link}_K(v) & \longrightarrow & \mathrm{star}_K(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \setminus v & \longrightarrow & K \end{array} \tag{9}$$

Рассмотрим вершину $\{m\} \in K$. Чтобы сравнить полиэдральные произведения для $K$, $\mathrm{link}_K(m)$, $\mathrm{star}_K(m)$ и $K \setminus m$, мы должны рассматривать каждый из этих симплициальных комплексов на множестве $[m]$. Это никак не влияет на комплексы $K$ и $\mathrm{star}_K(m)$, поскольку их множества вершин и так совпадают с $[m]$. Однако в случае комплексов $\mathrm{link}_K(m)$ и $K \setminus m$ необходимо ввести по меньшей мере одну дополнительную “призрачную” вершину $\{m\}$. Пусть $\overline{\mathrm{link}_K(m)}$ и $\overline{K \setminus m}$ – симплициальные комплексы $\mathrm{link}_K(m)$ и $K \setminus m$, рассматриваемые как симплициальные комплексы на множестве $[m]$. Тогда кодекартов квадрат (9) индуцирует кодекартов квадрат полиэдральных произведений

$$\begin{array}{ccc} (\underline{X}, \underline{A})^{\overline{\mathrm{link}_K(m)}} & \longrightarrow & (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{star}_K(m)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\underline{X}, \underline{A})^{\overline{K \setminus m}} & \longrightarrow & (\underline{X}, \underline{A})^K \end{array} \tag{10}$$

Пространства и отображения, входящие в диаграмму (10), можно описать более явно. Во-первых, из определения полиэдрального произведения вытекает, что

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\overline{\mathrm{link}_K(m)}} = (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(m)} \times A_m,$$
$$(\underline{X}, \underline{A})^{\overline{K \setminus m}} = (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus m} \times A_m.$$

Тогда из рассмотрения вложения $\mathrm{link}_K(m) \to K \setminus m$ следует, что индуцированное им отображение полиэдральных произведений

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\overline{\mathrm{link}_K(m)}} \to (\underline{X}, \underline{A})^{\overline{K \setminus m}}$$

есть не что иное, как произведение отображений

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(m)} \times A_m \to (\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus m} \times A_m.$$

Во-вторых, из определения джойна симплициальных комплексов вытекает, что если $K = K_1 * K_2$, то

$$(\underline{X}, \underline{A})^K \cong (\underline{X}, \underline{A})^{K_1} \times (\underline{X}, \underline{A})^{K_2}.$$

В частности, так как $\mathrm{star}_K(m) = \mathrm{link}_K(m) * \{m\}$, мы имеем

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{star}(K)(m)} \cong (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(m)} \times X_m.$$

Мы можем также представить $\overline{\mathrm{link}_K(m)}$ в виде $\mathrm{link}_K(m) * \varnothing$, где $\varnothing$ соответствует призрачной вершине $\{m\}$. Тогда вложение $\mathrm{link}_K(m) \to \mathrm{star}_K(m)$ индуцирует отображение джойнов

$$\overline{\mathrm{link}_K(m)} = \mathrm{link}_K(m) * \varnothing \to \mathrm{link}_K(m) * \{m\} = \mathrm{star}_K(m).$$

Следовательно, вложение $\mathrm{link}_K(m) \to \mathrm{star}_K(m)$ индуцирует произведение отображений

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(m)} \times A_m \to (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(m)} \times X_m.$$

Из этих замечаний следует, что кодекартов квадрат полиэдральных произведений (10) можно переписать в виде

$$\begin{tikzcd}
(\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(m)} \times A_m \arrow[r] \arrow[d, "1 \times i_m"] & (\underline{X}, \underline{A})^{\mathrm{link}_K(m)} \times X_m \arrow[d] \\
(\underline{X}, \underline{A})^{K \setminus m} \times A_m \arrow[r] & (\underline{X}, \underline{A})^K
\end{tikzcd} \tag{11}$$

где $i_m$ – вложение, а $j$ – отображение полиэдральных произведений, индуцированное вложением $\mathrm{link}_K(m) \to K \setminus m$.

Теперь рассмотрим частный случай, когда в каждой паре $(X_i, A_i)$ пространство $X_i$ стягиваемо. Как обычно, в этом случае мы несколько изменяем обозначения, рассматривая пары $(\underline{CX}, \underline{X}) = \{(CX_i, X_i)\}_{i=1}^m$, где $CX_i$ – приведенный конус над $X_i$. В этом случае отображение

$$(\underline{CX}, \underline{X})^{\mathrm{link}_K(m)} \times X_m \xrightarrow{1 \times i_m} (\underline{CX}, \underline{X})^{\mathrm{link}_K(m)} \times CX_m$$

эквивалентно с точностью до гомотопии отображению

$$(\underline{CX}, \underline{X})^{\mathrm{link}_K(m)} \times X_m \xrightarrow{\pi_1} (\underline{CX}, \underline{X})^{\mathrm{link}_K(m)},$$

где $\pi_1$ – проекция на первый сомножитель. Тогда (11) принимает вид гомотопически коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(\underline{CX}, \underline{X})^{\mathrm{link}_K(m)} \times X_m \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "j \times 1"] & (\underline{CX}, \underline{X})^{\mathrm{link}_K(m)} \arrow[d] \\
(\underline{CX}, \underline{X})^{K \setminus m} \times X_m \arrow[r] & (\underline{CX}, \underline{X})^K
\end{tikzcd} \tag{12}$$

Кодекартов квадрат (12) играет ключевую роль в работах Грбич–Терио [28], [29], Ирие–Кисимото [32] и Груйича–Велькера [30], где описаны различные классы симплициальных комплексов, для которых гомотопический тип полиэдрального произведения $(\underline{CX}, \underline{X})^K$ сводится к букетам итерированных смаш-произведений пространств $X_i$. Имеет место следующий факт из теории гомотопий, впервые доказанный в [27]. (Правым) *полусмаш-произведением* топологических пространств $C$ и $B$ с отмеченными точками называется фактор-пространство $C \rtimes B = C \times B/\sim$, где $(*, b) \sim *$. Хорошо известно, что если $C$ является ко-$H$-пространством, то $C \rtimes B \simeq C \vee (C \wedge B)$.

Лемма 5.1. *Пусть задан гомотопический кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "*\times 1"] & A \arrow[d] \\ C \times B \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

*где $\pi$ – проекция. Тогда существует гомотопическая эквивалентность $Q \simeq (A * B) \vee (C \rtimes B)$.*

Предположим теперь, что для симплициального комплекса $K$ отображение

$$(\underline{CX}, \underline{X})^{\mathrm{link}_K(m)} \to (\underline{CX}, \underline{X})^{K\setminus m}$$

гомотопно нулю. Тогда, применяя лемму 5.1 к гомотопическому кодекартову квадрату (12), мы получаем гомотопическую эквивалентность

$$(\underline{CX}, \underline{X})^K \simeq \big((\underline{CX}, \underline{X})^{\mathrm{link}_K(m)} * X_m\big) \vee \big((\underline{CX}, \underline{X})^{K\setminus m} \rtimes X_m\big).$$

Определение 5.2. Определим $\mathscr{W}_m$ как набор пространств, каждое из которых гомотопически эквивалентно букету надстроек над смаш-произведениями вида $X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_k}$, где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$.

Предположим, что $(\underline{CX}, \underline{X})^{\mathrm{link}_K(m)} \in \mathscr{W}_m$ и $(\underline{CX}, \underline{X})^{K\setminus m} \in \mathscr{W}_m$. Так как пространство $(\underline{CX}, \underline{X})^{K\setminus m}$ является надстройкой, мы получаем

$$(\underline{CX}, \underline{X})^{K\setminus m} \rtimes X_m \simeq (\underline{CX}, \underline{X})^{K\setminus m} \vee \big((\underline{CX}, \underline{X})^{K\setminus m} \wedge X_m\big).$$

Поскольку имеется гомотопическая эквивалентность

$$(\underline{CX}, \underline{X})^K \simeq \big((\underline{CX}, \underline{X})^{\mathrm{link}_K(m)} * X_m\big) \vee (\underline{CX}, \underline{X})^{K\setminus m} \vee \big((\underline{CX}, \underline{X})^{K\setminus m} \wedge X_m\big),$$

мы видим, что

$$(\underline{CX}, \underline{X})^K \in \mathscr{W}_m.$$

В наиболее интересном случае момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_K$ каждое из пространств $X_i$ есть окружность $S^1$, так что надстройка над смаш-произведением пространств $X_i$ гомотопически эквивалентна сфере. Таким образом, в этом случае класс $\mathscr{W}_m$ состоит из пространств, гомотопически эквивалентных букетам сфер. Поэтому, если $\mathscr{Z}_{\mathrm{link}_K(m)} \in \mathscr{W}_m$, $\mathscr{Z}_{K\setminus m} \in \mathscr{W}_m$, а отображение $\mathscr{Z}_{K\setminus m} \xrightarrow{j} \mathscr{Z}_{K\setminus m}$ гомотопно нулю, то $\mathscr{Z}_K \in \mathscr{W}_m$, т. е. $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно букету сфер.

Таким образом, подход состоит в том, чтобы найти класс $\mathscr{K}$ симплициальных комплексов со следующими свойствами: 1) если $K \in \mathscr{K}$, то $\operatorname{link}_K(m) \in \mathscr{K}$ и $K \setminus m \in \mathscr{K}$ (это позволит провести индукцию); 2) индуцированное отображение полиэдральных произведений $(\underline{CX}, \underline{X})^{\operatorname{link}_K(m)} \to (\underline{CX}, \underline{X})^{K \setminus m}$ гомотопно нулю.

Первым из таких классов являются сдвинутые комплексы. Симплициальный комплекс $K$ называется *сдвинутым* (англ. *shifted*), если его вершины можно упорядочить таким образом, чтобы для любых симплекса $\sigma \in K$ и вершины $\nu' < \nu$ было выполнено включение $(\sigma - \nu) \cup \nu' \in K$. Примером сдвинутого комплекса является $i$-мерный остов симплекса $\Delta^{m-1}$ для любого $i$. Из определения вытекает, что если $K$ является сдвинутым комплексом, то комплексы $\operatorname{link}_K(m)$ и $K \setminus m$ также являются сдвинутыми. В работах [29], [32] показано, что в случае сдвинутых комплексов отображение $(\underline{CX}, \underline{X})^{\operatorname{link}_K(m)} \to (\underline{CX}, \underline{X})^{K \setminus m}$ гомотопно нулю. Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 5.3. *Пусть $K$ – сдвинутый комплекс. Тогда*

$$(\underline{CX}, \underline{X})^K \in \mathscr{W}_m.$$

*В частности, момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер.*

Утверждение теоремы 5.3 можно уточнить, явно описав слагаемые в разложении пространства $(\underline{CX}, \underline{X})^K$ в букет. Это проще всего сделать, связав разложение из теоремы 5.3 со стабильным разложением пространства $\Sigma(\underline{CX}, \underline{X})^K$ из теоремы 2.1. В стабильном разложении слагаемые в букете имеют вид $|K_I| * \widehat{X}^I$ для $I \notin K$. Это означает, что если $\mathscr{Z}_K$ является букетом сфер, то все полные подкомплексы $|K_I|$ для $I \notin K$ становятся гомотопически эквивалентными букету сфер после $|I|$-кратной надстройки. В случае, когда симплициальный комплекс $K$ является сдвинутым, каждое пространство $|K_I|$ гомотопически эквивалентно букету сфер, так что $|K_I| * \widehat{X}^I \in \mathscr{W}_m$. Согласно уточненной формулировке теоремы 5.3, доказанной в [29], [32], в разложении пространства $\Sigma(\underline{CX}, \underline{X})^K$ в букет можно снять надстройки.

Теорема 5.4. *Пусть $K$ – сдвинутый комплекс. Тогда существует гомотопическая эквивалентность*

$$(\underline{CX}, \underline{X})^K \simeq \bigvee_{I \notin K} (|K_I| * \widehat{X}^I).$$

*В частности, существует гомотопическая эквивалентность*

$$\mathscr{Z}_K \simeq \bigvee_{I \notin K} (|K_I| \wedge S^{|I|+1}).$$

В более ранней работе авторов [28] теорема 5.3 была доказана другими методами в частном случае, когда в каждой паре $(CX_i, X_i)$ мы имеем $X_i \simeq \Omega X_i'$ для некоторого пространства $X_i'$. Заметим, что для пары $(D^2, S^1)$ мы имеем $S^1 \simeq \Omega \mathbb{C}P^\infty$, так что гомотопическая эквивалентность в случае $\mathscr{Z}_K$ вытекает из результатов работы [28].

Теорема 5.4 обобщает результаты из классической теории гомотопий, доказанные Ганеа и Портером в 1960-х. Для $0 \leqslant k \leqslant m$ положим

$$T_{m-k}^m = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i \;\middle|\; \text{по крайней мере } k \text{ координат } x_i \text{ равны } * \right\}.$$

Тогда мы имеем вложения подпространств

$$T_0^m \subseteq T_1^m \subseteq \cdots \subseteq T_m^m \subseteq \prod_{i=1}^m X_i.$$

Это есть не что иное, как фильтрация Уайтхеда в произведении $\prod_{i=1}^m X_i$. Некоторые из пространств фильтрации имеют и другие названия: $T_0^m \simeq *$, $T_1^m = X_1 \vee \cdots \vee X_m$ – букет, $T_{m-1}^m$ – так называемый *толстый букет*, а $T_m^m = \prod_{i=1}^m X_i$. Определим пространство $F_{m-k}^m$ как гомотопический слой вложения $T_{m-k}^m$ в произведение. Тогда мы имеем гомотопическое расслоение

$$F_{m-k}^m \to T_{m-k}^m \to \prod_{i=1}^m X_i.$$

Естественный вопрос – описать гомотопический тип пространств $F_{m-k}^m$. Ганеа [23] показал, что $F_1^2$, т. е. гомотопический слой вложения $X_1 \vee X_2 \to X_1 \times X_2$, гомотопически эквивалентен пространству $\Omega X_1 * \Omega X_2$. Этот результат был обобщен Портером на случай произвольного пространства $F_{m-k}^m$ способом, который будет описан ниже.

Вначале мы переформулируем вопрос в терминах полиэдральных произведений. Заметим, что $T_{m-k}^m = (\underline{X}, \underline{*})^K$, где $K = \Delta_{m-1-k}^{m-1}$ – $(m-1-k)$-мерный остов стандартного $(m-1)$-мерного симплекса. Заметим также, что $\prod_{i=1}^m X_i = (\underline{X}, \underline{X})^K$ для любого $K$. Следующий общий результат был доказан Бари, Бендерским, Коэном и Гитлером в [4] с использованием теоремы Денхама и Сусиу [19]. Через $PX$ мы обозначаем пространство путей в пространстве $X$.

Теорема 5.5. *Пусть $X_i$ – CW-комплексы с отмеченными точками, $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Существует гомотопическое расслоение*

$$(\underline{PX}, \underline{\Omega X})^K \to (\underline{X}, \underline{*})^K \to (\underline{X}, \underline{X})^K.$$

Как обычно, мы можем заменить $(\underline{PX}, \underline{\Omega X})$ на $(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})$, где $C\Omega X$ – приведенный конус над $\Omega X$. Для этого нужно использовать естественную гомотопическую эквивалентность пар $(PY, \Omega Y) \simeq (C\Omega Y, \Omega Y)$. Тогда, записывая $(\underline{X}, \underline{X})^K$ как $\prod_{i=1}^m X_i$, мы получаем гомотопическое расслоение

$$(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K \to (\underline{X}, \underline{*})^K \to \prod_{i=1}^m X_i.$$

В частности, полагая $K = \Delta^{m-1}_{m-1-k}$, мы получаем модель для гомотопического расслоения $F^m_{m-k} \to T^m_{m-k} \to \prod\limits_{i=1}^{m} X_i$.

Таким образом, мы можем переформулировать результат Портера в терминах полиэдральных произведений. Портер [45] показал, что для любых односвязных пространств $X_1, \ldots, X_m$ имеет место гомотопическая эквивалентность

$$(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K \simeq \bigvee_{j=k+2}^{m} \Big( \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant m} \binom{j-1}{k+1} \Sigma^{k+1} \Omega X_{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega X_{i_j} \Big).$$

Теорема 5.3 обобщает этот результат. Для любых линейно связных пространств $X_1, \ldots, X_m$ существует гомотопическая эквивалентность

$$(\underline{CX}, \underline{X})^K \simeq \bigvee_{j=k+2}^{m} \Big( \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant m} \binom{j-1}{k+1} \Sigma^{k+1} X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_j} \Big).$$

Например, если $K = \Delta^{m-1}_0$, т. е. $K$ есть набор из $m$ точек, то мы имеем гомотопическую эквивалентность

$$(\underline{CX}, \underline{X})^K \simeq \bigvee_{j=2}^{m} \Big( \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant m} (j-1) \Sigma X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_j} \Big). \tag{13}$$

В частности, если $K$ – набор из $m$ точек, то мы имеем гомотопическую эквивалентность

$$\mathscr{Z}_K \simeq \bigvee_{k=2}^{m} (k-1) \binom{m}{k} S^{k+1}.$$

Этот случай был рассмотрен в [27].

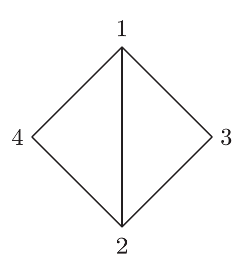


Рис. 1

Имеется большое количество сдвинутых симплициальных комплексов, которые не являются остовами симплекса. Например, пусть $K$ – симплициальный комплекс с вершинами $\{1, 2, 3, 4\}$ и ребрами $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ (см. рис. 1). В работе [29] подробно описано, как последовательным применением диаграммы (12) и леммы 5.1 получается гомотопическая эквивалентность

$$(\underline{CX},\underline{X})^K \simeq (\Sigma X_3 \wedge X_4) \vee (\Sigma^2 X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (\Sigma^2 X_1 \wedge X_2 \wedge X_4) \\ \vee 2(\Sigma^2 X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4).$$

В частности, в случае момент-угол-комплекса мы имеем гомотопическую эквивалентность

$$\mathscr{Z}_K \simeq S^3 \vee 2S^5 \vee 2S^6.$$

## 6. Гомотопический тип полиэдральных произведений. II

Нам хотелось бы получить обобщение теоремы 5.4, описав как можно больший класс симплициальных комплексов, для которых в разложении Бари–Бендерского–Коэна–Гитлера пространства $\Sigma(\underline{CX},\underline{X})^K$ можно снять надстройки. Чтобы найти такой класс, обратимся к некоторым конструкциям из комбинаторики и коммутативной алгебры.

Напомним (см. п. 1.2), что $H^*(\mathscr{Z}_K) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z})$ и что кольцо Стенли–Райснера $\mathbf{k}[K]$ называется голодовым над полем $\mathbf{k}$, если все произведения и произведения Масси в $\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}[K],\mathbf{k})$ обращаются в нуль. В действительности, как было показано Берглундом и Йолленбеком в [9], обращение в нуль высших произведений Масси вытекает из обращения в нуль обычных произведений, так что можно ограничиться рассмотрением обычного произведения. Если пространство $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно букету сфер, то все произведения (и произведения Масси) в $H^*(\mathscr{Z}_K)$ обращаются в нуль, так что кольцо $\mathbb{Z}[K]$ является голодовым над любым полем. Обратное неверно: имеются примеры голодовых колец $\mathbb{Z}[K]$, для которых $H^*(\mathscr{Z}_K)$ содержит кручение (один из таких примеров мы рассмотрим в разделе 7). На протяжении многих лет в комбинаторике и коммутативной алгебре рассматривались различные классы $\mathscr{K}$ симплициальных комплексов $K$, для которых $\mathbb{Z}[K]$ является голодовым кольцом над любым полем $\mathbf{k}$, что влечет обращение в нуль произведений и высших произведений Масси в $H^*(\mathscr{Z}_K;\mathbf{k})$. Одним из таких классов являются сдвинутые комплексы; другие классы – *расщепимые* (англ. *shellable*) и секвенциально коэн-маколеевы комплексы (определения будут даны ниже). Во всех этих случаях полные подкомплексы $K_I$, где $I \notin K$, гомологически эквивалентны букетам сфер. Возникает естественный вопрос: будут ли соответствующие момент-угол-комплексы $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентны букетам сфер? Если $\mathbf{k}$ – поле, то можно надеяться на существование максимального класса $\mathscr{K}$ симплициальных комплексов с когомологиями без кручений, для которых следующие три утверждения эквивалентны:

(i) $K \in \mathscr{K}$;

(ii) кольцо $\mathbf{k}[K]$ является голодовым;

(iii) пространство $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно букету сфер.

Поиск доказательств различных импликаций между этими тремя утверждениями был основной движущей силой развития данной области в течение последних лет. В этом разделе мы обозначим три направления, где был достигнут некоторый прогресс.

**6.1. Вершинно-разложимые, расщепимые и секвенциально коэн-маколеевы комплексы.** Мы рассмотрим некоторых возможных кандидатов для класса $\mathscr{K}$. Как описано в работе [10], имеется следующая иерархия классов симплициальных комплексов:

$$\begin{aligned}\text{сдвинутые} &\subset \text{вершинно-разложимые} \subset \text{расщепимые}\\ &\subset \text{секвенциально коэн-маколеевы,}\end{aligned}$$

где каждое включение является строгим. Определение сдвинутых комплексов было дано в предыдущем разделе.

Определение 6.1. Симплициальный комплекс $K$ называется *вершинно-разложимым* (англ. *vertex-decomposable*), если

1) $K$ является симплексом, или $K = \varnothing$, или
2) существует вершина $v \in K$, для которой
   (a) комплексы $K \setminus v$ и $\mathrm{link}_K(v)$ являются вершинно-разложимыми;
   (b) ни одна из гиперграней комплекса $\mathrm{link}_K(v)$ не является гипергранью в $K \setminus v$.

Класс вершинно-разложимых комплексов похож на класс сдвинутых комплексов в том смысле, что он также определяется в терминах вершин и хорошо приспособлен для применения индуктивных рассуждений на основе леммы 5.1 и диаграммы (12), так как входящие в нее комплексы $\mathrm{link}_K(v)$ и $K \setminus v$ также являются вершинно-разложимыми.

Следующий результат был доказан в работе Груйича и Велькера [30] с использованием комбинаторной теории Морса, а также общего подхода на основе леммы 5.1 и диаграммы (12). Утверждение будет сформулировано в терминах двойственного симплициального комплекса. Для симплициального комплекса $K$ на множестве $[m]$ его *двойственным по Александеру* называется симплициальный комплекс

$$K^{\circ} = \{\sigma \subseteq [m] \mid [m] \setminus \sigma \notin K\}.$$

Теорема 6.2. *Пусть для симплициального комплекса $K$ его двойственный по Александеру комплекс является вершинно-разложимыми. Тогда*

$$(\underline{D^n}, \underline{S^{n-1}})^K \in \mathscr{W}_m.$$

Заметим, что двойственный по Александеру комплекс не упоминается в соответствующем утверждении для сдвинутых комплексов – теореме 5.3. Дело в том, что сдвинутые комплексы являются самодвойственными. Анализ подхода Груйича и Велькера показывает, что в действительности с двойственными комплексами работать удобнее. Другое замечание, относящееся к теореме 6.2, заключается в том, что она охватывает лишь случай пар $(\underline{D^n}, \underline{S^{n-1}})$. Это связано с тем, что в ее доказательстве использованы методы теории Морса. Естественно, хотелось бы иметь более общий результат, покрывающий все полиэдральные произведения $(\underline{CX}, \underline{X})^K$.

Вместо того чтобы пытаться обобщить теорему 6.2, Ирие и Кисимото в работе [33] перешли к рассмотрению более широких классов расщепимых и секвенциально коэн-маколеевых комплексов. Мы дадим лишь определение расщепимых комплексов, чтобы проиллюстрировать их подход. Напомним, что *гипергранью* симплициального комплекса называется его максиальный симплекс и симплициальный комплекс называется *чистым* (англ. *pure*), если все его гиперграни имеют одну и ту же размерность.

Определение 6.3. Симплициальный комплекс $K$ называется *расщепимым* (англ. *shellable*), если существует такой порядок на множестве его гиперграней $F_1, \dots, F_t$, что

$$\langle F_k \rangle \cap \langle F_1, \dots, F_{k-1} \rangle$$

является чистым комплексом размерности $\dim(F_k)-2$ для $k = 2, \dots, t$ (здесь $\langle \cdot \rangle$ обозначает аффинную оболочку).

Симплициальный комплекс называется *комплексом Коэна–Маколея* (или *коэн-маколеевым комплексом*) над $\mathbb{Z}$, если его кольцо Стенли–Райснера $\mathbb{Z}[K]$ является кольцом Коэна–Маколея, т. е. его круллева размерность равна глубине. Известно, что комплексы Коэна–Маколея являются чистыми. Обобщение понятия комплекса Коэна–Маколея на случай комплексов, не являющихся чистыми, приводит к понятию секвенциально коэн-маколеевых комплексов. Мы дадим определение, следуя [11]. Для симплициального комплекса $K$ и $i \geqslant 0$ обозначим через $K^{\langle i \rangle}$ подкомплекс в $K$, порожденный всеми гранями размерности $\geqslant i$. Симплициальный комплекс $K$ называется *секвенциально ацикличным* над $\mathbb{Z}$, если комплексы $K^{\langle i \rangle}$ обладают свойством $\widetilde{H}_r(K^{\langle i \rangle}) = 0$ для всех $r < i \leqslant \dim K$. *Линком* грани $\sigma$ в $K$ называется подкомплекс

$$\operatorname{link}_K(\sigma) = \{\tau \in K \mid \sigma \cup \tau \in K,\ \sigma \cap \tau = \varnothing\}.$$

Определение 6.4. Симплициальный комплекс $K$ называется *секвенциально коэн-маколеевым* над $\mathbb{Z}$, если комплекс $\operatorname{link}_K(\sigma)$ является секвенциально ацикличным над $\mathbb{Z}$ для любого $\sigma \in K$.

Заметим, что определения расщепимых и секвенциально коэн-маколеевых комплексов существенно отличаются от определений сдвинутых или вершинно-разложимых комплексов – эти два новых класса не определяются в терминах вершин. Поэтому для изучения соответствующих полиэдральных произведений необходимо выработать новый подход.

В работе Ирие и Кисимото [33] была введена "фильтрация толстых букетов" на полиэдральном произведении. Эта фильтрация на общем полиэдральном произведении управляется фильтрацией толстых букетов на вещественном момент-угол-комплексе $(\underline{D^1}, \underline{S^0})^K$. Как показано в [33], если фильтрация толстых букетов удовлетворяет некоторому условию тривиальности, то в разложении Бари–Бендерского–Коэна–Гитлера пространства $\Sigma(\underline{CX}, \underline{X})^K$ можно снять надстройки. Также в [33] был описан класс симплициальных комплексов, удовлетворяющих этому условию тривиальности.

Определение 6.5. Симплициальный комплекс $K$ называется *наполнимым* (англ. *fillable*), если в нем существуют минимальные неграни $M_1, \dots, M_r$, для которых пространство $|K \cup M_1 \cup \dots \cup M_r|$ стягиваемо.

Как показано в [33], если каждый полный подкомплекс $K_I$ в $K$ является наполнимым, то фильтрация толстых букетов для $K$ удовлетворяет условию тривиальности, а значит, в разложении Бари–Бендерского–Коэна–Гитлера пространства $\Sigma(\underline{CX}, \underline{X})^K$ можно снять надстройки. В [33] также показано, что если для $K$ его двойственный по Александеру комплекс является расщепимым, то сам комплекс $K$ является наполнимым, а значит, $(\underline{CX}, \underline{X})^K \in \mathscr{W}_m$.

Для того чтобы получить обобщение на класс секвенциально коэн-маколеевых комплексов, в [33] понятие наполнимого комплекса было обобщено до понятия гомологически наполнимого комплекса. Было показано, что это условие также влечет условие тривиальности фильтрации толстых букетов, а двойственный по Александеру к секвенциально коэн-маколееву комплексу является гомологически наполнимым. Это привело к следующему наиболее общему на данный момент результату.

Теорема 6.6. *Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, для которого двойственный по Александеру комплекс является расщепимым или секвенциально коэн-маколеевым (или, более общо, $K$ является наполнимым или гомологически наполнимым). Тогда в разложении Бари–Бендерского–Коэна–Гитлера пространства $\Sigma(\underline{CX}, \underline{X})^K$ можно снять надстройки, откуда следует, что*

$$(\underline{CX}, \underline{X})^K \in \mathscr{W}_m.$$

*В частности, момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер.*

**6.2. Конфигурационные пространства и полиэдральные произведения.** Теорема 6.6 была мотивирована известными результатами из комбинаторной коммутативной алгебры. В работе [31] было доказано, что для любого секвенциально коэн-маколеева симплициального комплекса $K$ кольцо $\mathbb{Z}[K]$ является голодовым над любым полем. В связи с этим естественно возникла гипотеза о том, что момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер, если $K$ является секвенциально коэн-маколеевым комплексом. В процессе доказательства этой гипотезы было обнаружено, что метод, применяемый при доказательстве, в действительности работает для более широкого класса гомологически наполнимых симплициальных комплексов.

С другой стороны, может оказаться полезным рассмотреть условие Голода напрямую. Напомним, что кольцо Стенли–Райснера $\mathbb{Z}[K]$ называется голодовым, если все произведения и высшие произведения Масси в алгебре $H^*(\mathscr{Z}_K) \cong \operatorname{Tor}_{K[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z})$ обращаются в нуль. Это свойство имеет место, если $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно букету сфер. Однако известны примеры (см. конец раздела 7), когда кольцо $\mathbb{Z}[K]$ является голодовым, но $\mathscr{Z}_K$ не гомотопически эквивалентно букету сфер. Поэтому условие, что $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно букету сфер, является слишком сильным. Сняв надстройки в разложении (6), мы видим, что момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ может иметь слагаемые вида $\Sigma^{|I|}|K_I|$, которые, вообще говоря, могут быть надстройками над любым пространством (а не только над сферой). Таким образом, проблему нужно рассматривать более абстрактно. Известно, что для любого ко-$H$-пространства $Y$ все произведения и высшие произведения Масси в $H^*(Y)$ обращаются в нуль.

Таким образом, более разумной является следующая постановка вопроса: верно ли, что если кольцо $\mathbb{Z}[K]$ голодово, то $\mathscr{Z}_K$ является ко-$H$-пространством? Эквивалентны ли эти два условия?

Этим вопросам посвящена недавняя работа Бебена и первого автора [8]. Там была построена модель некоторого пространства отображений как конфигурационного пространства. Чтобы не удаляться от основного предмета изложения в этом обзоре, мы рассмотрим лишь частный случай их общей конструкции. Пусть $W = (\underline{X}, \underline{A})^K$; напомним, что $W$ является подпространством в произведении $\prod_{i=1}^{m} X_i$. Для $\ell \geqslant 0$ пусть

$$W^\ell = (\underline{\Sigma^\ell X}, \underline{\Sigma^\ell A})^K$$

– полиэдральное произведение, соответствующее покоординатной надстройке над парами, задающими пространство $W$. Например, если $W = (D^1, S^0)^K$, то $W^1 \simeq (D^2, S^1)^K = \mathscr{Z}_K$. Рассмотрим пространство отображений

$$\mathrm{map}((Y, B); W^\ell),$$

точками которого являются отображения $f\colon Y \to W^\ell$, которые отправляют $B \subseteq Y$ в отмеченную точку. Заметим, что $B$ может быть пустым; в этом случае мы получим модель для пространства свободных отображений из $Y$ в $W^\ell$. В [8] было показано, что для некоторых пар $(Y, B)$, включая пары вида $(D^n, S^{n-1})$, пространство $\mathrm{map}((Y, B); W^\ell)$ гомотопически эквивалентно некоторому пространству конфигураций частиц с метками.

Важным частным случаем является пара $(Y, B) = (S^1, *)$; в этом случае получается модель в виде конфигурационного пространства для пространства отображений $\mathrm{map}((S^1, *); W^\ell) = \Omega W^\ell$. Эта модель была затем использована для получения гомотопического разложения пространства $\Sigma\Omega W^\ell$, слагаемые которого соответствуют факторпространствам конфигурационных пространств с метками. Свойства этих пространств зависят от изначального симплициального комплекса $K$, но не полностью определяются им.

В случае пары $W = (D^1, S^0)^K$ мы получаем модель для пространства $\Omega W^1 \simeq \Omega\mathscr{Z}_K$, а также гомотопическое разложение для пространства $\Sigma\Omega\mathscr{Z}_K$. Напомним, что мы пытаемся найти ответ на следующий вопрос: является ли $\mathscr{Z}_K$ ко-$H$-пространством, если кольцо $\mathbb{Z}[K]$ голодово. Хорошо известно, что $Y$ является ко-$H$-пространством тогда и только тогда, когда $Y$ является ретрактом пространства $\Sigma\Omega Y$. Таким образом, нужно показать, что если кольцо $\mathbb{Z}[K]$ голодово, то из модели конфигурационного пространства вытекает, что $\mathscr{Z}_K$ является ретрактом пространства $\Sigma\Omega\mathscr{Z}_K$. С точки зрения теории гомотопий свойство Голода удобно заменить на его гомотопический аналог, называемый гомотопической голодовостью; это понятие основано на интерпретации обращения в нуль произведения и высших произведений Масси в кольце $H^*(\mathscr{Z}_K)$ с гомотопической точки зрения. В следующем определении используется непосредственно симплициальный комплекс, а не его кольцо Стенли–Райснера.

Определение 6.7. Симплициальный комплекс $K$ на множестве вершин $[m]$ называется *гомотопически голодовым*, если $K$ состоит из одной вершины или, индуктивно, если комплекс $K\backslash i$ является гомотопически голодовым для любого $i \in [m]$ и существует сохраняющее отмеченные точки отображение

$$\Psi_K \colon \Sigma^m|K| \to \Sigma|\Delta^{m-1}|$$

такое, что для любого $y = (t_1, \dots, t_{m-1}) \in \left(\prod_{i=1}^{m}[-1,1]\right) \Big/ \partial\left(\prod_{i=1}^{m}[-1,1]\right) \cong S^{m-1}$, не являющегося отмеченной точкой, ограничение отображения $\Psi_K$ на подпространство $\{y\} \wedge \Sigma|K|$ в $\Sigma^m|K|$ задается следующим образом:

1) если $t_1 = \dots = t_{m-1} = 0$, то ограничение отображения $\Psi_K$ на $\{y\} \wedge \Sigma|K|$ есть надстройка над вложением $\Sigma|K| \to \Sigma|\Delta^{m-1}|$;

2) если $S_y = (t_1, \dots, t_{n-1}, 0)$ и $(I_1, \dots, I_n)$ – упорядоченное разбиение множества $[m]$, зависящее от $S_y$, то отображение $\Psi_K$ переводит $\{y\} \wedge \Sigma|K|$ в подпространство $\Sigma|K_{I_1} * \dots * K_{I_m}| \subseteq \Sigma|\Delta^{m-1}|$.

Два других эквивалентных определения свойства гомотопической голодовости даны в [8]. Там также показано, что класс гомотопически голодовых симплициальных комплексов включает комплексы, для которых двойственные по Александеру являются секвенциально коэн-маколеевыми. Кроме того, в [8] приведен пример, показывающий, что класс гомотопически голодовых комплексов строго больше класса секвенциально коэн-маколеевых комплексов. В [8] получен следующий результат.

Теорема 6.8. *Пусть $K$ – гомотопически голодов симплициальный комплекс. Тогда $\mathscr{Z}_K$ является ко-$H$-пространством.*

Из теоремы 6.8 следует, что для гомотопически голодова комплекса $K$ все произведения и произведения Масси в кольце $H^*(\mathscr{Z}_K)$ обращаются в нуль, т. е. кольцо $\mathbb{Z}[K]$ является голодовым. Остается открытым вопрос: верно ли, что если кольцо $\mathbb{Z}[K]$ является голодовым, то комплекс $K$ является гомотопически голодовым? Также неизвестно, верно ли утверждение, обратное теореме 6.8, т. е. верно ли, что если $\mathscr{Z}_K$ является ко-$H$-пространством, то $K$ является гомотопически голодовым комплексом. Тем не менее в [8] показано, что эквивалентность имеет место, если несколько ослабить свойство гомотопической голодовости.

Пусть $\Delta_m$ обозначает диагональ:

$$\Delta_m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = \dots = x_m\}.$$

Обозначим через $\mathscr{Q}_K$ подпространство в полусмаш-произведении

$$((\mathbb{R}^m \setminus \Delta_m) \times \Sigma|\Delta^{m-1}|)/(\mathbb{R}^m \setminus \Delta_m) \times *),$$

определяемое следующим образом:

$$\mathscr{Q}_K = \bigcup_{\substack{y \in \mathbb{R}^m \setminus \Delta_m \\ (I_1, \dots, I_n) = [m]_y}} \{y\} \wedge \Sigma|K_{I_1} * \dots * K_{I_n}|,$$

где $(I_1, \dots, I_n) = [m]_y$ – разбиение множества $[m]$, зависящее от $y$.

Определение 6.9. Симплициальный комплекс $K$ на множестве вершин $[m]$ называется *слабо гомотопически голодовым*, если $K$ состоит из одной вершины или, индуктивно, $K \setminus i$ является слабо гомотопически голодовым для любого $i \in [m]$ и отображение

$$\Phi_K \colon \Sigma^m|K| \to \Sigma\mathscr{Q}_K,$$

задаваемое для любых $z \in |K|$, $t_1, \ldots, t_{m-1}, t \in [-1, 1]$ формулой

$$\Phi_K(t_1, \ldots, t_{m-1}, t, z) = (2\beta - 1, (t_1, \ldots, t_{m-1}, 0), (t, z)),$$

где $\beta = \max(|t_1|, \ldots, |t_{m-1}|, 0)$, гомотопно нулю.

Теорема 6.10. *Симплициальный комплекс $K$ является слабо гомотопически голодовым тогда и только тогда, когда $\mathscr{Z}_K$ является ко-$H$-пространством.*

Теорема 6.10 дает классификацию симплициальных комплексов $K$, для которых момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ является ко-$H$-пространством. При этом остается открытым вопрос об эквивалентности свойств слабой гомотопической голодовости комплекса $K$ и голодовости кольца $\mathbb{Z}[K]$.

**6.3. Склейка вдоль общей грани.** До сих пор все классы симплициальных комплексов, для которых имеет место разложение в букет $(\underline{CX}, \underline{X})^K \in \mathscr{W}_m$, имели комбинаторное происхождение (как в случае сдвинутых, расщепимых и секвенциально коэн-маколеевых комплексов) или возникали как обобщения этих комбинаторных классов, приспособленные к доказательству разложения в букет (как в случае наполнимых, гомологически наполнимых и гомотопически голодовых комплексов). Здесь мы опишем другую операцию на симплициальных комплексах, которая не имеет простого комбинаторного описания, но тем не менее хорошо взаимодействует с полиэдральными произведениями. Это – операция склейки двух симплициальных комплексов вдоль общей грани.

Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Предположим, что $K$ представляется в виде $K = K_1 \cup_\tau K_2$, где $\tau$ – симплекс в $K$. Другими словами, имеется кодекартов квадрат симплициальных комплексов

$$\begin{tikzcd} \tau \arrow[r] \arrow[d] & K_1 \arrow[d] \\ K_2 \arrow[r] & K \end{tikzcd} \tag{14}$$

Геометрически пространство $|K|$ получается склейкой $|K_1|$ и $|K_2|$ вдоль общей грани. Изменяя, если необходимо, нумерацию вершин, можно предполагать, что симплициальный комплекс $K_1$ имеет множество вершин $\{1, \ldots, \ell\}$, комплекс $K_2$ имеет множество вершин $\{\ell - k + 1, \ldots, m\}$, а симплекс $\tau$ имеет множество вершин $\{\ell - k + 1, \ldots, \ell\}$. Пусть $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ и $\overline{\tau}$ – симплициальные комплексы $K_1$, $K_2$ и $\tau$, рассматриваемые на общем множестве $[m]$. Таким образом, $K = \overline{K}_1 \cup_{\overline{\tau}} \overline{K}_2$.

Пусть $\sigma \in K_1$ и $\overline{\sigma}$ – соответствующий симплекс в $\overline{K}_1$. По определению $\overline{\sigma}$ мы имеем $i \notin \overline{\sigma}$ при $i \in \{\ell+1, \ldots, m\}$. Следовательно, $(\underline{CX}, \underline{X})^{\overline{\sigma}} = (\underline{CX}, \underline{X})^{\sigma} \times X_{\ell+1} \times \cdots \times X_m$. Таким образом, взяв объединение по всем граням комплекса $\overline{K}_1$, получим

$$(\underline{CX}, \underline{X})^{\overline{K}_1} = (\underline{CX}, \underline{X})^{K_1} \times X_{\ell+1} \times \cdots \times X_m.$$

Аналогично,

$$(\underline{CX}, \underline{X})^{\overline{K}_2} = X_1 \times \cdots \times X_{\ell-k} \times (\underline{CX}, \underline{X})^{K_2}.$$

Так как $\tau = \Delta^{k-1}$, то $(\underline{CX}, \underline{X})^{\tau} = CX_{\ell-k+1} \times \cdots \times CX_{\ell}$, поэтому

$$(\underline{CX}, \underline{X})^{\overline{\tau}} = X_1 \times \cdots \times X_{\ell-k} \times CX_{\ell-k+1} \times \cdots \times CX_{\ell} \times X_{\ell+1} \times \cdots \times X_m.$$

Пусть $M = X_1 \times \cdots \times X_{\ell-k}$ и $N = X_{\ell+1} \times \cdots \times X_m$. Применяя функтор полиэдрального произведения к диаграмме (14), мы получаем кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} M \times (\underline{CX}, \underline{X})^{\tau} \times N \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & (\underline{CX}, \underline{X})^{K_1} \times N \arrow[d] \\ M \times (\underline{CX}, \underline{X})^{K_2} \arrow[r] & (\underline{CX}, \underline{X})^{K} \end{tikzcd} \tag{15}$$

где отображения $a$ и $b$ определяются покоординатно. Так как $\tau$ – симплекс, то пространство $(\underline{CX}, \underline{X})^{\tau}$ является произведением конусов и потому стягиваемо. Непосредственно из определения отображений $a$ и $b$ следует, что ограничение отображения $a$ на $N$ является тождественным отображением и то же верно для ограничения отображения $b$ на $M$. В [29] доказана лемма, из которой следует, что ограничение отображения $a$ на $M$ гомотопно нулю и то же верно для ограничения отображения $b$ на $N$. Тогда гомотопический тип полиэдрального произведения $(\underline{CX}, \underline{X})^{K}$ можно описать, используя следующую общую лемму, доказательство которой также можно найти в [29].

Лемма 6.11. *Пусть дан гомотопический кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} A \times E \times B \arrow[r, "f \times B"] \arrow[d, "A \times g"] & C \times B \arrow[d] \\ A \times D \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

*в котором пространство $E$ стягиваемо, а отображения $f$ и $g$ гомотопны нулю. Тогда имеет место гомотопическая эквивалентность*

$$Q \simeq (A * B) \vee (A \ltimes D) \vee (C \rtimes B).$$

Применяя лемму 6.11 к кодекартову квадрату (15), мы получаем следующее утверждение.

Теорема 6.12. *Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Предположим, что $K=K_1\cup_\tau K_2$, где $\tau$ – общая грань $K_1$ и $K_2$. Тогда имеет место гомотопическая эквивалентность*

$$(\underline{CX},\underline{X})^K\simeq (M*N)\vee((\underline{CX},\underline{X})^{K_1}\rtimes N)\vee(M\ltimes(\underline{CX},\underline{X})^{K_2}),$$

*где $M=X_1\times\dots\times X_{\ell-k}$ и $N=X_{\ell+1}\times\dots\times X_m$.*

Заметим, что $M*N\in\mathscr{W}_m$. Если $(\underline{CX},\underline{X})^{K_1}\in\mathscr{W}_m$, то это пространство является надстройкой, откуда получаем, что

$$(\underline{CX},\underline{X})^{K_1}\rtimes N\simeq(\underline{CX},\underline{X})^{K_1}\vee((\underline{CX},\underline{X})^{K_1}\wedge N)\in\mathscr{W}_m.$$

Аналогично, если $(\underline{CX},\underline{X})^{K_2}\in\mathscr{W}_m$, то $(\underline{CX},\underline{X})^{K_2}\ltimes N\in\mathscr{W}_m$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.13. *В предположениях теоремы 6.12, если $(\underline{CX},\underline{X})^{K_1}\in\mathscr{W}_m$ и $(\underline{CX},\underline{X})^{K_2}\in\mathscr{W}_m$, то и $(\underline{CX},\underline{X})^{K}\in\mathscr{W}_m$.*

Так как при доказательстве этого утверждения мы использовали лишь тот факт, что пространства $(\underline{CX},\underline{X})^{K_1}$ и $(\underline{CX},\underline{X})^{K_2}$ являются надстройками, мы можем переформулировать следствие 6.13 в большей общности.

Следствие 6.14. *В предположениях теоремы 6.12 если в разложениях (5) пространств $(\underline{CX},\underline{X})^{K_1}$ и $(\underline{CX},\underline{X})^{K_2}$ можно снять надстройки, то в разложении пространства $(\underline{CX},\underline{X})^{K}$ также можно снять надстройки.*

В частности, условия следствия 6.13 выполнены, если комплексы $K_1$ и $K_2$ являются сдвинутыми, расщепимыми или секвенциально коэн-маколеевыми. Заметим, что получаемый в результате склейки комплекс $K$ может не быть сдвинутым, расщепимым или секвенциально коэн-маколеевым. С другой стороны, $K$ является гомологически наполнимым и гомотопически голодовым в каждом случае, поэтому, строго говоря, следствие 6.13 не дает новых комплексов, для которых полиэдральное произведение $(\underline{CX},\underline{X})^{K}$ лежит в классе $\mathscr{W}_m$. Тем не менее следствие 6.13 предоставляет простой и эффективный метод получения интересных примеров симплициальных комплексов, для которых $(\underline{CX},\underline{X})^{K}\in\mathscr{W}_m$.

В случае голодовых комплексов аналогичный результат был получен Лимонченко [36] путем комбинаторного анализа произведения в когомологиях.

Предложение 6.15. *В предположениях теоремы 6.12 если $K_1$ и $K_2$ являются голодовыми комплексами, то $K$ также является голодовым.*

Еще одним весьма интересным классом являются флаговые комплексы. Симплициальный комплекс $K$ называется *флаговым комплексом*, если каждая его недостающая грань (минимальная негрань) имеет две вершины. Эквивалентно, $K$ является флаговым комплексом, если любой набор вершин, попарно соединенных ребрами в $K$, порождает симплекс. В работе [26] показано, что $K$ является голодовым флаговым комплексом тогда и только тогда, когда его максимальные грани $I_1,\dots,I_s$ можно упорядочить таким образом, что $\left(\bigcup\limits_{j<k} I_j\right) \cap I_k$ является симплексом для любого $k = 1, \ldots, s$. Это означает, что комплекс $K$ получается последовательным приклеиванием симплексов вдоль общей грани. Тогда последовательное применение следствия 6.13 дает $(\underline{CX}, \underline{X})^K \in \mathscr{W}_m$. В частности, момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер.

Случай флаговых комплексов подробно изучен в [26], где для флаговых комплексов полностью описана связь между свойством Голода кольца Стенли–Райснера и свойством момент-угол-комплекса быть гомотопически эквивалентным букету сфер.

Теорема 6.16. *Пусть $K$ – флаговый комплекс и $\mathbf{k}$ – поле. Следующие условия эквивалентны*:

(a) *кольцо $\mathbf{k}[K]$ является голодовым*;
(b) *умножение в $H^*(\mathscr{Z}_K)$ тривиально*;
(c) *$\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер.*

Другое применение следствия 6.13 было получено в [29] в связи с конструкцией симплициального клина. Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Зафиксируем одну вершину $v_i$. Определим новый симплициальный комплекс $K(v_i)$, получаемый "удвоением" вершины $v_i$. Комплекс $K(v_i)$ имеет $m+1$ вершину $\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i+1}, \ldots, v_m\}$ и определяется формулой

$$K(v_i) = (v_{i,1}, v_{i,2}) * \operatorname{link}_K(v_i) \cup \{v_{i,1}, v_{i,2}\} * K \setminus v_i,$$

где $(v_{i,1}, v_{i,2})$ обозначает одномерный симплекс с вершинами $v_{i,1}$ и $v_{i,2}$. Симплициальный комплекс $K(v_i)$ называется *симплициальным клином* (англ. *simplicial wedge*) комплекса $K$ в вершине $v_i$. Эта комбинаторная конструкция иллюстрирует процедуру поляризации идеала Стенли–Райснера мультикомплекса (описанную Тревизаном [49]); такой идеал может содержать мономы со степенями. Пусть $J = (j_1, \ldots, j_m)$ – набор из $m$ положительных целых чисел и $n = \sum\limits_{i=1}^{m} j_i$. *Симплициальным мультиклином* $K(J)$ называется новый симплициальный комплекс на множестве из $n$ вершин

$$\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,j_1}, v_{2,1}, \ldots, v_{2,j_2}, \ldots, v_{m,1}, \ldots, v_{m,j_m}\},$$

получаемый последовательным применением операции симплициального клина, начиная с комплекса $K$. Оказывается, что порядок применения операций симплициального клина не влияет на получаемый в итоге комплекс, так что $K(J)$ определен корректно. Пусть $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ – набор из $n$ топологических пространств. Пусть $n_0 = 0$, для $1 \leqslant i \leqslant m$ положим $n_i = \sum\limits_{k=1}^{i} j_k$. Заметим, что $n_m = n$. Тогда набор из $n$ топологических пространств $X_1, \ldots, X_n$ можно записать в виде

$$X_{n_0+1}, \ldots, X_{n_1}, X_{n_1+1}, \ldots, X_{n_2}, X_{n_2+1}, \ldots, X_{n_{m-1}}, X_{n_{m-1}+1}, \ldots, X_{n_m}.$$

Определим

$$(\underline{C(*_J X)}, \underline{*_J X}) = \bigl\{(C(X_{n_{i-1}+1} * \dots * X_{n_i}), X_{n_{i-1}+1} * \dots * X_{n_i})\bigr\}_{i=1}^m.$$

Первое утверждение следующей теоремы было доказано в [29], а второе теперь вытекает из теорем 6.6 и 6.8.

Теорема 6.17. *Пусть даны симплициальный комплекс $K$ на $m$ вершинах, набор $J = (j_1, \dots, j_m)$ из $m$ положительных целых чисел и набор из $\sum_{i=1}^m j_i$ топологических пар $(CX_i, X_i)$, где каждый $X_i$ – конечный $CW$-комплекс. Тогда существует гомеоморфизм полиэдральных произведений*

$$(\underline{C(*_J X)}, \underline{*_J X})^K \to (\underline{CX}, \underline{X})^{K(J)}.$$

*Таким образом, если комплекс $K$ является гомологически наполнимым или гомотопически голодовым, то*

$$(\underline{CX}, \underline{X})^{K(J)} \simeq \Bigl(\bigvee_{I \notin K} |K_I| * \widehat{(*_J X)}^I\Bigr).$$

## 7. Минимально неголодовы комплексы и связные суммы произведений двух сфер

Как мы видели в предыдущих разделах, имеется хорошо изученная взаимосвязь между свойством голодовости кольца Стенли–Райснера $\mathbf{k}[K]$ над любым полем $\mathbf{k}$ и свойством соответствующего момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_K$ быть гомотопически эквивалентным букету сфер. Здесь мы покажем, что аналогичная взаимосвязь существует между другими свойствами кольца $\mathbf{k}[K]$ и момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_K$.

Симплициальный комплекс $K$ называется *голодовым* над полем $\mathbf{k}$, если его кольцо Стенли–Райснера $\mathbf{k}[K]$ является голодовым. Следующее определение было предложено в работе Берглунда и Йолленбека [9].

Определение 7.1. Пусть $K$ – симплициальный комплекс на $m$ вершинах. Для $1 \leqslant i \leqslant m$ положим $I_i = [m] \backslash \{i\}$. Тогда комплекс $K$ называется *минимально неголодовым*, если каждый полный подкомплекс $K_{I_i}$ является голодовым.

Важный класс примеров минимально неголодовых симплициальных комплексов порождается операцией срезки вершин простых многогранников. (*Выпуклым*) *многогранником* называется выпуклая оболочка конечного набора точек в $\mathbb{R}^n$. Размерность многогранника равна размерности его аффинной оболочки. Пусть $P$ – многогранник размерности $d$. *Гипергранью* многогранника $P$ называется его $(d-1)$-мерная грань. Многогранник $P$ размерности $d$ называется *простым*, если каждая его вершина лежит в точности в $d$ гипергранях. На гранях многогранника $P$ определено отношение частичного порядка по включению. Получаемое частично упорядоченное множество называется *частично упорядоченным множеством граней* многогранника $P$. Обратное частично упорядоченное множество, задаваемое обращением отношения включения граней, задает другой многогранник $P^*$, называемый *двойственным* к $P$. Если многогранник $P$ является простым, то $P^*$ является симплициальным комплексом. Обозначим через $\partial P$ границу многогранника $P$.

Определение 7.2. Пусть $P$ – простой многогранник размерности $d$ с множеством вершин $V(P)$. Будем говорить, что гиперплоскость $H$ в $\mathbb{R}^d$ срезает вершину $x$ многогранника $P$, если $x$ и $V(P) \setminus \{x\}$ лежат в разных открытых полупространствах относительно $H$. Пусть $Q$ – пересечение многогранника $P$ с замкнутым полупространством относительно $H$, содержащим множество $V(P) \setminus \{x\}$. Будем говорить, что многогранник $Q$ получается из $P$ *операцией срезки вершины* (см. рис. 2).

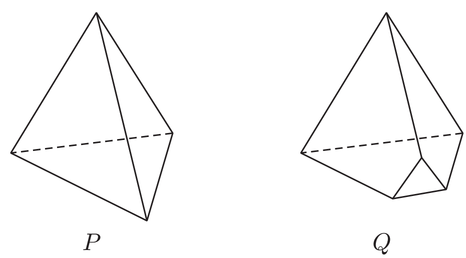


Рис. 2

Например, последовательная срезка $n$ вершин треугольника $\Delta^2$ дает $(n+3)$-угольник. В работе Берглунда и Йолленбека [9] показано, что если простой многогранник $P$ получен из $d$-мерного симплекса $\Delta^d$ последовательной срезкой вершин, то симплициальный комплекс $\partial P^*$ является минимально неголодовым независимо от порядка срезания вершин.

Снова возвращаясь к топологии (и геометрии), предположим, что простой многогранник $P$ получен из $\Delta^d$ последовательной срезкой $\ell - 1$ вершин. В работе [12] Босио и Мерссман, опираясь на более раннюю конструкцию Макгаврана [39], показали, что имеет место диффеоморфизм

$$\mathscr{Z}_{\partial P^*} \cong \mathop{\#}_{k=3}^{\ell+1} (S^k \times S^{\ell+2d-k})^{\#(k-2)\binom{\ell}{k-1}}, \tag{16}$$

где $(S^k \times S^{\ell+2d-k})^{\#n}$ обозначает связную сумму $n$ экземпляров многообразия $S^k \times S^{\ell+2d-k}$. В работе Гитлера и Лопеза де Медрано [24] доказано следующее обобщение этого результата: если $P$ получен из $\Delta^d$ последовательной срезкой вершин и $K = \partial P^*$, то для любой последовательности $J = (j_1, \dots, j_m)$ момент-угол-комплекс, соответствующий симплициальному мультиклину $K(J)$, диффеоморфен связной сумме произведений двух сфер.

Эти факты подсказывают нам, что (по аналогии с соответствием между свойством $K$ быть голодовым и свойством $\mathscr{Z}_K$ быть гомотопически эквивалентным букету сфер) может иметь место соответствие между следующими свойствами:

(i) $K$ является минимально неголодовым;

(ii) $\mathscr{Z}_K$ диффеоморфно связной сумме произведений двух сфер.

Ряд начальных результатов по этой проблеме уже получен, тем не менее здесь остается много открытых вопросов. Мы дадим краткое изложение известных результатов.

Так как свойства голодовости и минимальной неголодовости выражаются в терминах гомотопических свойств момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_K$, связную сумму также полезно рассмотреть с гомотопической точки зрения как результат приклеивания единственной клетки старшей размерности. Пусть $X$ и $Y$ – топологические пространства, получаемые приклеиванием одной старшей клетки размерности $n$ при помощи отображений $\alpha_X$ и $\alpha_Y$ соответственно. Тогда связная сумма $X \# Y$ является кослоем отображения

$$S^{n-1} \xrightarrow{\alpha_X+\alpha_Y} \overline{X} \vee \overline{Y},$$

где $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ суть $(n-1)$-мерные остовы пространств $X$ и $Y$ соответственно.

Таким образом, можно рассматривать более общее соответствие между комбинаторными и топологическими свойствами:

(i) $K$ является минимально неголодовым;

(ii) $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно связной сумме $X$ и $Y$, где $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ являются голодовыми.

В случае, когда $K$ является флаговым комплексом, такое соответствие является эквивалентностью [26].

Теорема 7.3. *Пусть $K$ – флаговый комплекс и $\mathbf{k}$ – поле. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) $K$ *является минимально неголодовым*;

(b) $\mathscr{Z}_K$ *гомотопически эквивалентно связной сумме произведений двух сфер*.

В действительности, если комплекс $K$ является флаговым и минимально неголодовым, то он является границей $n$-угольника с $n \geqslant 4$. Согласно [12] или [39] в этом случае момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ диффеоморфен связной сумме произведений двух сфер.

В работе [48] изучена взаимосвязь между гомотопическим типом момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_K$ в случае, когда $K$ представляет собой набор из $\ell$ точек, и топологическим типом (с точностью до диффеоморфизма) многообразия $\mathscr{Z}_K$ в случае, когда $K = \partial P^*$, где $P$ – простой многогранник, получаемый из симплекса $\Delta^d$ срезкой $\ell - 1$ вершин. Если $K$ есть набор из $\ell$ точек, то из (13) получаем

$$\mathscr{Z}_K \simeq \bigvee_{k=3}^{\ell+1} (S^k)^{\vee (k-2)\binom{\ell}{k-1}}, \tag{17}$$

где $(S^k)^{\vee n}$ обозначает букет $n$ экземпляров сферы $S^k$. Сравнивая формулы (16) и (17), видим, что размерности сфер соответствуют друг другу и биномиальные коэффициенты совпадают. Это совпадение не является случайным. Порядок, в котором срезаются вершины симплекса $\Delta^d$, не влияет на топологический тип соответствующего многообразия $\mathscr{Z}_K$ [12], так что можно выбрать более удобный порядок срезки. Если многогранник $P$ получен последовательной срезкой вершин симплекса, то его двойственным $P^*$ является так называемый *стековый* (англ. *stacked*) многогранник, который получается из симплекса $\Delta^d$ последовательным применением операции присоединения еще одного симплекса $\Delta^d$ вдоль общей гиперграни. В работе [48] выбран специальный порядок присоединения симплексов, который приводит к стековому многограннику $\mathscr{L}$ размерности $d$ со следующими свойствами.

Теорема 7.4. *Стековый многогранник $\mathscr{L}$ обладает следующими свойствами*:

(a) *имеет место гомотопическая эквивалентность $\mathscr{Z}_{\partial\mathscr{L}-\{1\}} \simeq \mathscr{Z}_{K_\ell}$, где $K_\ell$ – набор из $\ell$ точек*;

(b) *включение $\partial\mathscr{L} \setminus \{1\} \to \partial\mathscr{L}$ индуцирует отображение $\mathscr{Z}_{\partial\mathscr{L}\setminus\{1\}} \to \mathscr{Z}_{\partial\mathscr{L}}$, которое гомотопически эквивалентно отображению*

$$f\colon \bigvee_{k=3}^{\ell+1} (S^k)^{\wedge(k-2)\binom{\ell}{k-1}} \to \mathop{\#}_{k=3}^{\ell+1} (S^k \times S^{\ell+2d-k})^{\#(k-2)\binom{\ell}{k-1}};$$

(c) *отображение $f$ имеет левое гомотопически обратное $g$*;

(d) *будучи ограничено на слагаемое $H^*(S^k \times S^{\ell+2d-k})$ в когомологиях связной суммы, отображение $f^*$ обращается в нуль в точности на одной образующей кольца когомологий.*

В недавней работе Лимонченко [37] показано, что если $K = \partial P^*$ для простого многогранника $P$ и симплициальный комплекс $K$ является минимально неголодовым, то симплициальный мультиклин $K(J)$ также является минимально неголодовым для любой последовательности $J$. Это дает комбинаторный аналог результата Гитлера и Лопеза де Медрано о том, что многообразие $\mathscr{Z}_{K(J)}$ диффеоморфно связной сумме произведений сфер.

Мы закончим обзорную часть обсуждением трудностей, возникающих при описании взаимосвязей между утверждениями

1) $K$ является голодовым комплексом (т. е. $\mathbf{k}[K]$ является голодовым кольцом над любым полем $\mathbf{k}$),
2) $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно букету сфер,

а также утверждениями

3) $K$ является минимально неголодовым комплексом,
4) $\mathscr{Z}_K$ диффеоморфно связной сумме произведений двух сфер.

В работе [26] показано, что если $K$ есть минимальная шестивершинная триангуляция вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, то $K$ является голодовым комплексом, но $\mathscr{Z}_K$ не является гомотопически эквивалентным букету сфер. В действительности $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно букету сфер и пространства $\Sigma^7\mathbb{R}P^2$. Таким образом, помимо условия голодовости нужны дополнительные ограничения на кольцо Стенли–Райснера $\mathbb{Z}[K]$, чтобы обеспечить гомотопическую эквивалентность $\mathscr{Z}_K$ и букета сфер. При этом даже условие отсутствия кручения в гомологиях не является достаточным. В работе [37] показано, что если $L$ есть минимальная девятивершинная триангуляция комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, то $L$ является голодовым комплексом и не имеет кручения в целочисленных когомологиях любого полного подкомплекса, но тем не менее $\mathscr{Z}_K$ не является гомотопически эквивалентным букету сфер. В действительности $\mathscr{Z}_L$ гомотопически эквивалентно букету сфер и пространства $\Sigma^{10}\mathbb{C}P^2$. В [37] также показано, что эта проблема имеется и в случае минимальной неголодовости. Пусть $L'$ получен из $L$ добавлением одного четырехмерного симплекса вдоль трехмерной грани. Тогда $L'$ является минимально неголодовым и не имеет кручения в целочисленных когомологиях любого полного подкомплекса, но при этом многообразие $\mathscr{Z}_{L'}$ не является гомотопически эквивалентным связной сумме произведений сфер, так как в его когомологиях имеется нетривиальное тройное произведение Масси.

# Глава 2. Высшие произведения Уайтхеда в торической топологии

В этой главе мы рассматриваем отображение $\widetilde{w}$ в гомотопическом расслоении $\mathscr{Z}_K \xrightarrow{\widetilde{w}} DJ_K \to \prod_{i=1}^{m} \mathbb{C}P^\infty$ и отождествляем его с суммой высших и итерированных произведений Уайтхеда для некоторого класса симплициальных комплексов $K$.

## 8. Формулировка результатов

Как мы видели в главе 1, достигнут большой прогресс в изучении гомотопических типов момент-угол-комплексов $\mathscr{Z}_K$ и их надстроек. При этом, однако, не было попыток изучать отображение $\mathscr{Z}_K \to DJ_K$. Это означает, что имеющаяся интересная информация о момент-угол-комплексе $\mathscr{Z}_K$ не применялась для изучения пространства Дэвиса–Янушкевича $DJ_K$. Цель нашей работы – исправить это упущение. Мы покажем, что для некоторого класса симплициальных комплексов $K$ соответствующий момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер, причем гомотопическую эквивалентность можно выбрать таким образом, чтобы отображение $\mathscr{Z}_K \to DJ_K$ было составлено из явно описываемых наборов высших произведений Уайтхеда и итерированных произведений Уайтхеда. В частности, каждая недостающая грань комплекса $K$ дает нетривиальное высшее произведение Уайтхеда, сопряженное к которому имеет нетривиальный образ при гомоморфизме Гуревича в $H_*(\Omega DJ_K; \mathbb{Q})$.

В этой главе мы будем рассматривать в основном случай пространств $DJ_K$ и $\mathscr{Z}_K$, хотя некоторые из результатов будут верны и в более общей ситуации. В соответствии с этим введем новые обозначения. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ – набор линейно связных $CW$-комплексов с отмеченными точками; обозначим $\underline{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$. Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Определим

$$DJ_K(\underline{X}) = (\underline{X}, \underline{*})^K \quad \text{и} \quad \mathscr{Z}_K(\underline{X}) = (\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K.$$

В силу теоремы 5.5 существует гомотопическое расслоение

$$\mathscr{Z}_K(\underline{X}) \to DJ_K(\underline{X}) \to \prod_{i=1}^{m} X_i. \tag{18}$$

Если в последовательности $X_1, \ldots, X_m$ все пространства суть одно пространство $X$, то мы будем использовать обозначения $\mathscr{Z}_K(X)$ и $DJ_K(X)$. В случае $X_i = \mathbb{C}P^\infty$, $1 \leqslant i \leqslant m$, гомотопическое расслоение (18) сводится к наиболее интересному для торической топологии расслоению $\mathscr{Z}_K \to DJ_K \to \prod_{i=1}^{m} \mathbb{C}P^\infty$.

Гомологии пространства $\Omega DJ_K(\underline{X})$ с различными коэффициентами описаны для разных классов симплициальных комплексов. Некоторые простые, но важные примеры вычислений гомологий пространства $\Omega DJ_K(\underline{X})$ получены Лемером [35] в 1974 г., еще до появления понятий $\mathscr{Z}_K(\underline{X})$ и $DJ_K(\underline{X})$. В работе

Панова и Рэя [43] введен категорный формализм для описания гомологий пространства $\Omega DJ_K(\underline{X})$ и дано явное описание в случае, когда $K$ является флаговым комплексом. В работе Добринской [20] выработан общий подход к вычислению гомологий пространства $\Omega DJ_K(\underline{X})$ для произвольного симплициального комплекса $K$ в терминах гомологий пространств $\Omega(\underline{X})$ и некоторых специальных соотношений, происходящих из гомологий пространства $\Omega DJ_K(S^2)$. Тем не менее гомологии пространства $\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{X})$ остаются неизвестными.

В этой работе мы вначале рассмотрим случай, когда каждое из пространств $X_i$ является сферой. Мы будем использовать обозначение $\underline{S} = (S^{n_1+1}, \dots, S^{n_m+1})$. В качестве промежуточной цели при исследовании отображения $\mathscr{Z}_K \to DJ_K$ нам необходимо вычислить рациональные гомологии пространств $\Omega DJ_K(\underline{S})$ и $\Omega DJ_K$. При этом важно подчеркнуть, что в процессе вычисления мы будем помнить о геометрии пространств, т. е. использовать явные классы в образе гомоморфизма Гуревича. Известные модели для рациональных гомологий пространств петель не приспособлены для этого, поэтому нам придется построить нашу собственную модель. Разработанный нами метод позволяет проводить явные вычисления, и мы проиллюстрируем это на конкретных примерах.

Как обычно, $K$ будет обозначать симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Симплексы $\sigma \in K$ соответствуют последовательностям $(i_1, \dots, i_k)$, где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$ и $i_j$ – вершины комплекса $K$, лежащие в $\sigma$. Пусть $\dim\sigma = k-1$ – размерность симплекса $\sigma$. Мы будем рассматривать набор $MF(K)$ *недостающих граней* комплекса $K$. Последовательность $(i_1, \dots, i_k)$ лежит в $MF(K)$, если

1) $(i_1, \dots, i_k) \notin K$ и

2) любая собственная подпоследовательность в $(i_1, \dots, i_k)$ лежит в $K$.

Например, если $K$ есть симплициальный комплекс на четырех вершинах, изображенный на рис. 1, то $MF(K) = \{(3,4), (1,2,3), (1,2,4)\}$.

Определение 8.1. Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Будем говорить, что $K$ является *$MF$-комплексом*, если

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in MF(K)} |\partial\sigma|, \tag{19}$$

где $|K|$ и $|\partial\sigma|$ обозначают геометрические реализации комплексов $K$ и $\partial\sigma$ соответственно.

Граница квадрата дает пример симплициального комплекса, который не является $MF$-комплексом.

Класс $MF$-комплексов оказывается более широким, чем нужно, если мы хотим, чтобы для $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ и $\mathscr{Z}_K$ имело место разложение в букет. В разделе 9 мы дадим пример $MF$-комплекса $K$, для которого соответствующий момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ имеет нетривиальное умножение в когомологиях. Чтобы избавиться от таких примеров, мы добавим еще одно условие, касающееся структуры граней комплекса $K$.

Определение 8.2. Пусть $K$ есть $MF$-комплекс на множестве вершин $[m]$. Будем говорить, что $K$ является *направленным $MF$-комплексом*, если существует последовательность подкомплексов $\varnothing \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_l = K$ для некоторого $l$, где $K_i = K_{i-1} \cup \partial\sigma_i$ для $\sigma_i \in MF(K)$ и $K_{i-1} \cap \sigma_i$ является общей гранью для $K_{i-1}$ и $\sigma_i$.

Заметим, что симплициальный комплекс на рис. 1 является направленным $MF$-комплексом. Если же к нему добавить ребро $(3,4)$, то получится 1-остов тетраэдра, который является $MF$-комплексом, но не является направленным $MF$-комплексом. Другие примеры будут даны в разделе 9.

Момент-угол-комплексы $\mathscr{Z}_K$, соответствующие направленным $MF$-комплексам, раскладываются в букет сфер. В частности, все произведения и высшие произведения Масси $H^*(\mathscr{Z}_K)$ тривиальны. Мы выведем это как следствие одного свойства более общих пространств.

Теорема 8.3. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс на множестве вершин $[m]$. Положим $\underline{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$, где каждое $X_i$ является линейно связным топологическим пространством. Тогда $\mathscr{Z}_K(\underline{X})$ гомотопически эквивалентно букету пространств вида $\Sigma^t \Omega X_{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega X_{i_k}$ для различных $1 \leqslant t < m$ и последовательностей $(i_1, \dots, i_k)$, где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$.*

Следствие 8.4. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс на множестве вершин $[m]$. Тогда каждое из пространств $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ и $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно букету односвязных сфер.*

В качестве промежуточного шага мы вычислим алгебры $H_*(\Omega DJ_K(\underline{S}); \mathbb{Q})$ и $H_*(\Omega DJ_K; \mathbb{Q})$, используя модель Адамса–Хилтона, и явно опишем образ гомоморфизма Гуревича. Вначале введем некоторые обозначения. Для градуированного $\mathbb{Q}$-векторного пространства $V$ обозначим через $L\langle V\rangle$ свободную градуированную алгебру Ли на $V$, а через $UL\langle V\rangle$ ее универсальную обертывающую алгебру. Для пространства $V$ с базисом $\{v_1, \dots, v_m\}$ обозначим через $L_{ds}\langle v_1, \dots, v_m\rangle$ прямую сумму $\bigoplus_{i=1}^{m} L\langle v_i\rangle$. В частности, в $L_{ds}\langle v_1, \dots, v_m\rangle$ мы имеем $[v_i, v_j] = 0$ при $i \neq j$. Заметим, что если $v_i$ имеет четную степень, то $[v_i, v_i] = 0$, но такое соотношение отсутствует, если степень элемента $v_i$ нечетна. С другой стороны, если $v_i$ имеет нечетную степень, то в алгебре $UL\langle v_i\rangle$ имеется соотношение $[v_i, v_i] = 2v_i^2$, так что для элементов $v_i$ любой четности мы имеем $UL\langle v_i\rangle \cong \mathbb{Q}[v_i]$. Следовательно, $UL_{ds}\langle v_1, \dots, v_m\rangle \cong \bigotimes_{i=1}^{m} UL\langle v_i\rangle$. Если $L$ – алгебра Ли и $x_1, \dots, x_k \in L$, то мы будем обозначать итерированную скобку $[\dots[[x_1, x_2], x_3], \dots, x_k]$ через $[[x_1, x_2], \dots, x_k]$ .

Пусть $b_i$ – образ при гомоморфизме Гуревича сопряженного к координатному вложению $S^{n_i+1} \to DJ_K(\underline{S})$. В частности, мы будем обозначать через $b_i$ образ при гомоморфизме Гуревича сопряженного к композиции $S^2 \to \mathbb{C}P^\infty \to DJ_K$, где левое отображение является включением двумерного остова, а правое отображение является вложением по $i$-й координате. Через $u_\sigma$ мы будем обозначать образ при гомоморфизме Гуревича сопряженного к высшему произведению Уайтхеда, соответствующему недостающей грани $\sigma \in MF(K)$. Мы выразим алгебры $H_*(\Omega DJ_K(\underline{S}); \mathbb{Q})$ и $H_*(\Omega DJ_K; \mathbb{Q})$ как факторалгебры алгебры

$U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)$. Имеется различие между элементами $u_\sigma$ при $|\sigma|=2$ и при $|\sigma|>2$. Во втором случае $u_\sigma$ не зависит от $b_1,\dots,b_m$. С другой стороны, если $|\sigma|=2$, то $\sigma=(i_1,i_2)$ и $u_\sigma=[b_{i_1},b_{i_2}]$, т. е. $u_\sigma$ выражается через $b_1,\dots,b_m$. Это приводит к дополнительным соотношениям, задаваемым градуированным тождеством Якоби, и соотношениям в кольце граней. А именно, мы имеем

$$[u_\sigma,b_j]=[\,[b_{i_1},b_{i_2}],b_j]=[b_{i_1},[b_{i_2},b_j]\,]-(-1)^{|b_{i_1}|\,|b_{i_2}|}[b_{i_2},[b_{i_1},b_j]\,];$$

кроме того, если $(i_1,j)\in K$ или $(i_2,j)\in K$, то $[b_{i_1},b_j]=0$ или $[b_{i_2},b_j]=0$ соответственно. Все эти соотношения образуют идеал в алгебре

$$U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle),$$

который мы обозначим через $J$. Заметим, что если все недостающие грани $\sigma\in MF(K)$ имеют размерность больше 1, то идеал $J$ тривиален.

Теорема 8.5. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс. Тогда имеем изоморфизм алгебр*

$$H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Q})\cong U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)/J,$$

*где каждый элемент $u_\sigma$ является образом при гомоморфизме Гуревича сопряженного к высшему произведению Уайтхеда. Более того, отображение пространств петель $\Omega DJ_K(\underline{S})\to\prod_{i=1}^{m}\Omega S^{n_i+1}$ моделируется гомоморфизмом алгебр*

$$U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)/J \xrightarrow{U(\pi)} UL_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle,$$

*где $\pi$ – проекция.*

Пусть $\imath\colon S^2\to\mathbb{C}P^\infty$ – включение двумерного остова. Для любого симплициального комплекса $K$ мы имеем индуцированное отображение

$$DJ_k(\imath)\colon DJ_K(S^2)\to DJ_K.$$

Теорема 8.6. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс. Тогда имеем изоморфизм алгебр*

$$H_*(\Omega DJ_K;\mathbb{Q})\cong U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)/(I+J),$$

*где $u_\sigma$ есть образ при гомоморфизме Гуревича сопряженного с высшему произведению Уайтхеда, а $I$ есть идеал*

$$I=(b_i^2,[u_\sigma,b_{j_\sigma}]\mid 1\leqslant i\leqslant m,\ \sigma=(i_1,\dots,i_k)\in MF(K),\ j_\sigma\in\{i_1,\dots,i_k\}).$$

*Более того, существует коммутативная диаграмма алгебр*

$$\begin{array}{ccc}
H_*(\Omega DJ_K(S^2);\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\cong} & U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)/J\\
\Big\downarrow{\scriptstyle(\Omega DJ_K(\imath))_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q}\\
H_*(\Omega DJ_K;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\cong} & U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)/(I+J)
\end{array}$$

*где $q$ – проекция на факторалгебру.*

Заметим, что соотношение $b_i^2$ в идеале $I$ позволяет нам заменить алгебру Ли $L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle$ в утверждении теоремы 8.6 на алгебру Ли $L_{ab}\langle b_1,\dots,b_m\rangle$, где $L_{ab}$ обозначает свободную абелеву алгебру Ли, порожденную указанными элементами; все скобки в алгебре Ли $L_{ab}$ тождественно равны нулю.

Наши основные результаты относятся к теории гомотопий. Для $1\leqslant i\leqslant m$ пусть $a_i\colon S^{n_i+1}\to DJ_K(\underline{S})$ обозначает вложение по $i$-й координате. Аналог алгебраического идеала $J$ возникает, когда $\sigma=(i_1,i_2)$. В этом случае мы имеем произведение Уайтхеда $w_\sigma=[a_{i_1},a_{i_2}]$; как и в алгебраическом случае, это накладывает соотношения, задаваемые тождеством Якоби, и соотношения, происходящие из граней, а именно соотношения вида $[w_\sigma,a_j]$, где $(i_1,j)\in K$ и $(i_2,j)\in K$. При $|\sigma|=2$ пусть $W_\sigma$ обозначает набор всех независимых произведений Уайтхеда вида $[\,[w_\sigma,a_{j_1}],\dots,a_{j_l}]$, где $1\leqslant j_1\leqslant\dots\leqslant j_l\leqslant l$ и $1\leqslant l<\infty$.

Теорема 8.7. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс на множестве вершин $[m]$, т. е. имеется гомотопическая эквивалентность $\mathscr{Z}_K(\underline{S})\simeq\bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}}S^{t_\alpha}$. Эту гомотопическую эквивалентность можно выбрать таким образом, чтобы композиция*

$$\bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}}S^{t_\alpha}\to\mathscr{Z}_K(\underline{S})\to DJ_K(\underline{S})$$

*представляла собой букет следующих отображений:*

(a) *высшее произведение Уайтхеда $w_\sigma\colon S^{t_\sigma}\to DJ_K(\underline{S})$ для каждой недостающей грани $\sigma=(i_1,\dots,i_k)\in MF(K)$, где $t_\sigma=k-1+\sum_{j=1}^k n_{i_j}$;*

(b) *итерированное произведение Уайтхеда*

$$[\,[w_\sigma,a_{j_1}],\dots,a_{j_l}]\colon S^{t_\alpha}\to DJ_K(\underline{S})$$

*для каждого $\sigma\in MF(K)$ размерности больше 1 и каждой последовательности $1\leqslant j_1\leqslant\dots\leqslant j_l\leqslant l$, где $1\leqslant l<\infty$ и $t_\alpha=t_\sigma+\sum_{t=1}^{l}n_{j_t}$;*

(c) *набор независимых итерированных произведений Уайтхеда $W_\sigma$ для каждого $\sigma\in MF(K)$ размерности 1.*

Пусть $\widetilde{a}_i$ обозначает композицию отображений $\widetilde{a}_i\colon S^2\xrightarrow{\imath}\mathbb{C}P^\infty\to DJ_K$, где второе отображение является вложением по $i$-й координате. При $\sigma=(i_1,i_2)$ пусть $\widetilde{w}_\sigma$ обозначает произведение Уайтхеда $[\widetilde{a}_{i_1},\widetilde{a}_{i_2}]$. Как и выше, при $|\sigma|=2$ пусть $\widetilde{W}_\sigma$ обозначает набор всех независимых произведений Уайтхеда вида $[\,[\widetilde{w}_\sigma,\widetilde{a}_{j_1}],\dots,\widetilde{a}_{j_l}]$, где $1\leqslant j_1\leqslant\dots\leqslant j_l\leqslant l$ и $1\leqslant l<\infty$. Для $\sigma=(i_1,\dots,i_k)$ положим $J_\sigma=\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_k\}$.

Теорема 8.8. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс на множестве вершин $[m]$, т. е. имеется гомотопическая эквивалентность $\mathscr{Z}_K\simeq\bigvee_{\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{I}}}S^{t_{\widetilde{\alpha}}}$. Эту гомотопическую эквивалентность можно выбрать таким образом, чтобы композиция*

$$\bigvee_{\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{I}}}S^{t_{\widetilde{\alpha}}}\to\mathscr{Z}_K\to DJ_K$$

*представляла собой букет следующих отображений:*

(a) *высшее произведение Уайтхеда* $\widetilde{w}_\sigma\colon S^{2|\sigma|-1} \to DJ_K$ *для каждой недостающей грани* $\sigma \in MF(K)$;

(b) *итерированное произведение Уайтхеда*

$$[\,[\widetilde{w}_\sigma, \widetilde{a}_{j_1}], \ldots, \widetilde{a}_{j_l}]\colon S^{2|\sigma|+l-1} \to DJ_K$$

*для каждого* $\sigma \in MF(K)$ *размерности больше* 1 *и каждой последовательности* $j_1 < \cdots < j_l$ *в* $J_\sigma$, *где* $1 \leqslant l \leqslant m$;

(c) *набор независимых итерированных произведений Уайтхеда* $\widetilde{W}_\sigma$ *для каждого* $\sigma \in MF(K)$ *размерности* 1.

Хотя в этой работе нашей целью является описание отображения $\mathscr{Z}_K \to DJ_K$ в случае, когда $K$ есть направленный $MF$-комплекс, мы ожидаем, что наши результаты могут быть обобщены на более широкие классы симплициальных комплексов, а также на отображение общих полиэдральных произведений $\mathscr{Z}_K(\underline{X}) \to DJ_K(\underline{X})$.

## 9. Объекты изучения

В этом разделе мы проводим первичный анализ класса направленных $MF$-комплексов. Вначале мы сравниваем этот класс с другим классом симплициальных комплексов, который привлек большое внимание в связи с его ролью в построении разложений момент-угол-комплексов $\mathscr{Z}_K$ в букет. Затем мы получаем разложение в букет из теоремы 8.3 и следствие 8.4.

Напомним, что симплициальный комплекс $K$ на $n$ вершинах называется *сдвинутым*, если его вершины можно упорядочить таким образом, чтобы вместе с каждым симплексом $\sigma \in K$ в $K$ содержались все симплексы $(\sigma - v) \cup v'$, где $v' < v$. В работе [28] показано, что если $K$ – сдвинутый комплекс, то момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер. Более того, в [28] установлено, что если $K$ – сдвинутый комплекс, то полиэдральное произведение вида $(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})$ гомотопически эквивалентно букету надстроек. Этот результат затем был обобщен на произвольные полиэдральные произведения вида $(\underline{CX}, \underline{X})^K$ в работах [29], [32].

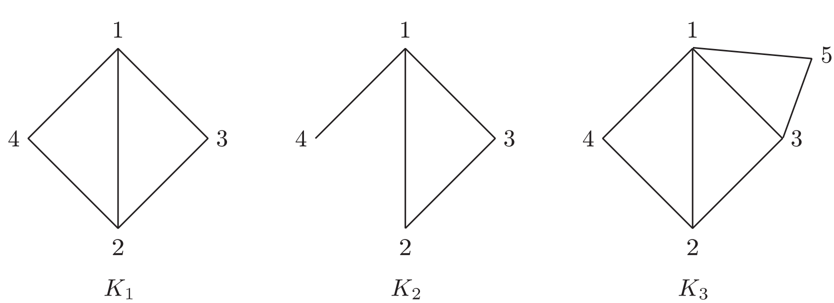


Рис. 3

Мы покажем, что классы направленных $MF$-комплексов и сдвинутых комплексов различны, но имеют нетривиальное пересечение. Обсудим три примера – см. рис. 3. Заметим, что $K_1$ и $K_2$ – сдвинутые комплексы, а комплекс $K_3$

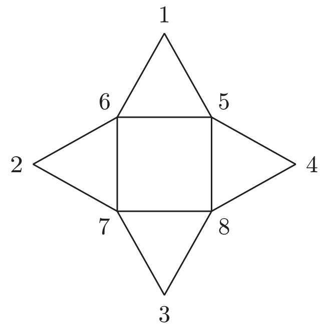


Рис. 4

не является сдвинутым. Наборы недостающих граней в каждом из случаев таковы:

$$MF(K_1) = \{(3,4),(1,2,3),(1,2,4)\};$$
$$MF(K_2) = \{(2,4),(3,4),(1,2,3)\};$$
$$MF(K_3) = \{(2,5),(3,4),(4,5),(1,2,3),(1,2,4),(1,3,5)\}.$$

Заметим, что $|K_1| = \bigcup\limits_{\sigma\in MF(K_1)} |\partial\sigma|$ и $|K_3| = \bigcup\limits_{\sigma\in MF(K_3)} |\partial\sigma|$. В то же время $\bigcup\limits_{\sigma\in MF(K_2)} |\partial\sigma| = |K_2 \setminus (1,4)|$. Кроме того, $K_1$ получается приклеиванием границы симплекса $(1,2,3)$ к границе симплекса $(1,2,4)$ вдоль общей грани $(1,2)$, а $K_3$ получается приклеиванием границы симплекса $(1,3,5)$ к $K_1$ вдоль общей грани $(1,3)$. Следовательно, $K_1$ является сдвинутым и в то же время направленным $MF$-комплексом, $K_2$ является сдвинутым, но не направленным $MF$-комплексом, а $K_3$ является направленным $MF$-комплексом, но не является сдвинутым.

Как отмечено в разделе 8, одномерный остов тетраэдра дает пример $MF$-комплекса, который не является направленным $MF$-комплексом. Тем не менее в этом случае теорема 8.3 и следствие 8.4 все равно имеют место (это следует из результатов работы [28]); в частности, момент-угол-комплекс $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер. Полезно также привести пример $MF$-комплекса, который не является направленным $MF$-комплексом и для которого теорема 8.3 и следствие 8.4 не выполнены. Пусть $K$ – симплициальный комплекс на восьми вершинах, изображенный на рис. 4. Заметим, что $K$ представляет собой объединение границ треугольников $\{(1,5,6),(2,6,7),(3,7,8),(4,5,8)\}$. Это означает, что $|K| = \bigcup\limits_{\sigma\in MF(K)} |\partial\sigma|$, т. е. $K$ является $MF$-комплексом. Тем не менее $K$ не является направленным $MF$-комплексом. Действительно, рассматривая $|K|$ как объединение границ четырех треугольников, мы можем приклеить второй треугольник к первому и третий к первым двум вдоль одной общей вершины, но четвертый треугольник приклеивается к первым трем вдоль двух вершин, которые не образуют общую грань. В этом случае наличие границы квадрата в $K$ приводит к нетривиальному умножению в когомологиях момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_K$, что означает, что $\mathscr{Z}_K$ не может быть букетом сфер.

Теперь обратимся к гомотопическому типу пространств $\mathscr{Z}_K(\underline{X})$ и $\mathscr{Z}_K$ в случае, когда $K$ является направленным $MF$-комплексом. Для большей ясности мы переформулируем теорему 8.3 и следствие 8.4.

Теорема 9.1. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс на множестве вершин $[m]$. Пусть $\underline{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$, где каждый $X_i$ является линейно связным $CW$-комплексом с отмеченной точкой. Тогда $\mathscr{Z}_K(\underline{X})$ гомотопически эквивалентно букету пространств вида $\Sigma^t \Omega X_{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega X_{i_k}$ для различных $1 \leqslant t < m$ и последовательностей $(i_1, \ldots, i_k)$, где $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$.*

Доказательство. Мы будем писать $Y \in \mathscr{W}$, если $Y$ является пространством, гомотопически эквивалентным букету пространств вида $\Sigma^t \Omega X_{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega X_{i_k}$ для различных $1 \leqslant t < m$ и последовательностей $(i_1, \ldots, i_k)$, где $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$. Для любой такой последовательности мы обозначим через $FW(i_1, \ldots, i_k)$ толстый букет в произведении $\prod_{j=1}^{k} X_{i_j}$. По определению гомотопическим слоем вложения

$$FW(i_1, \ldots, i_k) \to \prod_{j=1}^{k} X_{i_j}$$

является $\mathscr{Z}_K$, где $K = (\Delta^k)_{k-1} = \partial\sigma$. С другой стороны, согласно результату работы [45], этот гомотопический слой гомотопически эквивалентен пространству $\Sigma^{k-1} \Omega X_{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega X_{i_k}$. В частности, в любом $MF$-комплексе $|K| = \bigcup_{\sigma \in MF(K)} |\partial\sigma|$ мы имеем $\mathscr{Z}_{\partial\sigma} \in \mathscr{W}$ для любого $\sigma \in MF(K)$.

По определению, так как $K$ является направленным $MF$-комплексом, существует последовательность подкомплексов $\varnothing \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_l = K$, где $K_i = K_{i-1} \cup \partial\sigma_i$ для $\sigma_i \in MF(K)$ и $K_{i-1} \cap \sigma_i$ – общая грань для $K_{i-1}$ и $\sigma_i$. Мы проведем доказательство по индукции. Так как $K_1 = \partial\sigma_1$, мы имеем $\mathscr{Z}_{K_1} \in \mathscr{W}$ согласно рассуждению из предыдущего раздела. Теперь предположим, что $\mathscr{Z}_{K_{i-1}} \in \mathscr{W}$. Тогда комплекс $K_i$ получается склейкой комплексов $\partial\sigma_i$ и $K_{i-1}$ вдоль общей грани, причем $\mathscr{Z}_{\partial\sigma_i} \in \mathscr{W}$ согласно рассуждению из предыдущего раздела, а $\mathscr{Z}_{K_{i-1}} \in \mathscr{W}$ по предположению индукции. В этой ситуации мы имеем $Z_{K_i} \in \mathscr{W}$ согласно теореме 1.3 работы [28]. (На самом деле теорема 1.3 в [28] сформулирована для случая $X_i = \mathbb{C}P^\infty$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, но доказательство проходит без изменений и в общем случае.) Следовательно, мы заключаем по индукции, что $\mathscr{Z}_K(\underline{X}) = \mathscr{Z}_{K_l}$ лежит в $\mathscr{W}$. Теорема доказана.

Следствие 9.2. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс на множестве вершин $[m]$. Тогда пространство $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ гомотопически эквивалентно бесконечному букету односвязных сфер, а $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно конечному букету односвязных сфер.*

Доказательство. В теореме 8.3 положим $X_i = S^{n_i+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда мы получаем, что $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ гомотопически эквивалентно букету пространств вида $\Sigma^t \Omega S^{n_{i_1}+1} \wedge \cdots \wedge \Omega S^{n_{i_k}+1}$ для различных $1 \leqslant t < m$ и последовательностей $(i_1, \ldots, i_k)$. Согласно результату работы [34] существует гомотопическая эквивалентность $\Sigma \Omega S^{n_i+1} \simeq \bigvee_{j=1}^{\infty} S^{jn_i+1}$. Так как $S^{jn_i+1}$ является надстройкой, то, последовательно применяя эту гомотопическую эквивалентность, мы получим, что каждое слагаемое $\Sigma^t\Omega S^{n_{i_1}+1}\wedge\cdots\wedge\Omega S^{n_{i_k}+1}$ в букете гомотопически эквивалентно бесконечному букету односвязных сфер. Следовательно, $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ гомотопически эквивалентно бесконечному букету односвязных сфер.

Для доказательства второго утверждения мы положим $X_i=\mathbb{C}P^\infty$ для $1\leqslant i\leqslant m$ в теореме 8.3. Тогда мы получаем, что $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно букету пространств вида $\Sigma^t\Omega\mathbb{C}P^\infty_{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega\mathbb{C}P^\infty_{i_k}$ для различных $1\leqslant t<m$ и последовательностей $(i_1,\dots,i_k)$. Так как $\Omega\mathbb{C}P^\infty\simeq S^1$, каждое слагаемое $\Sigma^t\Omega\mathbb{C}P^\infty_{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega\mathbb{C}P^\infty_{i_k}$ в букете гомотопически эквивалентно сфере $S^{k+t}$. Поэтому $\mathscr{Z}_K$ гомотопически эквивалентно конечному букету односвязных сфер. Следствие доказано.

## 10. Высшие произведения Уайтхеда и толстые букеты

В этом разделе мы определим высшее произведение Уайтхеда при помощи толстого букета и опишем связь между недостающими гранями в $K$ и существованием нетривиальных высших произведений Уайтхеда в $DJ_K(\underline{X})$. Пусть $X_1,\dots,X_m$ – линейно связные пространства и $\underline{X}=\{X_1,\dots,X_m\}$. Толстый букет определяется как пространство

$$FW(\underline{X})=\{(x_1,\dots,x_m)\in X_1\times\cdots\times X_m\mid \text{по крайней мере один } x_i \text{ равен } *\}.$$

Рассмотрим гомотопическое расслоение, получаемое из включения толстого букета $FW(\underline{X})$ в произведение $X_1\times\cdots\times X_m$. Гомотопический тип гомотопического слоя был впервые описан в работе Портера [45], согласно которой существует гомотопическое расслоение

$$\Sigma^{m-1}\Omega X_1\wedge\cdots\wedge\Omega X_m\to FW(\underline{X})\to X_1\times\cdots\times X_m.$$

Этот результат можно переформулировать в терминах полиэдральных произведений. Пусть $K=\partial\Delta^{m-1}$ – граница $(m-1)$-мерного симплекса. Пусть $CY$ – приведенный конус над $Y$, определяемый как факторпространство $CY=[0,1]\times Y/{\sim}$, где $(0,y)\sim *$ и $(t,*)\sim *$. Заметим, что вершина конуса находится в точке 0. Имеется отображение пар $(C\Omega X_i,\Omega X_i)\to(X_i,*)$, переводящее $(s,\omega)\in C\Omega X_i$ в $\omega(s)$. Тогда, как в сущности следует из результатов [45], отображение $\Sigma^{m-1}\Omega X_1\wedge\cdots\wedge\Omega X_m\to FW(\underline{X})$ можно отождествить с отображением $(\underline{C\Omega X},\underline{\Omega X})^K\to(\underline{X},\underline{*})^K$.

Если каждое из пространств $X_i$ является надстройкой, т. е. $X_i=\Sigma Y_i$, то отображение надстройки $E\colon Y\to\Omega\Sigma Y$ индуцирует композицию

$$\phi_m\colon \Sigma^{m-1}Y_1\wedge\cdots\wedge Y_m\to\Sigma^{m-1}\Omega\Sigma Y_1\wedge\cdots\wedge\Omega\Sigma Y_m\to FW(\underline{\Sigma Y}).$$

Отображение $\phi_m$ есть приклеивающее отображение, которое определяет произведение пространств. Это означает, что мы имеем гомотопическое корасслоение

$$\Sigma^{m-1}Y_1\wedge\cdots\wedge Y_m\xrightarrow{\phi_m}FW(\underline{\Sigma Y})\to\Sigma Y_1\times\cdots\times\Sigma Y_m.$$

В случае $m=2$ мы имеем $FW(\underline{\Sigma Y})=\Sigma Y_1\vee\Sigma Y_2$, а $\phi_2$ является универсальным произведением Уайтхеда $[i_1,i_2]$, где $i_1$ и $i_2$ суть вложения пространств $\Sigma Y_1$

и $\Sigma Y_2$ соответственно в букет $\Sigma Y_1 \vee \Sigma Y_2$. Для любого пространства $Z$ и отображений $f\colon \Sigma Y_1 \to Z$ и $g\colon \Sigma Y_2 \to Z$ произведение Уайтхеда $[f,g]$ отображений $f$ и $g$ определяется как композиция $\Sigma Y_1 \wedge Y_2 \xrightarrow{\phi_2} \Sigma Y_1 \vee \Sigma Y_2 \xrightarrow{f \perp g} Z$, где $\perp$ обозначает букет отображений. В работе Портера [44] отображения $\phi_m$ при $m > 2$ были использованы как универсальные высшие произведения Уайтхеда.

Определение 10.1. Пусть $Y_1, \dots, Y_m$, $m \geqslant 2$, и $Z$ – линейно связные пространства и пусть заданы отображения $f_i\colon \Sigma Y_i \to Z$. Предположим, что букет $\bigvee_{i=1}^{m} \Sigma Y_i \to Z$ отображений $f_i$ продолжается до отображения $f\colon FW(\underline{\Sigma Y}) \to Z$ из толстого букета. Тогда *$m$-е высшее произведение Уайтхеда* отображений $f_1, \dots, f_m$ определяется как композиция

$$[f_1, \dots, f_m]\colon \Sigma^{m-1} Y_1 \wedge \dots \wedge Y_m \xrightarrow{\phi_m} FW(\underline{\Sigma Y}) \xrightarrow{f} Z.$$

При $m = 2$ произведение Уайтхеда двух отображений $f_1$ и $f_2$ всегда определено и гомотопический класс отображения $[f_1, f_2]$ однозначно определяется гомотопическими классами отображений $f_1$ и $f_2$. При $m > 2$ высшее произведение Уайтхеда $m$ отображений $f_1, \dots, f_m$ может не существовать, так как могут быть нетривиальные препятствия для продолжения данного отображения $\bigvee_{i=1}^{m} \Sigma Y_i \to Z$ до отображения из толстого букета $FW(\underline{\Sigma Y})$. Даже если такое продолжение существует, различные продолжения могут быть не эквивалентны, так что гомотопический класс отображения $[f_1, \dots, f_m]$ определяется гомотопическими классами отображений $f_1, \dots, f_m$, вообще говоря, не однозначно.

При $m = 2$ сопряженное отображение к произведению Уайтхеда $[f_1, f_2]$ гомотопно произведению Самельсона. Его образ в гомологиях есть коммутатор. Мы хотим получить аналогичные свойства для высших произведений Уайтхеда. Универсальным примером является сопряженное к отображению $\phi_m$, которое представляет собой отображение $\Sigma^{m-2} Y_1 \wedge \dots \wedge Y_m \to \Omega FW(\underline{\Sigma Y})$. Чтобы описать образ этого отображения при гомоморфизме Гуревича, необходимо иметь хорошую модель для кольца $H_*(\Omega FW(\underline{\Sigma Y}))$. Такая модель в случае, когда все $Y_i$ являются сферами, обсуждается в разделе 11.

Перед этим мы приведем общий результат, описывающий нетривиальные высшие произведения Уайтхеда в пространстве $DJ_K(\underline{\Sigma Y})$ для любого симплициального комплекса $K$. Коротко говоря, любой недостающей грани комплекса $K$ соответствует нетривиальное высшее произведение Уайтхеда, которое поднимается в $\mathscr{Z}_K(\underline{\Sigma Y})$. Далее мы будем рассматривать подпроизведения $\prod_{j=1}^{k} \Sigma Y_{i_j}$ в произведении $\prod_{i=1}^{m} \Sigma Y$. Для $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ мы обозначаем через $FW(\underline{\Sigma Y}, \sigma)$ толстый букет в подпроизведении $\prod_{j=1}^{k} \Sigma Y_{i_j}$.

Лемма 10.2. *Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Если $\sigma = (i_1, \dots, i_k) \in MF(K)$, то существуют отображения*

$$f_\sigma\colon FW(\underline{\Sigma Y}, \sigma) \to DJ_K(\underline{\Sigma Y}) \quad \text{и} \quad g_\sigma\colon \Sigma^{k-1} Y_{i_1} \wedge \dots \wedge Y_{i_k} \to \mathscr{Z}_K(\underline{\Sigma Y}),$$

*каждое из которых имеет левое гомотопически обратное, и коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{k-1}Y_{i_1}\wedge\dots\wedge Y_{i_k} \arrow[r, "\phi_k"] \arrow[d, "g_\sigma"] & FW(\underline{\Sigma Y}) \arrow[d, "f_\sigma"] \\
\mathscr{Z}_K(\underline{\Sigma Y}) \arrow[r] & DJ_K(\underline{\Sigma Y})
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Недостающей грани $\sigma\in MF(K)$ соответствует полный подкомплекс в $K$ на множестве вершин $\{i_1,\dots,i_k\}$. Поэтому для любого набора $(\underline{X},\underline{A})$ из $m$ пар $CW$-комплексов $(X_i,A_i)$ полиэдральное произведение $(\underline{X},\underline{A})^\sigma$ является ретрактом полиэдрального произведения $(\underline{X},\underline{A})^K$. Применяя это к отображению $(\underline{C\Omega\Sigma Y},\underline{\Omega\Sigma Y})\to(\underline{\Sigma Y},\underline{*})$, получаемому из отображений пар $(C\Omega\Sigma Y_i,\Omega\Sigma Y_i)\to(\Sigma Y_i,*)$, мы приходим к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{k-1}\Omega\Sigma Y_{i_1}\wedge\dots\wedge \Omega\Sigma Y_{i_k} \arrow[r] \arrow[d, "g'_\sigma"] & FW(\underline{\Sigma Y}) \arrow[d, "f_\sigma"] \\
\mathscr{Z}_K(\underline{\Sigma Y}) \arrow[r] & DJ_K(\underline{\Sigma Y})
\end{tikzcd}$$

где отображения $f_\sigma$ и $g'_\sigma$ имеют левые гомотопически обратные. Возьмем композицию отображений в диаграмме с отображением

$$\varepsilon\colon \Sigma^{k-1}Y_{i_1}\wedge\dots\wedge Y_{i_k}\to\Sigma^{k-1}\Omega\Sigma Y_{i_1}\wedge\dots\wedge\Omega\Sigma Y_{i_k},$$

индуцированным отображениями надстройки $Y_i\xrightarrow{E}\Omega\Sigma Y_i$. По определению отображение $\phi_k$ есть композиция отображения $\varepsilon$ с верхним горизонтальным отображением в предыдущей диаграмме. Поэтому гомотопически коммутативная диаграмма, существование которой утверждается в лемме, получается, если положить $g_\sigma=g'_\sigma\circ\varepsilon$.

Остается доказать, что отображение $g_\sigma$ имеет левое гомотопически обратное. Так как это верно для отображения $\Sigma E$, то отображение $\varepsilon$ имеет левое гомотопически обратное, как и отображение $g'_\sigma$. Следовательно, то же верно и для отображения $g_\sigma$. Лемма доказана.

## 11. Модели Адамса–Хилтона

Пусть $X$ – односвязный $CW$-комплекс конечного типа и $R$ – коммутативное кольцо. Модель Адамса–Хилтона [1] дает способ вычисления кольца $H_*(\Omega X;R)$. Одним из ее достоинств по сравнению с другими моделями кольца $H_*(\Omega X;R)$ является ее относительная простота, которая позволяет в некоторых случаях проводить явные вычисления. Эта модель описана в теореме 11.1.

Пусть $V$ – градуированный $R$-модуль и пусть $T(V)$ обозначает тензорную алгебру над $V$. Для данного пространства $X$ мы будем обозначать через $CU_*(X)$ комплекс кубических сингулярных цепей на $X$ с коэффициентами в $R$. Заметим, что имеется естественная цепная эквивалентность между цепным комплексом $CU_*(X)$ и комплексом симплициальных сингулярных цепей на $X$.

Если $X$ является гомотопически ассоциативным $H$-пространством, то умножение в $X$ индуцирует умножение в цепном комплексе $CU_*(X)$, тем самым задавая на нем структуру дифференциальной градуированной алгебры. Морфизм $A \to B$ дифференциальных градуированных алгебр называется *квазиизоморфизмом*, если он индуцирует изоморфизм в гомологиях.

Теорема 11.1. *Пусть $R$ – коммутативное кольцо и $X$ – односвязный $CW$-комплекс конечного типа. Модель Адамса–Хилтона для $X$ представляет собой дифференциальную градуированную $R$-алгебру $AH(X)$ со следующими свойствами*:

(a) *если* $X = \mathrm{pt} \cup \Bigl(\bigcup_{\alpha \in S} e_\alpha\Bigr)$ *– $CW$-разложение для $X$, то $AH(X) = T(V; d_V)$, где $V = \{b_\alpha\}_{\alpha \in S}$ и $|b_\alpha| = |e_\alpha| - 1$*;

(b) *дифференциал $d_V$ зависит от приклеивающих отображений $CW$-структуры на $X$*;

(c) *существует морфизм $\theta_X \colon AH(X) \to CU_*(\Omega X)$ дифференциальных градуированных алгебр, индуцирующий изоморфизм $H_*(AH(X)) \cong H_*(\Omega X; R)$.*

Заметим, что образующие алгебры $AH(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с клетками пространства $X$, со сдвигом на 1 по размерности. При этом дифференциал $d_V$ и квазиизоморфизм $\theta_X$ не определяются $CW$-структурой однозначно. Дифференциал $d_V$ и отображение $\theta_X$, приводящие к изоморфизму $H_*(AH(X)) \cong H_*(\Omega X; R)$, можно выбирать различными неэквивалентными способами. В этом смысле может существовать много различных моделей Адамса–Хилтона для $H_*(\Omega X; R)$. Можно пытаться строить более удобную модель. Мы дадим конструкцию одной удобной модели для пространств $X = DJ_K(\underline{S})$ или $DJ_K$ и кольца $R = \mathbb{Q}$, которая учитывает образы сопряженных к высшим произведениям Уайтхеда при гомоморфизме Гуревича.

Мы начнем с некоторых общих конструкций в случае пространств $DJ_K(S^2)$ и $DJ_K$, приводящих к модели Адамса–Хилтона, которая согласована с включением двумерного остова $S^2 \xrightarrow{\imath} \mathbb{C}P^\infty$. Эта модель затем будет обобщена на случай пространства $DJ_K(\underline{S})$ без привлечения сопутствующего отображения.

Для набора $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ положим $S^\sigma = \prod_{j=1}^{k} S^2_{i_j}$, где нижний индекс указывает на номер координаты, и пусть $DJ_K(S^2) = \bigcup_{\sigma \in K} S^\sigma$. Аналогично, рассматривая $\mathbb{C}P^\infty$ как $BT$ для $T = S^1$, мы по определению имеем $DJ_K = \bigcup_{\sigma \in K} BT^\sigma$, где $BT^\sigma = BT_{i_1} \times \dots \times BT_{i_k}$ и нижний индекс опять-таки указывает на номер координаты. Пусть $\imath^\sigma \colon S^\sigma \to BT^\sigma$ обозначает произведение отображений $\prod_{j=1}^{k} \imath$. Тогда отображение $DJ_K(\underline{S}) \xrightarrow{DJ_K(\imath)} DJ_K$ есть по определению отображение $\bigcup_{\sigma \in K} \imath^\sigma$.

Многие важные свойства моделей Адамса–Хилтона были доказаны в [1]; хороший обзор этих свойств дан в [3; п. 8.1]. Рассмотрим некоторые из них. Во-первых, модель Адамса–Хилтона для $CW$-подпространства может быть расширена до модели всего пространства. Применив это свойство к вложению $S^2 \xrightarrow{\imath} \mathbb{C}P^\infty$, мы получим продолжение модели Адамса–Хилтона с $S^2$ на $\mathbb{C}P^\infty$. Во-вторых, модель Адамса–Хилтона произведения $AH(X\times Y)$ можно выбрать таким образом, чтобы она была квазиизоморфна тензорному произведению $A(X)\otimes A(Y)$, причем это согласовано с квазиизоморфизмами $\theta_{X\times Y}$ и $\theta_X\otimes\theta_Y$ в соответствующие комплексы кубических сингулярных цепей. В нашем случае это позволяет, выбрав модель $AH(S^2)$ для $S^2$ и продолжив ее до модели $AH(\mathbb{C}P^\infty)$ для $\mathbb{C}P^\infty$, получить модель отображения $S^\sigma$ в $BT^\sigma$, которая с точностью до квазиизоморфизма совпадает с покоординатным отображением тензорного произведения $AH(S^2)^{\otimes\sigma}$ в $AH(\mathbb{C}P^\infty)^{\otimes\sigma}$. В-третьих, модели Адамса–Хилтона сохраняют копределы при условии выполнения некоторых условий когерентности. А именно, если $\{X_\alpha\}$ – семейство $CW$-подкомплексов в $X$, где $X=\bigcup\limits_\alpha X_\alpha$, и даны модели $AH(X_\alpha)$, удовлетворяющие условиям когерентности

$$d_{V_\alpha}\big|_{AH(X_\alpha\cap X_\beta)}=d_{V_\beta}\big|_{AH(X_\alpha\cap X_\beta)},\quad \theta_{X_\alpha}\big|_{AH(X_\alpha\cap X_\beta)}=\theta_{X_\beta}\big|_{AH(X_\alpha\cap X_\beta)}$$

для всех пар $(\alpha,\beta)$, то $\operatorname{colim}_\alpha AH(X_\alpha)$ будет моделью Адамса–Хилтона для $X$. В нашем случае мы имеем отображение $DJ_K(\underline{S})\xrightarrow{DJ_K(\imath)}DJ_K$, которое по определению совпадает с отображением

$$\bigcup_{\sigma\in K}S^\sigma\xrightarrow{\bigcup\limits_{\sigma\in K}\imath^\sigma}\bigcup_{\sigma\in K}BT^\sigma.$$

Заметим, что пересечение $S^{\sigma_1}\cap S^{\sigma_2}$ есть снова подпроизведение того же вида, а именно $S^{\sigma_1\cap\sigma_2}$. Аналогично, $BT^{\sigma_1}\cap BT^{\sigma_2}=BT^{\sigma_1\cap\sigma_2}$. Так как модели Адамса–Хилтона согласованы с произведениями, отсюда вытекает выполнение условий когерентности для $\bigcup\limits_{\sigma\in K}S^\sigma$, $\bigcup\limits_{\sigma\in K}BT^\sigma$ и для отображения $\bigcup\limits_{\sigma\in K}\imath^\sigma$. Поэтому мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{CD} AH(DJ_K(\underline{S})) @>{=}>> \operatorname*{colim}\limits_{\sigma\in K} AH(S^\sigma)\\ @V{AH(DJ_K(\imath))}VV @VV{\operatorname*{colim}\limits_{\sigma\in K} AH(\imath^\sigma)}V\\ AH(DJ_K) @>{=}>> \operatorname*{colim}\limits_{\sigma\in K} AH(BT^\sigma) \end{CD} \tag{20}$$

Здесь уместно сказать, что гомологии коммутируют с копределами, и описать алгебру гомологий $H_*(\Omega DJ_K(S^2);\mathbb{Q})$ как, скажем, $\operatorname{colim}_{\sigma\in K}H_*(\Omega S^\sigma;\mathbb{Q})$. Однако здесь возникает проблема: $AH(DJ_K(\underline{S}))$, вообще говоря, является некоммутативной дифференциальной градуированной алгеброй, а копределы таких объектов не коммутируют с гомологиями. Это связано с тем, что при переходе к копределу теряются высшие скобки, которые могут возникнуть из взаимодействия дифференциала и некоммутативного умножения. Вместо копредела необходимо рассматривать соответствующую конструкцию гомотопического копредела. Однако в случае направленных $MF$-комплексов имеется способ обойти эту проблему.

Для этого мы рассмотрим аналог диаграммы (20) в случае направленных $MF$-комплексов и толстых букетов. Чтобы различать толстые букеты, для каждого $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ будем обозначать через $FW(S^2, \sigma)$ толстый букет в произведении $\prod_{j=1}^{k} S^2_{i_j}$, где нижний индекс указывает на номер координаты. Далее, через $FW(\sigma)$ будем обозначать толстый букет в произведении $\prod_{j=1}^{k} \mathbb{C}P^{\infty}_{i_j}$. Пусть $\imath^{\sigma}\colon FW(S^2, \sigma) \to FW(\sigma)$ – отображение толстых букетов, индуцированное отображением $\imath$. Заметим, что

$$FW(S^2, \sigma) = \bigcup_{\tau \in (\Delta^k)_{k-1}} S^{\tau}, \quad FW(\sigma) = \bigcup_{\tau \in (\Delta^k)_{k-1}} BT^{\tau}.$$

Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс на $m$ вершинах, т. е. $K$ получается в результате последовательного приклеивания недостающих граней вдоль целых граней. Тогда

$$DJ_K(\underline{S}) = \bigcup_{\sigma \in MF(K)} FW(S^2, \sigma) = \bigcup_{\sigma \in MF(K)} \bigcup_{\tau \in (\Delta^k)_{k-1}} S^{\tau}.$$

Так как $K$ – направленный $MF$-комплекс, имеется последовательность подкомплексов $\varnothing \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_l = K$, где $K_i = K_{i-1} \cup \partial\sigma_i$ и $K_{i-1} \cap \partial\sigma_i$ – общая грань для $K_{i-1}$ и $\partial\sigma_i$. Пусть эта общая грань есть $(t_1, \ldots, t_l)$. Тогда имеется топологический (строгий) кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j=1}^{l} S^2_{t_j} \arrow[r] \arrow[d] & DJ_{K_{i-1}}(S^2) \arrow[d] \\
FW(S^2, \sigma_i) \arrow[r] & DJ_{K_i}(S^2)
\end{tikzcd}$$

Это означает, что пространства $DJ_{K_{i-1}}(S^2)$ и $FW(S^2, \sigma_i)$ склеиваются вдоль общего подпроизведения $\prod_{j=1}^{t} S^2_{t_j}$ в произведении $\prod_{i=1}^{n} S^2$. Этот кодекартов квадрат удовлетворяет условиям когерентности для модели Адамса–Хилтона. То же верно и для пространства $DJ_K$ и отображения $DJ_K(\iota)$. Поэтому в случае направленных $MF$-комплексов диаграмму (20) можно переписать в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
AH(DJ_K(\underline{S})) \arrow[r, "="] \arrow[d, "AH(DJ_K(\imath))"] & \operatorname{colim}_{\sigma \in MF(K)} AH(FW(S^2, \sigma)) \arrow[d, "\operatorname{colim}_{\sigma \in MF(K)} AH(\imath^{\sigma})"] \\
AH(DJ_K) \arrow[r, "="] & \operatorname{colim}_{\sigma \in MF(K)} AH(FW(\sigma))
\end{tikzcd} \tag{21}$$

Так как $K$ является направленным $MF$-комплексом, $K_i$ получается склейкой $K_{i-1}$ и $\partial\sigma_i$ вдоль общей грани. Поэтому модель Адамса–Хилтона $AH(DJ_{K_i})$

является свободным расширением дифференциальных алгебр $AH(DJ_{K_{i-1}})$ и $AH(FW(\sigma_i))$, а значит, диаграмма (21) является кофибрантной в смысле Риди (см. [43; разделы 3, 4]). Тогда в силу предложения 4.8 из [43] копределы в диаграмме (21) естественно слабо эквивалентны гомотопическим копределам. Так как гомотопические копределы дифференциальных градуированных алгебр коммутируют с гомологиями, мы получаем следующий результат.

Предложение 11.2. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс. Тогда существует коммутативная диаграмма алгебр*

$$\begin{tikzcd} H_*(\Omega DJ_K(S^2);\mathbb{Q}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\Omega DJ_K(\imath))_*"] & \operatorname*{colim}_{\sigma\in MF(K)} H_*(\Omega FW(S^2,\sigma);\mathbb{Q}) \arrow[d, "\operatorname*{colim}_{\sigma\in MF(K)}(\Omega\imath^\sigma)_*"] \\ H_*(\Omega DJ_K;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\cong"] & \operatorname*{colim}_{\sigma\in MF(K)} H_*(\Omega FW(\sigma);\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

Предложение 11.2 сводит задачу вычисления алгебр $H_*(\Omega DJ_K(S^2);\mathbb{Q})$ и $H_*(\Omega DJ_K;\mathbb{Q})$ к вычислению рациональных гомологий пространств петель на толстых букетах при условии, что соответствующая модель для толстого букета будет совместима с включениями подпроизведений. В нашем случае мы также хотим обеспечить выполнение дополнительного условия: чтобы гомологии пространств петель на толстых букетах “помнили” об образах при гомоморфизме Гуревича сопряженных к высшим произведениям Уайтхеда. Мы обсудим это в следующем разделе.

Заметим, что предыдущие рассуждения проходят и в более общем случае полиэдрального произведения $DJ_K(\underline{X})$, где $\underline{X}=\{X_1,\dots,X_m\}$. Нас особенно интересуют случаи $\underline{S}=\{S^{n_1+1},\dots,S^{n_m+1}\}$ (в частности, пространство $DJ_K(S^2)$) и $DJ_K$. В этих случаях при помощи наших моделей можно проводить явные вычисления. Мы проиллюстрируем это для $DJ_K(\underline{S})$ в разделе 13 и для $DJ_K$ в разделе 14. Для удобства дальнейших ссылок мы отдельно сформулируем утверждение в случае $\underline{S}$.

Предложение 11.3. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс. Тогда для пространства $DJ_K(\underline{S})$ существует модель Адамса–Хилтона вида*

$$AH(DJ_K(\underline{S}))=\operatorname*{colim}_{\sigma\in MF(K)} AH(FW(\sigma))$$

*и имеет место изоморфизм*

$$H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Q})\cong\operatorname*{colim}_{\sigma\in MF(K)} H_*(\Omega FW(\sigma);\mathbb{Q}).$$

## 12. Модель Адамса–Хилтона для толстого букета

Нашей целью является построение модели Адамса–Хилтона для толстого букета $FW(\underline{S})$ над $\mathbb{Q}$, которая была бы совместима с вложениями подпроизведений и “помнила” бы об образах при гомоморфизме Гуревича сопряженных к высшим произведениям Уайтхеда. Мы получим такую модель на основе конструкции Олдея минимальной модели Квиллена для $\pi_*(\Omega FW(\underline{S}))\otimes\mathbb{Q}$.

Начнем с некоторых общих утверждений, которые имеют место для любого линейно связного пространства $X$. Далее основным кольцом $R$ будет поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Заметим, что на гомотопических группах $\pi_*(X)$ имеется структура градуированной алгебры Ли с произведением Уайтхеда в качестве скобки. Эквивалентно, перейдя к сопряженным отображениям, получаем структуру градуированной алгебры Ли на $\pi_*(\Omega X)$, где скобкой является произведение Самельсона. В работе Квиллена [46] каждому пространству $X$ была поставлена в соответствие свободная дифференциальная градуированная алгебра Ли $\lambda(X)$ на $\mathbb{Q}$, для которой имеет место изоморфизм $H_*(\lambda(X)) \to \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$. Так как алгебра Ли $\lambda(X)$ свободна, мы можем записать ее в виде $L\langle V; d_V\rangle$ для некоторого градуированного $\mathbb{Q}$-модуля $V$ и дифференциала $d_V$ на $V$. Модель Квиллена $MQ(X)$ называется *минимальной*, если ее дифференциал обладает свойством $d(L\langle V\rangle) \subseteq [L\langle V\rangle, L\langle V\rangle]$.

В работе Олдея [2] дана явная конструкция минимальной модели Квиллена для $\pi_*(\Omega FW(\underline{S})) \otimes \mathbb{Q}$. Эта модель будет описана ниже в теореме 12.1, после того как мы введем некоторые обозначения. Клетки толстого букета $FW(\underline{S})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с последовательностями $(i_1, \dots, i_k)$, где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$ и $k < m$. Последовательность $(i_1, \dots, i_k)$ соответствует клетке старшей размерности в координатном подпространстве $S^{n_{i_1}+1} \times \dots \times S^{n_{i_k}+1}$ в $FW(\underline{S})$. Размерность этой клетки равна $\displaystyle\sum_{s=1}^{k}(n_{i_s}+1)$. Заметим, что условие $k < m$ исключает лишь одну последовательность $(1, \dots, m)$, соответствующую клетке старшей размерности в полном произведении $S^{n_1+1} \times \dots \times S^{n_m+1}$. Минимальная модель Олдея для $\pi_*(\Omega FW(\underline{S})) \otimes \mathbb{Q}$ имеет вид

$$MQ(FW(\underline{S})) = L\langle V; d_V\rangle,$$

где $V$ имеет по одной образующей $b_I$ для каждой последовательности $I = (i_1, \dots, i_k)$ с $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$ и $k < m$, а размерность $b_I$ равна

$$\sum_{s=1}^{k}(n_{i_s}+1) - 1.$$

Аналогично, минимальная модель для $\pi_*\left(\Omega \prod_{i=1}^{m} S^{n_i+1}\right) \otimes \mathbb{Q}$ имеет вид

$$MQ\left(\prod_{i=1}^{m} S^{n_i+1}\right) = L\langle W; d_W\rangle,$$

где $W$ имеет по одной образующей $b_I$ для каждой последовательности $I = (i_1, \dots, i_k)$ с $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$, а размерность $b_I$ равна $\displaystyle\sum_{s=1}^{k}(n_{i_s}+1) - 1$.

Теперь опишем дифференциалы $d_V$ и $d_W$. Зафиксируем последовательность $I = (i_1, \dots, i_k)$, где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$ и $k \geqslant 2$. При $k < m$ эта последовательность соответствует образующей $b_I$ $\mathbb{Q}$-модуля $V$, а при $k \leqslant m -$

образующей $b_I$ $\mathbb{Q}$-модуля $W$. В каждом из этих случаев размерность $b_I$ есть $|b_I| = \left(\sum_{s=1}^{k} n_{i_s} + 1\right) - 1$. Пусть $\mathscr{S}_I$ – набор всех перетасовок $(J, J')$ множества $\{i_1, \ldots, i_k\}$ со свойством $j_1 = 1$ (это так называемые перетасовки типа II по отношению к 1). Для каждой $(r, s)$-перетасовки $(J, J')$ множества $\{1, \ldots, k\}$ обозначим через $\varepsilon(J, J') \in \{0, 1\}$ число, задаваемое равенством $z_{i_1} \cdots z_{i_k} = (-1)^{\varepsilon(J,J')} z_{j_1} \cdots z_{j_r} z_{j'_1} \cdots z_{j'_s}$ в рациональной градуированно коммутативной алгебре, порожденной элементами $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$ с $|z_{i_t}| = n_{i_t} + 1$ при $1 \leqslant t \leqslant k$. Положим

$$a_I = - \sum_{(J,J') \in \mathscr{S}_{\mathscr{I}}} (-1)^{|b_I| + \varepsilon(J,J')} [b_J, b_{J'}]$$

и $b = b_{(1,\ldots,m)}$, $a = a_{(1,\ldots,m)}$.

Теорема 12.1. *Существуют минимальные модели Квиллена $L\langle V; d_V\rangle$ и $L\langle W; d_W\rangle$ для $\pi_*(\Omega FW(\underline{S})) \otimes \mathbb{Q}$ и $\pi_*\left(\prod_{i=1}^{n} \Omega S^{m_i+1}\right) \otimes \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$-модули $V$ и $W$ определены выше, а дифференциалы обладают следующими свойствами*:

(a) $W = V \oplus \{b\}$;

(b) $d_V(b_I) = 0$ *при* $I = (i)$, *где* $1 \leqslant i \leqslant m$;

(c) $d_V(b_I) = a_I$ *при* $I = (i_1, \ldots, i_k)$, *где* $2 \leqslant k < m$;

(d) *ограничение* $d_W$ *на* $V$ *есть* $d_V$;

(e) $d_W(b) = a$;

(f) *сопряженное отображение к высшему произведению Уайтхеда* $S^{|b|-1} \xrightarrow{\phi_m} FW(\underline{S})$, *которое приклеивает старшую клетку в произведении* $\prod_{i=1}^{m} S^{n_i+1}$, *гомотопно* $a$.

Имеется явное отображение $\alpha\colon L\langle V\rangle \to \pi_*(\Omega FW(\underline{S}))$, задаваемое следующим образом. Возьмем образующую $b_I \in V$, где $I = (i_1, \ldots, i_k)$. Она соответствует старшей клетке в координатном подпространстве $S^{n_{i_1}+1} \times \cdots \times S^{n_{i_k}+1}$ в $FW(\underline{S})$. Пусть $FW(i_1, \ldots, i_k)$ – толстый букет в $S^{n_{i_1}+1} \times \cdots \times S^{n_{i_k}+1}$. Зададим $\alpha(b_I)$ как сопряженное к композиции отображений

$$S^{|b_I|-1} \xrightarrow{\phi_k} FW(i_1, \ldots, i_k) \to \prod_{j=1}^{k} S^{n_{i_j}+1} \to FW(\underline{S}),$$

где последние два отображения являются естественными вложениями. Теперь продолжим $\alpha$ на $L\langle V\rangle$, используя тот факт, что $\pi_*(\Omega FW(\underline{S})) \otimes \mathbb{Q}$ есть алгебра Ли относительно скобки Самельсона. Результат Олдея о том, что $L\langle V; d_V\rangle$ является минимальной моделью Квиллена для $\pi_*(\Omega FW(\underline{S})) \otimes \mathbb{Q}$, состоит из двух утверждений: во-первых, $\alpha$ является не только отображением алгебр Ли, но и отображением дифференциальных градуированных алгебр Ли, где дифференциал в $\pi_*(\Omega FW(\underline{S}))\otimes\mathbb{Q}$ нулевой, и, во-вторых, это отображение дифференциальных градуированных алгебр Ли индуцирует изоморфизм в гомологиях. Аналогичная конструкция имеет место и для произведения $\prod_{i=1}^{m} S^{n_i+1}$.

Теперь мы осуществим переход от минимальной модели Квиллена к модели Адамса–Хилтона. В общей ситуации, заметим, что гомоморфизм Гуревича $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}\to H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ раскладывается в композицию отображений

$$\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}\xrightarrow{c} CU_*(\Omega X)\xrightarrow{h} H_*(\Omega X;\mathbb{Q}),$$

где $CU_*(\Omega X)$ есть комплекс кубических цепей с коэффициентами в $\mathbb{Q}$, отображение $c$ есть канонический гомоморфизм в кубические сингулярные цепи, а $h$ есть проекция на гомологии цепного комплекса. Заметим, что $h$ является гомоморфизмом алгебр. Пусть $MQ(X)$ – минимальная модель Квиллена для $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$, т. е. имеется гомоморфизм дифференциальных градуированных алгебр Ли $\alpha\colon MQ(X)=L\langle V_X;d_{V_X}\rangle\to\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$, индуцирующий изоморфизм в гомологиях. Так как $CU_*(\Omega X)$ является дифференциальной градуированной алгеброй, композиция $c\circ\alpha$ продолжается до гомоморфизма $\theta_X: UL\langle V_X;d_{V_X}\rangle\to CU_*(\Omega X)$ дифференциальных градуированных алгебр. Следовательно, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
L\langle V_X;d_{V_X}\rangle \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & UL\langle V_X;d_{V_X}\rangle \arrow[d, "\theta_X"] & \\
\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q} \arrow[r, "c"] & CU_*(\Omega X) \arrow[r, "h"] & H_*(\Omega X;\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

где $i$ – вложение. По теореме Милнора–Мура (см. [41])

$$H_*(\Omega X;\mathbb{Q})\cong U(\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}),$$

т. е. алгебра $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ изоморфна универсальной обертывающей для алгебры Ли $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$, а изоморфизм индуцирован гомоморфизмом Гуревича. С другой стороны, $h$ является гомоморфизмом дифференциальных градуированных алгебр, если считать, что дифференциал в $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ нулевой. Следовательно, $h\circ\theta_X$ также является гомоморфизмом дифференциальных градуированных алгебр, а значит, он задается своим ограничением на множество образующих $V$. Из коммутативности диаграммы следует, что $h\circ\theta_X\big|_V=h\circ c\circ\alpha\big|_V=:q$. Следовательно, $h\circ\theta_X=U(q)$, откуда вытекает, что гомоморфизм $h\circ\theta_X$ индуцирует изоморфизм в рациональных гомологиях. Таким образом, $UL\langle V_X;d_{V_X}\rangle$ вместе с квазиизоморфизмом $\theta_X$ задает модель Адамса–Хилтона для $X$.

В нашем случае мы получаем модели Адамса–Хилтона $(UL\langle V;d_V\rangle,\theta_{FW})$ и $(UL\langle W;d_W\rangle,\theta_{\Pi})$ для пространств $FW(\underline{S})$ и $\prod_{i=1}^{m} S^{n_i+1}$ соответственно. Таким образом, из теоремы 12.1 вытекает следующий результат.

Теорема 12.2. *Модели Адамса–Хилтона*

$$AH(FW(\underline{S})) = (UL\langle V; d_V\rangle, \theta_{FW}), \quad AH\left(\prod_{i=1}^{m} S^{n_i+1}\right) = (UL\langle W; d_W\rangle, \theta_{\Pi})$$

*обладают следующими свойствами*:

(a) $W = V \oplus \{b\}$;

(b) $d_V(b_I) = 0$ *при* $I = (i)$, *где* $1 \leqslant i \leqslant m$;

(c) $d_V(b_I) = a_I$ *при* $I = (i_1, \ldots, i_k)$, *где* $2 \leqslant k < m$;

(d) *ограничение* $d_W$ *на* $AH(FW(\underline{S}))$ *есть* $d_V$;

(e) $d_W(b) = a$;

(f) *элемент* $a$ *является образом при "гомоморфизме Гуревича", задаваемом сопряженным к высшему произведению Уайтхеда* $S^{|b|-1} \xrightarrow{\phi_m} FW(\underline{S})$, *которое является приклеивающим отображением для старшей клетки в произведении* $\prod_{i=1}^{m} S^{n_i+1}$.

Замечание 12.3. Содержащееся в теореме 12.2 индуктивное определение дифференциала $d_V$ в минимальной модели Квиллена $L\langle V; d_V\rangle$ для $FW(\underline{S})$ показывает, что этот дифференциал согласован с включениями подпроизведений. Поэтому то же верно и для $UL\langle V; d_V\rangle$. Более того, именно с этим дифференциалом $d_V$ гомоморфизм $\alpha$ становится гомоморфизмом дифференциальных градуированных алгебр. Поэтому как $\alpha$, так и продолжающий его квазиизоморфизм $\theta_{FW}$ согласованы с включениями подпроизведений.

Помимо индуктивной природы описываемой модели Адамса–Хилтона, в теореме 12.2 явно описывается образ при "гомоморфизме Гуревича" сопряженного к высшему произведению Уайтхеда $\phi_m$. Мы заключили слова "гомоморфизм Гуревича" в кавычки, так как этот образ является элементом в модели Адамса–Хилтона, в то время как настоящий образ при отображении Гуревича получается после перехода к гомологиям. А именно, элемент $a$ является циклом в $AH(FW(\underline{S}))$ и этот цикл мог бы оказаться границей. Однако на практике этого не происходит. Заметим, что имеется последовательность изоморфизмов

$$H_*(AH(FW(\underline{S}))) \cong H_*(UL\langle V; d_V\rangle) \cong U(H_*(L\langle V; d_V\rangle)),$$

так как гомологии коммутируют с функтором универсальной обертывающей алгебры. Для вычисления гомологий $H_*(L\langle V; d_V\rangle)$ мы используем элегантный подход из работы Бубеника [13], где применяются некоторые дополнительные модели алгебр Ли. Это описано в теореме 12.4 ниже, которая сформулирована в терминах универсальной обертывающей, а не алгебры Ли, так как нашей главной целью является описание алгебры $H_*(\Omega FW(\underline{S}); \mathbb{Q})$. Вначале введем некоторые обозначения. Пусть $b_i$ – образующая в $V$ (или в $W$), соответствующая одночленной последовательности $I = (i)$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Эта образующая $b_i$ соответствует клетке $S^{n_i+1}$ в произведении $S^{n_1+1} \times \cdots \times S^{n_m+1}$. Положим $N = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i + 1\right) - 2$. Напомним, что в разделе 8 мы ввели обозначение

$L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle=\bigoplus_{i=1}^{m}L\langle b_i\rangle$. Заметим, что

$$H_*\Big(AH\Big(\prod_{j=1}^{k}S^{n_j+1}\Big)\Big)\cong UL_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle.$$

Теорема 12.4. *При $m\geqslant 3$ имеют место изоморфизмы алгебр*

$$H_*(\Omega FW(\underline{S});\mathbb{Q})\cong H_*(AH(FW(\underline{S})))\cong U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle\coprod L\langle u\rangle),$$

*где элемент $u$ имеет степень $N$ и является образом при гомоморфизме Гуревича сопряженного к высшему произведению Уайтхеда $\phi_m$. Более того, вложение пространств петель $\Omega FW(\underline{S})\to\prod_{i=1}^{m}\Omega S^{n_i+1}$ моделируется гомоморфизмом алгебр*

$$U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle\coprod L\langle u\rangle)\xrightarrow{U(\pi)}UL_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle,$$

*где $\pi$ – проекция.*

Заметим, что само по себе вычисление алгебры $H_*(\Omega FW(\underline{S});\mathbb{Q})$ не является новым, так как оно было впервые проведено в работе Лемера [35]. Новым в теореме 12.4 является описание образа при гомоморфизме Гуревича сопряженного к высшему произведению Уайтхеда $\phi_m$.

Замечание 12.5. При $m=2$ мы имеем $FW(\underline{S})=S^{n_1+1}\vee S^{n_2+1}$ и хорошо известно, что

$$H_*(\Omega FW(\underline{S});\mathbb{Q})\cong H_*(\Omega(S^{n_1+1}\vee S^{n_2+1});\mathbb{Q})\cong UL\langle b_1,b_2\rangle.$$

В этом случае $\phi_2$ является обычным произведением Уайтхеда, а образом при гомоморфизме Гуревича его сопряженного является коммутатор $u=[b_1,b_2]$. В этом случае алгебру Ли $L\langle b_1,b_2\rangle$ можно рассматривать как факторалгебру алгебры Ли $L_{ds}\langle b_1,b_2\rangle\coprod L\langle u\rangle$, по соотношениям Якоби на скобки вида $[u,-]=[\,[b_1,b_2],-]$.

## 13. Свойства пространств петель на полиэдральных произведениях для направленных $MF$-комплексов

В этом разделе мы явно вычислим алгебру $H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Q})$ в случае, когда $K$ является направленным $MF$-комплексом, и тем самым докажем теорему 8.5. Затем это вычисление будет использовано вместе с гомотопическим расслоением

$$\mathscr{Z}_K(\underline{S})\xrightarrow{f}DJ_K(\underline{S})\xrightarrow{g}\prod_{i=1}^{m}S^{n_i+1}$$

для вычисления алгебры $H_*(\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S});\mathbb{Q})$. Мы также построим гомотопическое разложение пространства $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ в букет сфер и опишем отображение $\mathscr{Z}_K(\underline{S})\to DJ_K(\underline{S})$ в терминах высших произведений Уайтхеда и итерированных произведений Уайтхеда, что даст доказательство теоремы 8.7.

Замечание 13.1. Для упрощения обозначений далее до конца раздела 14 мы предполагаем, что в данном $MF$-комплексе $K$ все недостающие грани $\sigma \in MF(K)$ удовлетворяют условию $|\sigma| > 2$. В этом случае мы можем непосредственно применять теорему 12.4. Если $|\sigma| = 2$ для некоторого $\sigma = (i_1, i_2) \in MF(K)$, то наши вычисления нужно видоизменить, рассматривая алгебру Ли $L\langle b_{i_1}, b_{i_2}\rangle$ как $L_{ds}\langle b_{i_1}, b_{i_2}\rangle \coprod L\langle u\rangle$, где $u = [b_{i_1}, b_{i_2}]$ (см. замечание 12.5), и вводя идеал $J$, описанный в разделе 8.

Итак, вычислим алгебру $H_*(\Omega DJ_K(\underline{S}); \mathbb{Q})$, используя модель Адамса–Хилтона

$$AH(DJ_K(\underline{S})) = \operatorname*{colim}_{\sigma \in MF(K)} AH(FW(\sigma))$$

и предложение 11.3. Пусть $b_1, \ldots, b_m$ – образующие в $AH(DJ_K(\underline{S}))$, соответствующие клеткам $S^{n_1+1}, \ldots, S^{n_m+1}$. Заметим, что если $\sigma = (i_1, \ldots, i_k) \in K$, то набор $\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\}$ соответствует клеткам $S^{n_i+1}$, лежащим в $FW(\sigma)$. Положим $N_\sigma = \left(\sum_{j=1}^{k} n_{i_j} + 1\right) - 2$. Из теоремы 12.4 вытекает изоморфизм

$$H_*(AH(FW(\sigma))) \cong U(L_{ds}\langle b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\rangle \coprod L\langle u_\sigma\rangle),$$

где $u_\sigma$ – образ при гомоморфизме Гуревича сопряженного к высшему произведению Уайтхеда $S^{N_\sigma+1} \to FW(\sigma)$.

Теперь мы дадим доказательство теоремы 8.5 в приводимой ниже формулировке, в которой выполнено упрощающее предположение из замечания 13.1.

Теорема 13.2. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс, в котором $|\sigma| > 2$ для любого $\sigma \in MF(K)$. Тогда имеет место изоморфизм алгебр*

$$H_*(\Omega DJ_K(\underline{S}); \mathbb{Q}) \cong U(L_{ds}\langle b_1, \ldots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle),$$

*где каждый элемент $u_\sigma$ является образом при гомоморфизме Гуревича сопряженного к высшему произведению Уайтхеда. Более того, отображение пространств петель $\Omega DJ_K(\underline{S}) \to \prod_{i=1}^{m} \Omega S^{n_i+1}$ моделируется гомоморфизмом алгебр*

$$U(L_{ds}\langle b_1, \ldots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)/J \xrightarrow{U(\pi)} UL_{ds}\langle b_1, \ldots, b_m\rangle,$$

*где $\pi$ – проекция.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку изоморфизмов

$$\begin{aligned}
H_*(\Omega DJ_K(\underline{S}); \mathbb{Q}) &\cong H_*(AH(DJ_K(\underline{S})) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{\sigma \in MF(K)} H_*(AH(FW(\sigma))) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{\sigma \in MF(K)} U(L_{ds}\langle b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\rangle \coprod L\langle u_\sigma\rangle) \\
&\cong U\left(\operatorname*{colim}_{\sigma \in MF(K)} L_{ds}\langle b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\rangle \coprod L\langle u_\sigma\rangle\right) \\
&\cong U(L_{ds}\langle b_1, \ldots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle). \qquad (22)
\end{aligned}$$

Первый изоморфизм имеет место, так как $AH(DJ_K(\underline{S}))$ является моделью Адамса–Хилтона. Второй изоморфизм следует из предложения 11.3. Третий изоморфизм вытекает из теоремы 12.4. Что касается четвертого изоморфизма, то, как было указано в замечании 12.3, в случае направленных $MF$-комплексов (когда недостающие грани приклеиваются вдоль общих граней, которые топологически соответствуют подпроизведениям в $DJ_K(\underline{S})$) вычисление

$$H_*(AH(FW(\sigma))) \cong U(L_{ds}\langle b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\rangle)$$

согласовано с включением подпроизведений. Поэтому как соответствующие алгебры Ли, так и их универсальные обертывающие выдерживают переход к копределу по $MF(K)$, так что имеет место четвертый изоморфизм. Если мы докажем, что имеет место пятый изоморфизм, то цепочка (22) даст нам изоморфизм из формулировки теоремы. Утверждение об образах при гомоморфизме Гуревича вытекает из соответствующего утверждения в теореме 12.4. Утверждение о модели для отображения пространств петель $\Omega DJ_K(\underline{S}) \to \prod_{i=1}^{m} \Omega S^{n_i+1}$ опять-таки следует из замечания 12.3 о согласованности копредела с включением подпроизведений.

Итак, докажем пятый изоморфизм в цепочке (22). Это в действительности является утверждением об алгебрах Ли, так что мы установим изоморфизм

$$\operatorname*{colim}_{\sigma\in MF(K)} L_{ds}\langle b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\rangle \coprod L\langle u_\sigma\rangle \cong L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle.$$

Так как множество $MF(K)$ недостающих граней в $K$ конечно, копредел можно записать как свободное копроизведение по модулю некоторых соотношений. Мы будем писать $L_{ds}\langle b^\sigma_{i_1}, \dots, b^\sigma_{i_k}\rangle \coprod L\langle u_\sigma\rangle$ вместо $L_{ds}\langle b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\rangle \coprod L\langle u_\sigma\rangle$, чтобы подчеркнуть зависимость от $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$. Переставляя сомножители, мы имеем изоморфизм свободных копроизведений

$$\begin{aligned}\coprod_{\sigma\in MF(K)} &\bigl(L_{ds}\langle b^\sigma_{i_1}, \dots, b^\sigma_{i_k}\rangle \textstyle\coprod L\langle u_\sigma\rangle\bigr)\\ &\cong \Bigl(\coprod_{\sigma\in MF(K)} L_{ds}\langle b^\sigma_{i_1}, \dots, b^\sigma_{i_k}\rangle\Bigr) \textstyle\coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle.\end{aligned}$$

Поэтому имеет место изоморфизм

$$\begin{aligned}\operatorname*{colim}_{\sigma\in MF(K)} &L_{ds}\langle b^\sigma_{i_1}, \dots, b^\sigma_{i_k}\rangle \textstyle\coprod L\langle u_\sigma\rangle\\ &\cong \Bigl(\Bigl(\coprod_{\sigma\in MF(K)} L_{ds}\langle b^\sigma_{i_1}, \dots, b^\sigma_{i_k}\rangle\Bigr) \textstyle\coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle\Bigr)/\sim,\end{aligned} \tag{23}$$

где соотношения $\sim$ задаются следующим образом. По определению направленного $MF$-комплекса две недостающие грани $\sigma, \sigma' \in MF(K)$ пересекаются вдоль общей грани, которую мы обозначим через $\tau$. Если $\tau = \varnothing$, то толстые букеты $FW(\sigma)$ и $FW(\sigma')$ пересекаются внутри $DJ_K(\underline{S})$ только в отмеченной точке. В этом случае моделью Адамса–Хилтона для $FW(\sigma) \vee FW(\sigma')$ будет копроизведение моделей Адамса–Хилтона двух толстых букетов и после перехода к гомологиям не возникает никаких соотношений в алгебрах Ли в формуле (23). Пусть теперь $\tau \neq \varnothing$, т. е. $\tau = (r_1, \dots, r_s)$. Топологически это пересечение соответствует включению собственного подпроизведения сфер $\prod_{t=1}^{s} S^2$ в пространство $DJ_K(\underline{S})$. Модель Адамса–Хилтона пространства петель на этом подпроизведении имеет гомологии, изоморфные алгебре $UL\langle b^{\tau}_{r_1}, \dots, b^{\tau}_{r_s}\rangle$. Согласно замечанию 12.3, включение этого подпроизведения согласовано с моделями Адамса–Хилтона для $\Omega FW(\sigma)$ и $\Omega FW(\sigma')$. Поэтому, переходя к гомологиям, в алгебрах $U(L_{ds}\langle b^{\sigma}_{i_1}, \dots, b^{\sigma}_{i_k}\rangle \coprod L\langle u_\sigma\rangle)$ и $U(L_{ds}\langle b^{\sigma'}_{i_1}, \dots, b^{\sigma'}_{i_{k'}}\rangle \coprod L\langle u_{\sigma'}\rangle)$ мы получаем $b^{\sigma}_{r_t} = b^{\sigma'}_{r_t}$ для любых $r_1, \dots, r_t$. Это соотношение также имеет место в самих алгебрах Ли. Поэтому соотношения $\sim$ в (23) задаются отождествлением $b^{\sigma}_{r_\ell}$ и $b^{\sigma'}_{r_\ell}$ для каждого $r_\ell \in \sigma \cap \sigma'$. Следовательно, рассматривая всевозможные недостающие грани в $K$, мы получаем

$$\biggl(\Bigl(\coprod_{\sigma \in MF(K)} L_{ds}\langle b^{\sigma}_{i_1}, \dots, b^{\sigma}_{i_k}\rangle\Bigr) \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle\biggr)/\sim \\ \cong L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle.$$

Теорема 13.2 доказана.

Теорема 13.2 является ключевым алгебраическим результатом. Мы используем ее сначала для описания алгебры $H_*(\Omega \mathscr{Z}_K(\underline{S}); \mathbb{Q})$, а затем для более детального описания гомоморфизма Гуревича.

Так как $L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle$ есть копроизведение, мы имеем точную последовательность градуированных алгебр Ли

$$L\langle R\rangle \xrightarrow{i} L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle \xrightarrow{\pi} L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle, \tag{24}$$

где $i$ – вложение, $\pi$ – проекция и

$$R = \bigl\{[\,[u_\sigma, b_{j_1}], \dots, b_{j_l}] \mid \sigma \in MF(K),\ 1 \leqslant j_1 \leqslant \dots \leqslant j_l \leqslant m,\ 0 \leqslant l < \infty\bigr\}. \tag{25}$$

Здесь при $l = 0$ мы рассматриваем скобку просто как элемент $u_\sigma$.

Предложение 13.3. *Имеет место коммутативная диаграмма алгебр*

$$\begin{tikzcd} H_*(\Omega \mathscr{Z}_K(\underline{S}); \mathbb{Q}) \arrow[r, "(\Omega f)_*"] \arrow[d, "\cong"] & H_*(\Omega DJ_K(\underline{S}); \mathbb{Q}) \arrow[d, "\cong"] \\ UL\langle R\rangle \arrow[r, "U(i)"] & U(L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle) \end{tikzcd}$$

Доказательство. Согласно результату из [16; п. 3.7], короткая точная последовательность градуированных алгебр Ли индуцирует короткую точную последовательность алгебр Хопфа. В нашем случае последовательность (24) индуцирует короткую точную последовательность

$$UL\langle R\rangle \xrightarrow{U(i)} U(L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle) \xrightarrow{U(\pi)} UL_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle.$$

Здесь, говоря о точной последовательности алгебр Хопфа, мы подразумеваем, что имеет место изоморфизм

$$U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma\in MF(K)\rangle) \cong UL_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \otimes UL\langle R\rangle$$

правых $UL\langle R\rangle$-модулей и левых $UL_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle$-комодулей. В частности, отображение $U(i)$ является алгебраическим ядром отображения $U(\pi)$. С другой стороны, из теоремы 13.2 следует, что $U(\pi)$ является моделью для вложения пространств петель $\Omega DJ_K(\underline{S}) \xrightarrow{\Omega g} \prod_{i=1}^{m}\Omega S^{n_i+1}$. Так как отображение $\Omega g$ имеет правое гомотопически обратное, из гомотопического разложения

$$\Omega DJ_K(\underline{S}) \simeq \left(\prod_{i=1}^{m}\Omega S^{n_i+1}\right)\times \Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S})$$

вытекает короткая точная последовательность алгебр Хопфа

$$H_*(\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S});\mathbb{Q}) \to H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Q}) \xrightarrow{U(\pi)} H_*\left(\prod_{i=1}^{m}\Omega S^{n_i+1};\mathbb{Q}\right).$$

Итак, $H_*(\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S});\mathbb{Q})$ также является алгеброй-ядром отображения $U(\pi)$, и тем самым предложение доказано.

Из теоремы 13.2 следует, что алгебра рациональных гомологий пространства $\Omega DJ_K(\underline{S})$ порождена образами при гомоморфизме Гуревича. Чтобы сформулировать это более точно, рассмотрим $\sigma=(i_1,\dots,i_k)\in MF(K)$. Напомним, что $\underline{S}=(S^{n_{i_1}+1},\dots,S^{n_{i_k}+1})$, и положим $N_\sigma=\sum_{j=1}^{k} n_{i_j+1}-2$. Рассмотрим высшее произведение Уайтхеда

$$w_\sigma\colon S^{N_\sigma+1}\xrightarrow{\phi_k} FW(\sigma)\to DJ_K(\underline{S})$$

и его сопряженное

$$s_\sigma\colon S^{N_\sigma}\to \Omega DJ_K(\underline{S}).$$

Согласно теореме 13.2, элемент $u_\sigma\in H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Q})$ является образом при гомоморфизме Гуревича сфероида $s_\sigma$. Для $1\leqslant i\leqslant m$ рассмотрим координатное вложение

$$a_i\colon S^{n_i+1}\to DJ_K(\underline{S})$$

и его сопряженное

$$\overline{a}_i\colon S^{n_i}\to \Omega DJ_K(\underline{S}).$$

Образ сфероида $\overline{a}_i$ при гомоморфизме Гуревича есть $b_i$. Пусть $\mathscr{I}$ – множество индексов для $\mathbb{Q}$-модуля $R$, введенного в (25). Тогда $\alpha\in\mathscr{I}$ соответствует недостающей грани $\sigma\in MF(K)$ и последовательности $(j_1,\dots,j_l)$, где $1\leqslant j_1\leqslant\dots\leqslant j_l\leqslant m$ и $0\leqslant l<\infty$. Для каждого такого $\alpha$ положим $t_\alpha=\sum_{t=1}^{l} n_{j_t}+N_\sigma$. Тогда мы имеем произведение Самельсона

$$[\,[s_\sigma,\overline{a}_{j_1}],\dots,\overline{a}_{j_l}]\colon S^{t_\alpha}\to \Omega DJ_K(\underline{S}).$$

Так как произведения Самельсона коммутируют с переходом к образам при гомоморфизме Гуревича, образ элемента $[[s_\sigma, \overline{a}_{j_1}], \dots, \overline{a}_{j_l}]$ при гомоморфизме Гуревича есть $[[u_\sigma, b_{j_1}], \dots, b_{j_l}]$. Переходя к сопряженному, мы получаем произведение Уайтхеда

$$[[w_\sigma, a_{j_1}], \dots, a_{j_l}]\colon S^{t_\alpha+1} \to DJ_K(\underline{S}).$$

Взяв букет по всевозможным $\alpha$, получаем отображение

$$W\colon \bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1} \to DJ_K(\underline{S}).$$

Следствие 13.4. *Отображение* $\Omega(\bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1}) \xrightarrow{\Omega W} \Omega DJ_K(\underline{S})$ *индуцирует отображение*

$$UL\langle R\rangle \xrightarrow{U(i)} U(L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \textstyle\coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)$$

*в рациональных гомологиях.*

Доказательство. Обозначим через $S$ композицию отображений

$$S\colon \bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha} \xrightarrow{E} \Omega\Bigl(\bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1}\Bigr) \xrightarrow{\Omega W} \Omega DJ_K(\underline{S}).$$

Тогда $S$ гомотопно сопряженному к отображению $W$. В частности, составляющие букета в $S$ суть произведения Самельсона $[[s_\sigma, \overline{a}_{j_1}], \dots, \overline{a}_{j_l}]$ для $\alpha \in \mathscr{I}$. Переходя к образам при гомоморфизме Гуревича, мы получаем, что $S_*$ есть композиция

$$\begin{aligned}\bar{i}\colon R \hookrightarrow UL\langle R\rangle &\xrightarrow{U(i)} U(L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \textstyle\coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)\\ &\xrightarrow{\cong} H_*(\Omega DJ_K(\underline{S})).\end{aligned}$$

Согласно теореме Ботта–Самельсона,

$$H_*\Bigl(\Omega\Bigl(\bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1}\Bigr);\mathbb{Q}\Bigr) \cong T\Bigl(\widetilde{H}_*\Bigl(\bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha};\mathbb{Q}\Bigr)\Bigr),$$

а последняя алгебра изоморфна $UL\langle R\rangle$. Следовательно, так как отображение $(\Omega W)_*$ является мультипликативным продолжением отображения $S_*$, оно индуцирует мультипликативное продолжение $U(i)$ отображения $\bar{i}$. Следствие доказано.

Наконец, мы возвращаемся к рассмотрению пространства $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$.

Теорема 13.5. *Отображение* $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1} \xrightarrow{W} DJ_K(\underline{S})$ *поднимается до отображения в* $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ *и индуцирует гомотопическую эквивалентность* $\bigvee\limits_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1} \to \mathscr{Z}_K(\underline{S})$.

Доказательство. В силу леммы 10.2 каждое высшее произведение Уайтхеда $w_\sigma$ поднимается до отображения в $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$. Поэтому каждое итерированное произведение Уайтхеда $[[w_\sigma, a_{j_1}], \dots, a_{j_l}]$, рассматриваемое как отображение в $DJ_K(\underline{S})$, становится тривиальным после композиции с вложением в произведение $\prod\limits_{i=1}^{m} S^{n_i+1}$, а значит, поднимается до отображения в $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$. Это описывается коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
& \bigvee\limits_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1} \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[d, "W"] \\
\mathscr{Z}_K(\underline{S}) \arrow[r] & DJ_K(\underline{S})
\end{tikzcd} \tag{26}$$

где $\lambda$ – некоторое поднятие.

Согласно следствию 13.4, отображение пространств петель $\Omega(\bigvee\limits_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1}) \xrightarrow{\Omega\lambda} \Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ индуцирует вложение $UL\langle R\rangle \xrightarrow{(\Omega\lambda)_*} H_*(\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S});\mathbb{Q})$. Из предложения 13.3 следует изоморфизм $H_*(\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S});\mathbb{Q}) \cong UL\langle R\rangle$. Из подсчета числа образующих вытекает, что вложение $(\Omega\lambda)_*$ должно быть изоморфизмом. Следовательно, отображение $\Omega\lambda$ является рациональной гомотопической эквивалентностью, т. е. индуцирует изоморфизм рациональных гомотопических групп. Отсюда следует, что $\lambda$ также является рациональной гомотопической эквивалентностью.

Чтобы доказать целочисленную гомотопическую эквивалентность, проведем рассуждение в несколько этапов.

*Шаг* 1. Пусть $g_\sigma\colon S^{N_\sigma+1} \to \mathscr{Z}_K(\underline{S})$ – поднятие высшего произведения Уайтхеда $w_\sigma$. Согласно лемме 10.2, отображение $g_\sigma$ можно выбрать таким образом, чтобы оно имело левое гомотопически обратное. Перейдя к сопряженным отображениям в (26), мы получим гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \bigvee\limits_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha} \arrow[dl, "\overline{\lambda}"'] \arrow[d, "\overline{W}"] \\
\Omega\mathscr{Z}_K(\overline{S}) \arrow[r, "\Omega\varphi"] & \Omega DJ_K(\underline{S})
\end{tikzcd}$$

где отображения $\overline{W}$, $\overline{\lambda}$ сопряжены к $W$, $\lambda$ соответственно. Пусть

$$\overline{g}_\sigma\colon S^{N_\sigma} \to \Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S})$$

– сопряженное отображение к $g_\sigma$. Тогда $\overline{g}_\sigma$ гомотопно композиции отображений

$$S^{N_\sigma} \xrightarrow{E} \Omega S^{N_\sigma+1} \xrightarrow{\Omega g_\sigma} \Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S}),$$

где $E$ есть отображение надстройки. Так как отображение $g_\sigma$ имеет левое гомотопически обратное, то же верно и для $\Omega g_\sigma$. Так как $E_*$ есть включение одной образующей в алгебре $H_*(\Omega S^{N_\sigma+1};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x_{N_\sigma}]$, то сфероид $\overline{g}_\sigma$ имеет ненулевой образ при гомоморфизме Гуревича, который мы обозначим через $\overline{u}_\sigma \in H_t(\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S});\mathbb{Z})$. Пусть $\overline{w}_\sigma\colon S^{N_\sigma} \to \Omega DJ_K(\underline{S})$ – сопряженное отображение к $w_\sigma$. Так как отображение $g_\sigma$ является поднятием отображения $w_\sigma$ через $\varphi$, то отображение $\overline{g}_\sigma$ является поднятием $\overline{w}_\sigma$ через $\Omega\varphi$. Поэтому, отождествляя $\overline{u}_\sigma \in H_*(\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S});\mathbb{Z})$ с его образом в $H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Z})$, мы получаем, что образом сфероида $\overline{w}_\sigma$ при гомоморфизме Гуревича является $\overline{u}_\sigma$.

*Шаг* 2. Заметим, что гомотопическое расслоение

$$\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S}) \xrightarrow{\Omega\varphi} \Omega DJ_K(\underline{S}) \to \prod_{i=1}^{m} S^1$$

расщепляется, т. е.

$$\Omega DJ_K(\underline{S}) \simeq \prod_{i=1}^{m} S^1 \times \Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S}).$$

При $1 \leqslant i \leqslant m$ координатное вложение $S^2 \xrightarrow{a_i} DJ_K(\underline{S})$ сопряжено к отображению $S^1 \xrightarrow{\overline{a}_i} \Omega DJ_K(\underline{S})$. Из разложения пространства $\Omega DJ_K(\underline{S})$ следует, что сфероид $\overline{a}_i$ имеет ненулевой образ $\overline{b}_i \in H_1(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Z})$ при гомоморфизме Гуревича. Так как произведения Самельсона коммутируют с образами при гомоморфизме Гуревича, то $[\,[\overline{u}_\sigma,\overline{b}_{j_1}],\dots,\overline{b}_{j_l}]$ является образом при гомоморфизме Гуревича итерированного произведения Самельсона $[\,[\overline{w}_\sigma,\overline{a}_{j_1}],\dots,\overline{a}_{j_l}]$.

*Шаг* 3. Теперь рассмотрим отображение рационализации

$$r\colon H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Z}) \to H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Q}).$$

Целочисленное отщепление сфер от $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$, задаваемое отображениями $g_\sigma$, и целочисленное разложение пространства петель $DJ_K(\underline{S})$ индуцируют соответствующие рациональное отщепление и рациональное разложение. Следовательно, $r(\overline{u}_\sigma) = u_\sigma$ и $r(\overline{b}_i) = b_i$, где $u_\sigma$ и $b_i$ обозначают рациональные классы $H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Q})$, как в следствии 13.4. Так как отображение $r$ сохраняет коммутаторы, мы получаем $r([\,[\overline{u}_\sigma,\overline{b}_{j_1}],\dots,\overline{b}_{j_l}]) = [\,[u_\sigma,b_{j_1}],\dots,b_{j_l}]$. В частности, так как $[\,[u_\sigma,b_{j_1}],\dots,b_{j_l}]$ является образующей $\mathbb{Q}$-модуля $R$ (в обозначениях следствия 13.4), то ее образ $[\,[\overline{u}_\sigma,\overline{b}_{j_1}],\dots,\overline{b}_{j_l}]$ при гомоморфизме Гуревича в $H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Z})$ ненулевой и переходит при отображении степени 1 в $[\,[u_\sigma,b_{j_1}],\dots,b_{j_l}]$.

Заметим, что итерированное произведение Самельсона $[\,[\overline{w}_\sigma,\overline{a}_{j_1}],\dots,\overline{a}_{j_l}]$ сопряжено к итерированному произведению Уайтхеда $[\,[w_\sigma,a_{j_1}],\dots,a_{j_l}]$. Поэтому сопряженные к высшим произведениям Уайтхеда $\overline{w}_\sigma$ и итерированные произведения Самельсона $[\,[\overline{w}_\sigma,\overline{a}_{j_1}],\dots,\overline{a}_{j_l}]$ вместе составляют отображение $\overline{W}$, которое поднимается до отображения $\overline{\lambda}$ в $\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S})$. Каждое индивидуальное отображение имеет при гомоморфизме Гуревича целочисленный образ, на который отображение рационализации $r$ действует как отображение степени 1, переводящее его в образующую $\mathbb{Q}$-модуля

$$R \subseteq H_*(\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S});\mathbb{Q}) \subseteq H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Q}).$$

Более того, эти целочисленные образы при гомоморфизме Гуревича линейно независимы, так как линейно независимы их рационализации, и находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными классами в $R$.

*Шаг* 4. В силу следствия 8.4 пространство $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ гомотопически эквивалентно букету односвязных сфер, т. е. $\mathscr{Z}_K(\underline{S}) \simeq \Sigma\Big(\bigvee_{\beta\in\mathscr{J}} S^{t_\beta}\Big)$. Отсюда вытекает, что $\langle R\rangle \cong H_*\Big(\bigvee_{\beta\in\mathscr{J}} S^{t_\beta};\mathbb{Q}\Big)$ и вложение $R$ в $H_*(\Omega\mathscr{Z}_K(\underline{S});\mathbb{Q})$ индуцировано отображением надстройки $E$. Следовательно, $\overline{\lambda}$ отображает $H_*\Big(\bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha};\mathbb{Z}\Big)$ изоморфно на множество $R' \subseteq H_*\Big(\bigvee_{\beta\in\mathscr{J}} S^{t_\beta};\mathbb{Z}\Big)$, которое отображение рационализации $r$ переводит как отображение степени 1 в $R$. Но отображение $r$ также переводит $H_*\Big(\bigvee_{\beta\in\mathscr{J}} S^{t_\beta};\mathbb{Z}\Big)$ как отображение степени 1 в $H_*\Big(\bigvee_{\beta\in\mathscr{J}} S^{t_\beta};\mathbb{Q}\Big)$. Следовательно, $\langle R'\rangle \cong H_*\Big(\bigvee_{\beta\in\mathscr{J}} S^{t_\beta};\mathbb{Z}\Big)$. Переходя к сопряженным отображениям, мы получаем, что отображение $\bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1} \xrightarrow{\lambda} \mathscr{Z}_K(\underline{S})$ индуцирует изоморфизм в целочисленных гомологиях. Итак, $\lambda$ является целочисленной гомотопической эквивалентностью. Теорема 13.5 доказана.

Доказательство теоремы 8.7. Теорема 8.7 – это просто переформулировка теоремы 13.5.

## 14. Свойства пространств Дэвиса–Янушкевича и момент-угол-комплексов для направленных $MF$-комплексов

Напомним, что $\imath\colon S^2 \to \mathbb{C}P^\infty$ является вложением двумерного клеточного остова. В силу естественности мы имеем коммутативную диаграмму гомотопических расслоений

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{Z}_K(\mathscr{S}^2) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{Z}_K(\imath)"] & DJ_K(S^2) \arrow[r] \arrow[d, "DJ_K(\imath)"] & \prod_{i=1}^r S^2 \arrow[d, "\prod_{i=1}^r \imath"] \\
\mathscr{Z}_K \arrow[r] & DJ_K \arrow[r] & \prod_{i=1}^r \mathbb{C}P^\infty
\end{tikzcd}$$

В этом разделе вычисления алгебр $H_*(\Omega DJ_K(S^2);\mathbb{Q})$ и $H_*(\Omega\mathscr{Z}_K(\mathscr{S}^2);\mathbb{Q})$ из раздела 13 будут использованы для того, чтобы вычислить алгебру $H_*(\Omega DJ_K;\mathbb{Q})$ и тем самым доказать теорему 8.6. Мы также опишем алгебру $H_*(\Omega\mathscr{Z}_K;\mathbb{Q})$. Затем мы построим гомотопическое разложение момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_K$ в букет сфер и опишем отображение $\mathscr{Z}_K \to DJ_K$ в терминах высших произведений Уайтхеда и итерированных произведений Уайтхеда, доказав тем самым теорему 8.8.

В силу предложения 11.2 имеем $H_*(\Omega DJ_K) \cong \operatorname{colim}_{\sigma\in MF(K)} H_*(\Omega FW(\sigma);\mathbb{Q})$, так что нам необходимо сначала вычислить алгебры $H_*(\Omega FW(\sigma);\mathbb{Q})$, а затем собрать все части воедино, перейдя к копределу. Соответствующие утверждения – лемма 14.3 и теорема 14.4 – приводятся ниже после двух предварительных лемм 14.1 и 14.2. Пусть $X_1, \dots, X_m$ – линейно связные $CW$-комплексы и $FW(\underline{X})$ – их толстый букет в произведении $\prod_{i=1}^m X_i$. Рассмотрим вложение $j\colon FW(\underline{X}) \to \prod_{i=1}^m X_i$.

Лемма 14.1. *Отображение $\Omega FW(\underline{X}) \xrightarrow{\Omega j} \prod_{i=1}^m \Omega X_i$ имеет правое гомотопически обратное, которое можно выбрать естественным по отношению к отображениям $X_i \to Y_i$.*

Доказательство. Мы имеем естественные вложения

$$\bigvee_{i=1}^m X_i \to FW(\underline{X}), \qquad X_i \to \bigvee_{i=1}^m X_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Перейдем к пространствам петель и рассмотрим композицию отображений

$$\overline{\mu}\colon \prod_{i=1}^m \Omega X_i \to \prod_{i=1}^m \Omega\Bigl(\bigvee_{i=1}^m X_i\Bigr) \xrightarrow{\mu} \Omega\Bigl(\bigvee_{i=1}^m X_i\Bigr) \to \Omega FW(\underline{X}),$$

где $\mu$ – умножение петель. Тогда все три отображения в этой композиции естественны, а $\overline{\mu}$ является правым гомотопически обратным для $\Omega j$. Лемма доказана.

Пусть $F$ – гомотопический слой отображения $j$. Как было отмечено выше, в [45] доказана гомотопическая эквивалентность $F \simeq \Sigma^{m-1}\Omega X_1 \wedge \dots \wedge \Omega X_m$. Более того, в [44; п. 1.2] было показано, что эта гомотопическая эквивалентность является естественной по отношению к отображениям $X_i \to Y_i$. Мы сформулируем это как отдельное утверждение.

Лемма 14.2. *Пусть $f_i\colon X_i \to Y_i$ – отображения односвязных пространств. Тогда имеет место коммутативная диаграмма гомотопических расслоений*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{m-1}\Omega X_1 \wedge \dots \wedge \Omega X_m \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma^{m-1}\Omega f_1 \wedge \dots \wedge \Omega f_m"] & FW(\underline{X}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "FW(f_1,\dots,f_m)"] & \prod_{i=1}^m X_i \arrow[d, "\prod_{i=1}^m f_i"] \\
\Sigma^{m-1}\Omega Y_1 \wedge \dots \wedge \Omega Y_m \arrow[r] & FW(\underline{Y}) \arrow[r, "j"] & \prod_{i=1}^m Y_i
\end{tikzcd}$$

Пусть $FW(S^2)$ и $FW(\mathbb{C}P^\infty)$ – толстые букеты в произведениях $\prod_{i=1}^m S^2$ и $\prod_{i=1}^m \mathbb{C}P^\infty$ соответственно. Пусть $FW(\imath)\colon FW(S^2) \to FW(\mathbb{C}P^\infty)$ – отображение, индуцированное включением $S^2 \xrightarrow{\imath} \mathbb{C}P^\infty$.

Лемма 14.3. *Существует коммутативная диаграмма алгебр*

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega FW(S^2);\mathbb{Q}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\Omega FW(\imath))_*"] & U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \coprod L\langle u\rangle) \arrow[d, "q"] \\
H_*(\Omega FW(\mathbb{C}P^\infty);\mathbb{Q}) \arrow[r, "\cong"] & U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \coprod L\langle u\rangle)/I
\end{tikzcd}$$

*где элемент* $u$ *имеет размерность* $2m-2$ *и является образом при гомоморфизме Гуревича сопряженного к высшему произведению Уайтхеда*, $I$ *есть идеал* $(b_i^2, [u,b_i] \mid 1 \leqslant i \leqslant m)$, *а* $q$ – *проекция на факторалгебру.*

Доказательство. Изоморфизм для $H_*(\Omega FW(S^2);\mathbb{Q})$ вытекает из теоремы 12.4. Чтобы получить согласованный изоморфизм для $H_*(\Omega FW(\mathbb{C}P^\infty);\mathbb{Q})$, посмотрим сначала, что происходит на уровне пространств. Пусть $X^{(m)}$ обозначает смаш-произведение $m$ экземпляров пространства $X$. Согласно лемме 14.2, отображение $\imath$ индуцирует гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{m-1}(\Omega S^2)^{(m)} \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma^{m-1}(\Omega\imath)^{(m)}"] & FW(S^2) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "FW(\imath)"] & \prod_{i=1}^m S^2 \arrow[d, "\prod_{i=1}^m \imath"] \\
\Sigma^{m-1}(\Omega\mathbb{C}P^\infty)^{(m)} \arrow[r] & FW(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[r, "j"] & \prod_{i=1}^m \mathbb{C}P^\infty
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $\Omega\mathbb{C}P^\infty \simeq S^1$, а значит, $\Sigma^{m-1}(\Omega\mathbb{C}P^\infty)^{(m)} \simeq S^{2m-1}$. Так как отображение $S^1 \xrightarrow{E} \Omega S^2$ является правым гомотопически обратным для $\Omega\imath$, то, положив $s = \Sigma^{m-1}E^{(m)}$ и $t = \Sigma^{m-1}(\Omega i)^{(m)}$, мы получим, что композиция $S^{2m-1} \xrightarrow{s} \Sigma^{m-1}(\Omega S^2)^{(m)} \xrightarrow{t} S^{2m-1}$ гомотопна тождественному отображению.

После перехода к пространствам петель мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\Sigma^{m-1}(\Omega S^2)^{(m)}) \arrow[r] \arrow[d, "\Omega t"] & \Omega FW(S^2) \arrow[r, "\Omega j"] \arrow[d, "\Omega FW(\imath)"] & \prod_{i=1}^m \Omega S^2 \arrow[d, "\prod_{i=1}^m \Omega\imath"] \\
\Omega S^{2m-1} \arrow[r] & \Omega FW(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[r, "\Omega j"] & \prod_{i=1}^m S^1
\end{tikzcd} \tag{27}$$

Согласно лемме 14.1, отображение $\Omega j$ имеет естественное правое гомотопически обратное, а значит, существует гомотопически коммутативная диаграмма сечений

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1}^{m} \Omega S^2 \arrow[r, "\overline{\mu}"] \arrow[d, "\prod_{i=1}^{m} \Omega\imath"] & \Omega FW(S^2) \arrow[d, "\Omega FW(\imath)"] \\ \prod_{i=1}^{m} S^1 \arrow[r, "\overline{\mu}"] & \Omega FW(\mathbb{C}P^\infty) \end{tikzcd} \tag{28}$$

Теперь перейдем к гомологиям пространств, входящих в диаграмму (28). Согласно теореме 13.2 и предложению 13.3, моделью для гомологий гомотопического расслоения в верхней строке диаграммы (27) является гомоморфизм

$$UL\langle R\rangle \xrightarrow{U(i)} U(L_{ds}\langle b_1,\ldots,b_m\rangle \coprod L\langle u\rangle) \xrightarrow{U(\pi)} UL_{ds}\langle b_1,\ldots,b_m\rangle, \tag{29}$$

где $R = \{[\,[u,b_{j_1}],\ldots,b_{j_l}] \mid 1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_l \leqslant m,\ 0 \leqslant l < \infty\}$. Из диаграммы (28) мы получаем правое гомотопически обратное отображение $\overline{\mu}_*$ для $U(\pi)$. В частности, если $H_*\left(\prod_{i=1}^{m}\Omega S^2;\mathbb{Q}\right) \cong \mathbb{Q}[c_1,\ldots,c_m]$, то $\overline{\mu}_*(c_i) = b_i + \gamma_i$ для некоторого $\gamma_i \in UL\langle R\rangle$. Однако алгебра $UL\langle R\rangle$ тривиальна в размерностях меньше $2m-2$, а размерность $c_i$ равна 1. Так как $m \geqslant 3$, мы получаем $\gamma_i = 0$ по соображениям размерности. Следовательно, $\overline{\mu}_*(c_i) = b_i$. Также по соображениям размерности мы имеем $\overline{\mu}_*(c_i^2) = b_i^2$ (несмотря на то что $\overline{\mu}_*$ может не быть мультипликативным гомоморфизмом). С другой стороны, $(\Omega\imath)_*$ является изоморфизмом для первых групп гомологий, и то же верно после взятия композиции с $\overline{\mu}_*$, а $(\Omega\imath)_*(c_i^2) = 0$. Поэтому из коммутативности диаграммы (28) после перехода к гомологиям мы получаем, что при $1 \leqslant i \leqslant m$ отображение $(\Omega FW(\imath))_*$ имеет степень один на образующих $b_i$, а $(\Omega FW(\imath))_*(b_i^2) = 0$. В силу мультипликативности из последнего соотношения мы получаем, что $(\Omega FW(\imath))_*$ переводит идеал $(b_1^2,\ldots,b_m^2)$ в 0.

Далее, рассмотрим коммутатор $[u,b_i] \in H_*(\Omega FW(S^2);\mathbb{Q})$. В терминах (29), $[u,b_i]$ переходит в 0 под действием отображения $U(\pi)$, а значит, этот коммутатор является образом некоторого элемента $\delta_i \in UL\langle R\rangle$. Заметим, что размерность $\delta_i$ равна $2n-1$. Переходя к гомологиям в (27), мы видим, что $(\Omega t)_*(\delta_i) = 0$ по соображениям размерности. Тогда из коммутативности левого квадрата в (27) мы получаем, что $(\Omega FW(\imath))_*([u,b_i]) = 0$. В силу мультипликативности гомоморфизм $(\Omega FW(\imath))_*$ переводит идеал $I = (b_i^2,[u,b_i] \mid 1 \leqslant i \leqslant m)$ в 0.

Итак, мы имеем разложение

$$\begin{tikzcd} H_*(\Omega FW(S^2);\mathbb{Q}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\Omega FW(\imath))_*"] & U(L_{ds}\langle b_1,\ldots,b_m\rangle \coprod L\langle u\rangle) \arrow[d, "q"] \\ H_*(\Omega FW(\mathbb{C}P^\infty);\mathbb{Q}) \arrow[r, "h"] & U(L_{ds}\langle b_1,\ldots,b_m\rangle \coprod L\langle u\rangle)/I \end{tikzcd} \tag{30}$$

для некоторого гомоморфизма алгебр $h$, который имеет степень один на каждой образующей $b_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Кроме того, так как отображение $\Omega t$ имеет правое гомотопически обратное, $h$ также имеет степень 1 на $u$.

Докажем, что $h$ является изоморфизмом; отсюда будет следовать утверждение леммы. Пусть $I'$ обозначает идеал $([u, b_i] \mid 1 \leqslant i \leqslant m)$. Заметим, что алгебра $U(L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u\rangle)/I'$ изоморфна алгебре $UL_{ds}\langle b_1, \dots, b_m, u\rangle \cong \mathbb{Q}[b_1, \dots, b_m, u]$. Поэтому алгебра $U(L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u\rangle)/I$ изоморфна алгебре $\Lambda(b_1, \dots, b_m)\otimes\mathbb{Q}[u]$. С другой стороны, из существования сечения $\overline{\mu}$ в (28) вытекает гомотопическое разложение $\Omega FW(\mathbb{C}P^\infty) \simeq \left(\prod_{i=1}^{m} S^1\right) \times \Omega S^{2m-1}$. Поэтому мы имеем изоморфизм коалгебр $H_*(\Omega FW(\mathbb{C}P^\infty); \mathbb{Q}) \cong \Lambda(c_1, \dots, c_m) \otimes \mathbb{Q}[v]$, где размерность $v$ равна $2m-2$. Используя отображения $\overline{\mu}$ и $t$ в гомотопическом разложении пространства $\Omega FW(\mathbb{C}P^\infty)$ и диаграмму (30), мы получаем, что $h(b_i) = c_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m$ и $h(u) = v$. Так как $h$ является гомоморфизмом алгебр, он является изоморфизмом. Лемма 14.3 доказана.

Теперь мы докажем теорему 8.6, перейдя к копределам толстых букетов. Эта теорема приведена ниже в формулировке, учитывающей упрощающее условие из замечания 13.1.

Теорема 14.4. *Пусть $K$ – направленный $MF$-комплекс, в котором $|\sigma| > 2$ для любого $\sigma \in MF(K)$. Тогда существует изоморфизм алгебр*

$$H_*(\Omega DJ_K; \mathbb{Q}) \cong U(L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)/I,$$

*где $u_\sigma$ есть образ при гомоморфизме Гуревича сопряженного к высшему произведению Уайтхеда, а $I$ есть идеал*

$$I = (b_i^2, [u_\sigma, b_{j_\sigma}] \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ \sigma = (i_1, \dots, i_k) \in MF(K),\ j_\sigma \in \{i_1, \dots, i_k\}).$$

*Более того, существует коммутативная диаграмма алгебр*

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega DJ_K(S^2); \mathbb{Q}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\Omega DJ_K(\imath))_*"] & U(L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle) \arrow[d, "q"] \\
H_*(\Omega DJ_K; \mathbb{Q}) \arrow[r, "\cong"] & U(L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)/I
\end{tikzcd}$$

*где $q$ – проекция на факторалгебру.*

Доказательство. Для $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega DJ_K(S^2); \mathbb{Q}) \arrow[r, "(\Omega DJ_K(\imath))_*"] \arrow[d, "\cong"] & H_*(\Omega DJ_K; \mathbb{Q}) \arrow[d, "\cong"] \\
\operatorname*{colim}_{\sigma\in MF(K)} U(L_{ds}\langle b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\rangle \coprod L\langle u_\sigma\rangle) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname*{colim}_{\sigma\in MF(K)} U(L_{ds}\langle b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\rangle \coprod L\langle u_\sigma\rangle)/I_\sigma \arrow[d, "\cong"] \\
U(L_{ds}\langle b_1, \dots, b_n\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle) \arrow[r, "q"] & U(L_{ds}\langle b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\rangle \coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)/I
\end{tikzcd}$$

где $Q = \operatorname{colim}_{\sigma\in MF(K)} q_\sigma$, а $I_\sigma$ – идеал, порожденный элементами $(b_{\sigma_i}^2, [u_\sigma, b_{j_\sigma}] \mid j_\sigma \in \{i_1, \dots, i_k\})$. Коммутативность верхнего квадрата следует из предложения 11.2 и леммы 14.3. Нижний коммутативный квадрат получается из вычислений копределов. Заметим, что оба коммутативных квадрата состоят из гомоморфизмов алгебр. Вместе эти коммутативные квадраты образуют диаграмму, существование которой утверждается в теореме, а ее нижняя строка – требуемая проекция на факторалгебру. Теорема доказана.

Теперь мы с помощью теоремы 14.4 опишем алгебру $H_*(\Omega\mathscr{Z}_K;\mathbb{Q})$ из предложения 14.6 ниже как универсальную обертывающую алгебру для некоторой свободной градуированной алгебры Ли. При этом мы будем использовать следующие тождества в градуированных алгебрах Ли. Пусть $L$ – градуированная алгебра Ли над $\mathbb{Q}$ со скобкой $[\,\cdot\,,\cdot\,]$. Эта скобка удовлетворяет тождеству градуированной антикоммутативности

$$[x,y]=-(-1)^{|x|\,|y|}[y,x]\quad \text{для любых } x,y\in L$$

и градуированному тождеству Якоби

$$[\,[x,y],z]=[x,[y,z]\,]-(-1)^{|x|\,|y|}[y,[x,z]\,]\quad \text{для любых } x,y,z\in L.$$

Идеал в теореме 14.4 включает скобки вида $[u_\sigma,b_j]$, где $\sigma=(i_1,\dots,i_k)$ и $j\in\{i_1,\dots,i_k\}$. Поэтому в факторалгебре мы должны следить за скобками вида $[u_\sigma,b_j]$, где $j$ лежит в дополнении к набору $\{i_1,\dots,i_k\}$. Пусть $J_\sigma=\{1,\dots,m\}\setminus\{i_1,\dots,i_k\}$. Рассмотрим свободную градуированную алгебру Ли, порожденную $\mathbb{Q}$-модулем

$$\widetilde{R}=\{[\,[u_\sigma,b_{j_1}],\dots,b_{j_l}]\mid \sigma\in MF(K),\ \{j_1,\dots,j_l\}\subseteq J_\sigma,\\ 1\leqslant j_1<\dots<j_l\leqslant m,\ 0\leqslant l\leqslant m\}.$$

Заметим, что в любой скобке каждый индекс $j_t$ может появляться не более одного раза. Это отличает $\widetilde{R}$ от $\mathbb{Q}$-модуля $R$, в котором индекс $j_t$ может появляться любое количество раз в каждой скобке. Пусть $i_R\colon \widetilde{R}\to R$ – включение и $\pi_R\colon R\to\widetilde{R}$ – проекция.

Лемма 14.5. *Существует короткая точная последовательность алгебр Ли*

$$L\langle\widetilde{R}\rangle\xrightarrow{\tilde{i}}(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle\textstyle\coprod L\langle u_\sigma\mid\sigma\in MF(K)\rangle)/\widetilde{I}\xrightarrow{\widetilde{\pi}}L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle/\widetilde{I}',$$

*где $\widetilde{I}$ есть идеал*

$$\widetilde{I}=([b_i,b_i],[u_\sigma,b_{j_\sigma}]\mid 1\leqslant i\leqslant m,\ \sigma\in MF(K),\ j_\sigma\in\{i_1,\dots,i_k\}),$$

*$\widetilde{I}'$ есть идеал $([b_i,b_i]\mid 1\leqslant i\leqslant m)$, $\tilde{i}$ – включение, $\widetilde{\pi}$ – проекция.*

Доказательство. Для упрощения обозначений положим

$$L=L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle\textstyle\coprod L\langle u_\sigma\mid\sigma\in MF(K)\rangle.$$

Заметим, что из определений идеалов $\widetilde{I}$ и $\widetilde{I}'$ следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle \arrow[d, "q'"] \\ L/\widetilde{I} \arrow[r, "\widetilde{\pi}"] & L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle/\widetilde{I}' \end{tikzcd}$$

где $q$ и $q'$ – проекции на факторалгебры. Из последовательности (24) вытекает, что ядро гомоморфизма $\pi$ есть $L\langle R\rangle$. Пусть $\widetilde{L}$ – ядро гомоморфизма $\widetilde{\pi}$. Из коммутативности диаграммы следует, что определен индуцированный гомоморфизм $\widetilde{q}\colon L\langle R\rangle \to \widetilde{L}$.

Мы утверждаем, что $\widetilde{q}$ является эпиморфизмом. Пусть $x \in \widetilde{L}$; мы также будем обозначать через $x$ его образ в $L/\widetilde{I}$. Так как $q$ является эпиморфизмом, существует элемент $y \in L$ такой, что $q(y) = x$. Положим $z = \pi(y)$. Если $z = 0$, то в силу точности элемент $y$ поднимается до $\widetilde{y} \in L\langle R\rangle$, а значит, $\widetilde{q}(\widetilde{y}) = x$. Если $z \neq 0$, то $q'(z) = 0$ в силу точности. Так как $L$ раскладывается в копроизведение, проекция $\pi$ имеет правый обратный $r\colon L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle \to L$, который является гомоморфизмом алгебр Ли. Так как все образующие идеала $\widetilde{I}'$ являются образующими идеала $\widetilde{I}$, равенство $(q \circ r)(b) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $q'(b) = 0$ для любого $b \in L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle$. Следовательно, для элемента $r(z)$ мы имеем $(q \circ r)(z) = 0$. Поэтому элемент $\widetilde{y} = y - r(z)$ поднимается до $L\langle R\rangle$ и $q(y - r(z)) = q(y) = x$, а значит, $\widetilde{q}(\widetilde{y}) = x$. Итак, $\widetilde{q}$ является эпиморфизмом.

Теперь мы имеем эпиморфизм $\widetilde{q}$, а алгебра Ли $\widetilde{L}$ вкладывается в $L/\widetilde{I}$. Следовательно, $\widetilde{L}$ изоморфна образу алгебры Ли $L\langle R\rangle$ при отображении $q$. Покажем, что этот образ есть в точности $L\langle\widetilde{R}\rangle$. Вначале мы произведем два простых вычисления.

*Вычисление* 1. Согласно тождеству Якоби,

$$[\,[a, b_i], b_j] = [a, [b_i, b_j]\,] - (-1)^{|a|\,|b_i|}[b_i, [a, b_j]\,]$$

для любого $a \in L$ и $1 \leqslant i, j \leqslant m$. По определению алгебры Ли $L_{ds}\langle b_1, \dots, b_m\rangle$ мы имеем $[b_i, b_j] = 0$, так что $[a, [b_i, b_j]] = 0$. В силу тождества антикоммутативности,

$$-(-1)^{|a|\,|b_i|}[b_i, [a, b_j]\,] = (-1)^{|a|\,|b_i| + |b_i|\,|[a, b_j]|}[\,[a, b_j], b_i].$$

Так как $|b_i| = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, знак в правой части предыдущего равенства есть $(-1)^{2|a|+1}$, т. е. $-1$. Следовательно, $[\,[a, b_i], b_j] = -[\,[a, b_j], b_i]$.

*Вычисление* 2. Согласно тождеству Якоби,

$$[\,[a, b_i], b_i] = [a, [b_i, b_i]\,] - (-1)^{|a|\,|b_i|}[b_i, [a, b_i]\,]$$

для любого $a \in L$ и $1 \leqslant i \leqslant m$. Так как $[b_i, b_i] = 0$ в $L$ и $|b_i|$ четно, мы имеем $[a, [b_i, b_i]] = 0$. Как и в предыдущем вычислении, из тождества антикоммутативности следует, что

$$-(-1)^{|u_\sigma|}[b_i, [a, b_i]\,] = -[\,[a, b_i], b_i].$$

Поэтому $[\,[a, b_i], b_i] = -[\,[a, b_i], b_i]$, а значит, $2[\,[a, b_i], b_i] = 0$. Так как $L$ есть алгебра Ли над $\mathbb{Q}$, в ней 2 – обратимый элемент, и мы имеем $[\,[a, b_i], b_i] = 0$.

Согласно первому вычислению, если $b_i$ и $b_j$ появляются последовательно в скобке в алгебре $L\langle R\rangle$ или $L$, то их можно переставить с точностью до знака. Согласно второму вычислению, после факторизации алгебр $L\langle R\rangle$ и $L$ по идеалу $I' = ([b_i, b_i] \mid 1 \leqslant i \leqslant m)$ исчезают все скобки, в которых встречается фрагмент $[a,[b_i,b_i]\,]$. Из этих двух вычислений следует, что любая скобка вида $[\,[u_\sigma,b_{j_1}],\dots,b_{j_l}]$, в которой хотя бы один $b_{j_t}$ встречается более одного раза, равна нулю. Поэтому для нетривиальных скобок мы имеем $1\leqslant j_1<\dots<j_l\leqslant m$, $0\leqslant l<n$, как в определении $\mathbb{Q}$-модуля $\widetilde{R}$. После этого мы еще переходим к факторалгебре по идеалу, порожденному скобками $[u_\sigma,b_{j_\sigma}]$ с $j_\sigma\in\{i_1,\dots,i_k\}$, в результате чего обращаются в нуль скобки

$$\{[\,[u_\sigma,b_{j_1}],\dots,b_{j_l}]\mid \sigma\in MF(K),\ 1\leqslant j_1<\dots<j_l\leqslant m,\ 0\leqslant l<m\},$$

для которых не выполнено условие $j_1,\dots,j_l\in J_\sigma$. Итак, образ алгебры $L\langle R\rangle$ при гомоморфизме $q$ есть в точности $L\langle\widetilde{R}\rangle$. Лемма 14.5 доказана.

В общей ситуации для образа градуированной алгебры Ли $L$ в ее универсальной обертывающей алгебре $UL$ выполнено соотношение $[x,y]=xy-(-1)^{|x|\,|y|}yx$, где умножение рассматривается в алгебре $UL$. В частности, из соотношения антикоммутативности следует соотношение $[x,x]=2x^2$ для элементов $x$ нечетной степени. Поэтому если 2 обратима в основном кольце, то идеал в алгебре $UL$, порожденный коммутатором $[x,x]$, совпадает с идеалом, порожденным квадратом $x^2$. В нашем случае короткая точная последовательность алгебр Ли из леммы 14.5 дает короткую точную последовательность алгебр Хопфа

$$UL\langle\widetilde{R}\rangle\to U\bigl(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle\textstyle\coprod L\langle u_\sigma\mid\sigma\in MF(K)\rangle\bigr)/I\xrightarrow{\pi}UL_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle/I',\tag{31}$$

где $I$ – идеал из теоремы 8.6, а $I'=(b_i^2\mid 1\leqslant i\leqslant m)$.

Предложение 14.6. *Существует коммутативная диаграмма алгебр*

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega\mathscr{Z}_K;\mathbb{Q}) \arrow[rr] \arrow[d, "\cong"] & & H_*(\Omega DJ_K;\mathbb{Q}) \arrow[d, "\cong"] \\
UL\langle\widetilde{R}\rangle \arrow[r, "U(\tilde{\imath})"] & U(L_{ds}\langle b_1,\dots,b_m\rangle\coprod L\langle u_\sigma\mid\sigma\in MF(K)\rangle)/I &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Мы рассуждаем так же, как в доказательстве предложения 13.3, заменяя возникающую там короткую точную последовательность алгебр Хопфа на последовательность (31) и применяя теорему 14.4 вместо теоремы 13.2.

Теперь воспользуемся описанием алгебры $H_*(\Omega DJ_K;\mathbb{Q})$ из теоремы 14.4 для того, чтобы задать отображения, как мы до этого делали в случае $\Omega DJ_K(\underline{S})$. Для $\sigma\in MF(K)$ рассмотрим высшее произведение Уайтхеда

$$\widetilde{w}_\sigma\colon S^{2|\sigma|-1}\xrightarrow{\phi_k}FW(S^2,\sigma)\xrightarrow{FW(\imath)}FW(\sigma)\to DJ_K.$$

В силу теоремы 14.4 элемент $u_\sigma\in H_*(\Omega DJ_K(\underline{S});\mathbb{Q})$ является образом сопряженного к $\widetilde{w}_\sigma$ при гомоморфизме Гуревича. Для $1\leqslant i\leqslant m$ обозначим через $\widetilde{a}_i$ композицию

$$\widetilde{a}_i\colon S^2\xrightarrow{\imath}\mathbb{C}P^\infty\to DJ_K,$$

где второе отображение является $i$-м координатным вложением. Пусть $\widetilde{\mathscr{I}}$ – множество индексов для $\widetilde{R}$. Тогда элемент $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\mathscr{I}}$ соответствует грани $\sigma \in MF(K)$ и последовательности $(j_1, \ldots, j_l)$, где $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_l \leqslant m$ и $0 \leqslant l \leqslant m$. Для каждого такого элемента $\widetilde{\alpha}$ положим $t_{\widetilde{\alpha}} = N_\sigma + l - 2$. Включение $i_R$ индуцирует отображение

$$\tilde{i}_R\colon \bigvee_{\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{I}}} S^{t_{\widetilde{\alpha}}+1} \to \bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1}.$$

Заметим, что гомоморфизм $(\Omega\tilde{i}_R)_*$ можно отождествить с $U(i_R)$. Рассмотрим композицию

$$\widetilde{W}\colon \bigvee_{\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{I}}} S^{t_{\widetilde{\alpha}}+1} \xrightarrow{\tilde{i}_R} \bigvee_{\alpha\in\mathscr{I}} S^{t_\alpha+1} \xrightarrow{W} DJ_K(S^2) \xrightarrow{DJ_K(\imath)} DJ_K.$$

Если элемент $\widetilde{\alpha}$ соответствует $\sigma \in MF(K)$, то ограничение отображения $\widetilde{W}$ на $S^{t_{\widetilde{\alpha}}+1}$ есть высшее произведение Уайтхеда $\widetilde{w}_\sigma$. В остальных случаях ограничение отображения $\widetilde{W}$ на $S^{t_{\widetilde{\alpha}}+1}$ есть итерированное произведение Уайтхеда одного $\widetilde{w}_\sigma$ и некоторого набора координатных вложений $\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_m$, где каждое $\widetilde{a}_i$ появляется не более одного раза.

Следствие 14.7. *Отображение* $\Omega(\bigvee_{\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{I}}} S^{t_{\widetilde{\alpha}}+1}) \xrightarrow{\Omega\widetilde{W}} \Omega DJ_K$ *индуцирует гомоморфизм*

$$UL\langle\widetilde{R}\rangle \xrightarrow{U(\tilde{i})} U(L_{ds}\langle b_1, \ldots, b_m\rangle \textstyle\coprod L\langle u_\sigma \mid \sigma \in MF(K)\rangle)/I$$

*в гомологиях.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{S}$ есть композиция

$$\widetilde{S}\colon \bigvee_{\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{I}}} S^{t_{\widetilde{\alpha}}+1} \xrightarrow{E} \Omega\Bigg(\bigvee_{\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{I}}} S^{t_{\widetilde{\alpha}}+1}\Bigg) \xrightarrow{\Omega\widetilde{W}} \Omega DJ_K.$$

Из определения отображения $\widetilde{W}$ следует, что индуцированное отображение в гомологиях $\widetilde{S}_*$ есть композиция

$$\widetilde{R} \hookrightarrow UL\langle\widetilde{R}\rangle \xrightarrow{UL(i_R)} UL\langle R\rangle \xrightarrow{(\Omega W)_*} H_*(\Omega DJ_K(S^2)) \xrightarrow{(\Omega DJ_K(\imath))_*} H_*(\Omega DJ_K).$$

Теперь, рассуждая так же, как в доказательстве следствия 13.4, и используя описание гомоморфизма $(\Omega DJ_K(\imath))_*$ из теоремы 14.4, мы получаем необходимое вложение в гомологиях. Следствие доказано.

В заключение этого раздела обратимся снова к момент-угол-комплексу $\mathscr{Z}_K$.

Теорема 14.8. *Отображение* $\bigvee_{\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{I}}} S^{t_{\widetilde{\alpha}}+1} \xrightarrow{\widetilde{W}} DJ_K$ *поднимается до отображения в* $\mathscr{Z}_K$ *и индуцирует гомотопическую эквивалентность* $\bigvee_{\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\mathscr{I}}} S^{t_{\widetilde{\alpha}}+1} \to \mathscr{Z}_K$.

Доказательство. Будем рассуждать как в доказательстве теоремы 13.5, используя предложение 14.6 и следствие 14.7 вместо предложения 13.3 и следствия 13.4.

Доказательство теоремы 8.8. Теоремы 8.8 есть переформулировка теоремы 14.8.

## 15. Примеры

Вначале рассмотрим пример сдвинутого комплекса на рис. 1, который появлялся в разделе 8.

Пример 15.1. Пусть $K$ – симплициальный комплекс на четырех вершинах, изображенный на рис. 1. Тогда $K$ является сдвинутым относительно указанного порядка вершин. Недостающие грани комплекса $K$ суть $MF(K) = \big\{(3,4),(1,2,3),(1,2,4)\big\}$. Заметим, что

$$|K| = \bigcup_{\sigma\in MF(K)} |\partial\sigma|.$$

А именно, $K = \partial(1,2,3)\cup\partial(1,2,4)$, где две недостающие грани склеены вдоль общей грани $(1,2)$. Таким образом, $K$ является направленным $MF$-комплексом.

Согласно теореме 8.5 мы имеем изоморфизм алгебр

$$H_*(\Omega DJ_K(\underline{S})) \cong U\big(L_{ds}\langle b_1,b_2,b_3,b_4\rangle \coprod L\langle u_1,u_2,u_3\rangle\big)/J,$$

где $u_1$ есть образ при гомоморфизме Гуревича сопряженного к произведению Уайтхеда, соответствующему недостающей грани $(3,4)$, а $u_2$, $u_3$ суть образы при гомоморфизме Гуревича сопряженных к высшим произведениям Уайтхеда, отвечающим недостающим граням $(1,2,3)$, $(1,2,4)$ соответственно. Идеал $J$ задается тождествами Якоби и соотношениями, происходящими из граней. Единственной недостающей гранью размерности 1 является $(3,4)$. Тождество Якоби приводит к соотношению

$$[u_1,b_1] = [\,[b_3,b_4],b_1] = [b_3,[b_4,b_1]\,] + [b_4,[b_3,b_1]\,].$$

Так как $(1,3)$ и $(1,4)$ являются гранями в $K$, мы имеем $[b_3,b_1]=0$ и $[b_4,b_1]=0$. Значит, $[u_1,b_1]=0$. Аналогично, $[u_1,b_2]=0$. Поэтому $J = ([u_1,b_1],[u_1,b_2])$.

По теореме 8.7 $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ есть букет сфер, которые отображаются в $DJ_K(\underline{S})$ следующим образом. Предположим для простоты, что каждая из сфер в $\underline{S}$ есть $S^2$. Утверждение (a) теоремы 8.7 дает три сферы $S^3$, $S^5$ и $S^5$ и соответствующие им отображения $w_1$, $w_2$ и $w_3$. Так как недостающие грани $(1,2,3)$ и $(1,2,4)$ имеют размерность больше 1, утверждение (b) дает следующие дополнительные слагаемые и отображения:

$$[\,[w_2,a_{j_1}],\dots,a_{j_l}]\colon S^{5+l}\to DJ_K(\underline{S}), \tag{32}$$

$$[\,[w_3,a_{j_1}],\dots,a_{j_l}]\colon S^{5+l}\to DJ_K(\underline{S}) \tag{33}$$

для каждой последовательности $1 \leqslant j_1 \leqslant \dots \leqslant j_l \leqslant l$, где $1 \leqslant l < \infty$. Заметим, что набор сфер в (32) идентичен набору сфер в (33). В каждом случае пусть $W_2$ обозначает букет соответствующих сфер. Так как недостающая грань $(3,4)$ имеет размерность 1, утверждение (c) теоремы 8.7 дает следующие дополнительные слагаемые в букете:

$$[\,[w_1, a_{j_1}], \dots, a_{j_l}]\colon S^{3+l} \to DJ_K(\underline{S}) \tag{34}$$

для каждой последовательности $1 \leqslant j_1 \leqslant \dots \leqslant j_l \leqslant l$, где $1 \leqslant l < \infty$, и каждого $j_i \in \{3,4\}$. Заметим, что дополнительное условие $j_i \in \{3,4\}$ происходит из того факта, что произведения Уайтхеда $[w_1, a_1], [w_1, a_2]$ соответствуют элементам в идеале $J$, поэтому каждое итерированное произведение Уайтхеда, содержащее $a_1$ или $a_2$, необходимо исключить из списка независимых произведений Уайтхеда $W_{(3,4)}$. Пусть $W_1$ – букет всевозможных сфер в (34).

Собирая все сферы вместе, мы получаем гомотопическую эквивалентность

$$\mathscr{Z}_K(\underline{S}) \simeq S^3 \vee 2S^5 \vee W_1 \vee 2W_2$$

и отображение

$$\mathscr{Z}_K(\underline{S}) \simeq S^3 \vee 2S^5 \vee W_1 \vee 2W_2 \to DJ_K(\underline{S}),$$

которое представляет собой букет отображений $w_1$, $w_2$, $w_3$ и трех наборов итерированных произведений Уайтхеда в (34), (32) и (33).

Слагаемые в букете $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ можно переупорядочить специальным образом. Напомним, что *джойн* двух пространств $A$ и $B$ обозначается через $A * B$; для наших целей достаточно существования гомотопической эквивалентности $A * B \simeq \Sigma A \wedge B$. *Правым полусмаш-произведением* пространств $A$ и $B$ называется факторпространство $A \rtimes B = (A \times B)/(* \times B)$. Если $A$ является надстройкой, то $A \rtimes B \simeq A \vee (A \wedge B)$. Для $1 \leqslant i \leqslant 4$ пусть $S^2_i$ обозначает сферу $S^2$, соответствующую вершине $i$. Заметим, что слагаемые в букете $S^3 \vee W_1$ находятся во взаимно однозначном соответствии со слагаемыми в букете $\Omega S^2_3 * \Omega S^2_4$, где последнее пространство раскладывается в букет сфер при помощи последовательного применения расщепления Джеймса. Аналогично, слагаемые в букете $S^5 \vee W_2$ из (32) находятся во взаимно однозначном соответствии со слагаемыми в букете $(\Omega S^2_1 * \Omega S^2_2 * \Omega S^3_3) \rtimes \Omega S^4$, а слагаемые в букете $S^5 \vee W_2$ из (33) находятся во взаимно однозначном соответствии со слагаемыми в букете $(\Omega S^2_1 * \Omega S^2_2 * \Omega S^3_4) \rtimes \Omega S^3$. Поэтому полученное выше разложение пространства $\mathscr{Z}_K(\underline{S})$ в букет сфер согласуется с разложением из [28; раздел 6].

Далее, согласно теореме 8.6, существует изоморфизм алгебр

$$H_*(\Omega DJ_K) \cong U\big(L_{ds}\langle b_1, b_2, b_3, b_4\rangle \coprod L\langle u_1, u_2, u_3\rangle\big)\big/(I+J),$$

где $u_1$ есть образ при гомоморфизме Гуревича сопряженного к произведению Уайтхеда

$$\widetilde{w}_1\colon S^3 \to \mathbb{C}P^\infty_3 \vee \mathbb{C}P^\infty_4 \to DJ_K,$$

а $u_2$ и $u_3$ суть образы при гомоморфизме Гуревича сопряженных к высшим произведениям Уайтхеда

$$\widetilde{w}_2\colon S^5 \to FW(1,2,3) \to DJ_K \quad \text{и} \quad \widetilde{w}_3\colon S^5 \to FW(1,2,4) \to DJ_K$$

соответственно; идеал $J$ определен выше, а

$$I = (b_i^2, [u_1, b_3], [u_1, b_4], [u_2, b_1], [u_2, b_2], [u_2, b_3], [u_3, b_1], [u_3, b_2], [u_3, b_4]).$$

Из теоремы 8.8 получаем следующее описание слагаемых в букете сфер $\mathscr{Z}_K$ и их отображений в $DJ_K$. Утверждение (a) теоремы 8.8 дает три слагаемых $S^3$, $S^5$ и $S^5$ с отображениями $\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}_2$ и $\widetilde{w}_3$ соответственно. Так как недостающие грани $(1,2,3)$ и $(1,2,4)$ имеют размерность больше 1, утверждение (b) дает два дополнительных слагаемых $S^6$ и $S^6$, соответствующих итерированным произведениям Уайтхеда

$$[\widetilde{w}_2, \widetilde{a}_4]\colon S^6 \to DJ_K \quad \text{и} \quad [\widetilde{w}_3, \widetilde{a}_3]\colon S^6 \to DJ_K.$$

Для недостающей грани $(3,4)$ размерности 1 утверждение (c) теоремы 8.8 не дает никаких дополнительных слагаемых в букет. Чтобы убедиться в этом, заметим, что произведения Уайтхеда $[\widetilde{w}_1, \widetilde{a}_3]$ и $[\widetilde{w}_1, \widetilde{a}_4]$ соответствуют алгебраическим элементам $[u_1, a_3]$ и $[u_1, a_4]$, каждый из которых входит в идеал $I$, а произведения Уайтхеда $[\widetilde{w}_1, \widetilde{a}_1]$ и $[\widetilde{w}_1, a_2]$ соответствуют алгебраическим элементам $[u_1, b_1]$ и $[u_1, b_2]$, каждый из которых входит в идеал $J$. Поэтому набор независимых произведений Уайтхеда $\widetilde{W}_{(3,4)}$ пуст.

Собирая все сферы вместе, мы получаем гомотопическую эквивалентность $\mathscr{Z}_K \simeq S^3 \vee 2S^5 \vee 2S^6$ и отображение

$$S^3 \vee 2S^5 \vee 2S^6 \to DJ_K,$$

которое является букетом отображений $\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_3$, $[\widetilde{w}_2, \widetilde{a}_4]$ и $[\widetilde{w}_3, \widetilde{a}_3]$. Заметим, что эта гомотопическая эквивалентность была получена в [27; пример 10.2] другими методами.

Следующий пример аналогичен предыдущему, со сдвигом размерности на единицу.

Пример 15.2. Рассмотрим симплициальный комплекс $K$ на пяти вершинах, изображенный на рис. 5. Таким образом, $K = \partial(1,2,3,4) \cup \partial(1,2,3,5)$, где недостающие грани $\partial(1,2,3,4)$ и $\partial(1,2,3,5)$ склеены вдоль общей грани $(1,2,3)$. Отсюда следует, что $K$ является направленным $MF$-комплексом. Кроме того,

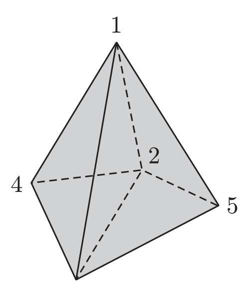


Рис. 5

$K$ является сдвинутым комплексом относительно указанного порядка вершин. Недостающие грани комплекса $K$ суть $MF(K) = \{(4,5),(1,2,3,4),(1,2,3,5)\}$. Алгебры $H_*(\Omega DJ_K(\underline{S}))$ и $H_*(\Omega DJ_K)$ имеют такую же структуру, как в предыдущем примере, но со сдвигом размерности на единицу. Высшие произведения Уайтхеда, соответствующие недостающим граням $(1,2,3,4)$ и $(1,2,3,5)$, суть отображения $w_i\colon S^7 \to DJ_K(\underline{S})$ и $\widetilde{w}_i\colon S^7 \to DJ_K$, где $i \in \{2,3\}$. Рассуждая так же, как в предыдущем примере, мы получаем гомотопическую эквивалентность $\mathscr{Z}_K \simeq S^3 \vee 2S^7 \vee 2S^8$ и отображение

$$S^3 \vee 2S^7 \vee 2S^8 \to DJ_K,$$

которое представляет собой букет отображений $\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_3$, $[\widetilde{w}_2, \widetilde{a}_5]$ и $[\widetilde{w}_3, \widetilde{a}_4]$.

## Список литературы


[1] J. F. Adams, P. J. Hilton, "On the chain algebra of a loop space", *Comment. Math. Helv.*, **30** (1956), 305–330.

[2] C. Allday, "Rational Whitehead products and a spectral sequence of Quillen. II", *Houston J. Math.*, **3** (1977), 301–308.

[3] D. J. Anick, "Hopf algebras up to homotopy", *J. Amer. Math. Soc.*, **2**:3 (1989), 417–453.

[4] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, "The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces", *Adv. Math.*, **225**:3 (2010), 1634–1668.

[5] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, "Cup-products for the polyhedral product functor", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **153**:3 (2012), 457–469.

[6] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, *On the rational homotopy type of moment-angle complexes*, 2012, 6 pp., arXiv: 1206.2173.

[7] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, "Алгебры клеточных коцепей и действия торов", *УМН*, **59**:3(357) (2004), 159–160; англ. пер.: I. V. Baskakov, V. M. Bukhshtaber, T. E. Panov, "Cellular cochain algebras and torus actions", *Russian Math. Surveys*, **59** (2004), 562–563.

[8] P. Beben, J. Grbić, *Configuration spaces and polyhedral products*, 2016 (v1 – 2014), 32 pp., arXiv: 1409.4462.

[9] A. Berglund, M. Jöllenbeck, "On the Golod property of Stanley–Reisner rings", *J. Algebra*, **315**:1 (2007), 249–273.

[10] A. Björner, M. L. Wachs, "Shellable nonpure complexes and posets. I", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**:4 (1996), 1299–1327.

[11] A. Björner, M. Wachs, V. Welker, "On sequentially Cohen–Macaulay complexes and posets", *Israel J. Math.*, **169** (2009), 295–316.

[12] F. Bosio, L. Meersseman, "Real quadrics in $\mathbf{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes", *Acta Math.*, **197**:1 (2006), 53–127.

[13] P. Bubenik, "Separated Lie models and the homotopy Lie algebra", *J. Pure Appl. Algebra*, **212**:2 (2008), 401–410.

[14] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, "Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра", *УМН*, **55**:5(335) (2000), 3–106; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, T. E. Panov, "Torus actions, combinatorial topology, and homological algebra", *Russian Math. Surveys*, **55** (2000), 825–921.

[15] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, "Torus actions and their applications in topology and combinatorics", Univ. Lecture Ser., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, viii+144 pp.

[16] F. R. Cohen, J. C. Moore, J. A. Neisendorfer, "Torsion in homotopy groups", *Ann. of Math.* (2), **109**:1 (1979), 121–168.

[17] S. Choi, M. Masuda, D. Y. Suh, "Rigidity problems in toric topology: a survey", *Классическая и современная математика в поле деятельности Бориса Николаевича Делоне*, Сборник статей. К 120-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР Бориса Николаевича Делоне, Тр. МИАН, **275**, МАИК, М., 2011, 188–201; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **275** (2011), 177–190.

[18] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, "Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions", *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.

[19] G. Denham, A. I. Suciu, "Moment-angle complexes, monomial ideals and Massey products", *Pure Appl. Math. Q.*, **3**:1 (2007), 25–60.

[20] N. Dobrinskaya, *Loops on polyhedral products and diagonal arrangements*, 2009, 32 pp., arXiv: 0901.2871.

[21] Y. Félix, D. Tanré, "Rational homotopy of the polyhedral product functor", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137**:3 (2009), 891–898.

[22] M. Franz, "The integral cohomology of toric manifolds", *Геометрическая топология, дискретная геометрия и теория множеств*, Сборник статей, Тр. МИАН, **252**, Наука, М., 2006, 61–70; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **252** (2006), 53–62.

[23] T. Ganea, "A generalisation of the homology and homotopy suspension", *Comment. Math. Helv.*, **39** (1965), 295–322.

[24] S. Gitler, S. López de Medrano, "Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums", *Geom. Topol.*, **17**:3 (2013), 1497–1534; 2012 (v1 – 2009), 45 pp., arXiv: 0901.2580.

[25] Е. С. Голод, "О гомологиях некоторых локальных колец", *Докл. АН СССР*, **144**:3 (1962), 479–482; англ. пер.: E. S. Golod, "On the homology of some local rings", *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 745–749.

[26] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault, Jie Wu, "The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **368**:9 (2016), 6663–6682; 2014 (v1 – 2012), 20 pp., arXiv: 1211.0873.

[27] Е. Грбич, С. Терио, "Гомотопический тип дополнения конфигурации координатных подпространств коразмерности два", *УМН*, **59**:6(360) (2004), 203–204; англ. пер.: J. Grbić, S. Theriault, "Homotopy type of the complement of a coordinate subspace arrangement of codimension two", *Russian Math. Surveys*, **59**:6 (2004), 1207–1209.

[28] J. Grbić, S. Theriault, "The homotopy type of the complement of a coordinate subspace arrangement", *Topology*, **46**:4 (2007), 357–396.

[29] J. Grbić, S. Theriault, "The homotopy type of the polyhedral product for shifted complexes", *Adv. Math.*, **245** (2013), 690–715.

[30] V. Grujić, V. Welker, *Discrete Morse theory for moment-angle complexes of pairs* $(D^n, S^{n-1})$, 2012, 19 pp., arXiv: 1212.2028.

[31] J. Herzog, V. Reiner, V. Welker, "Componentwise linear ideals and Golod rings", *Michigan Math. J.*, **46**:2 (1999), 211–223.

[32] K. Iriye, D. Kishimoto, "Decompositions of polyhedral products for shifted complexes", *Adv. Math.*, **245** (2013), 716–736.

[33] K. Iriye, D. Kishimoto, *Topology of polyhedral products and the Golod property of Stanley–Reisner rings*, 2013, 17 pp., arXiv: 1306.6221.

[34] I. M. James, "Reduced product spaces", *Ann. of Math.* (2), **62** (1955), 170–197.

[35] J.-M. Lemaire, *Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets*, Lecture Notes in Math., **422**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1974, xiv+134 pp.

[36] И. Ю. Лимонченко, "Кольца Стенли–Райснера обобщенных многогранников усечения и их момент–угол-многообразия", *Алгебраическая топология, выпуклые многогранники и смежные вопросы*, К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Тр. МИАН, **286**, МАИК, М., 2014, 207–218; англ. пер.: I. Yu. Limonchenko, "Stanley–Reisner rings of generalized truncation polytopes and their moment-angle manifolds", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **286** (2014), 188–197.

[37] И. Ю. Лимонченко, "Семейства минимально неголодовских комплексов и полиэдральные произведения", *Дальневост. матем. журн.*, **15**:2 (2015), 222–237.

[38] Z. Lü, T. Panov, "Moment-angle complexes from simplicial posets", *Cent. Eur. J. Math.*, **9**:4 (2011), 715–730.

[39] D. McGavran, "Adjacent connected sums and torus actions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **251** (1979), 235–254.

[40] H. Maeda, M. Masuda, T. Panov, "Torus graphs and simplicial posets", *Adv. Math.*, **212**:2 (2007), 458–483.

[41] J. W. Milnor, J. C. Moore, "On the structure of Hopf algebras", *Ann. of Math.* (2), **81**:2 (1965), 211–264.

[42] D. Notbohm, N. Ray, "On Davis–Januszkiewicz homotopy types. I. Formality and rationalisation", *Algebr. Geom. Topol.*, **5** (2005), 31–51.

[43] T. E. Panov, N. Ray, "Categorical aspects of toric topology", *Toric topology*, Contemp. Math., **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 293–322.

[44] G. J. Porter, "Higher order Whitehead products", *Topology*, **3**:2 (1965), 123–135.

[45] G. J. Porter, "The homotopy groups of wedges of suspensions", *Amer. J. Math.*, **88**:3 (1966), 655–663.

[46] D. Quillen, "Rational homotopy theory", *Ann. of Math.* (2), **90**:2 (1969), 205–295.

[47] R. P. Stanley, "$f$-vectors and $h$-vectors of simplicial posets", *J. Pure Appl. Algebra*, **71**:2-3 (1991), 319–331.

[48] S. Theriault, "Moment-angle manifolds and Panov's problem", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2015**:20 (2015), 10154–10175.

[49] A. J. Trevisan, "Generalized Davis–Januszkiewicz spaces, multicomplexes and monomial rings", *Homology Homotopy Appl.*, **13**:1 (2011), 205–221.

**Елена Грбич**
**(Jelena Grbić)**
University of Southampton, Southampton, UK
*E-mail*: J.Grbic@soton.ac.uk

Поступила в редакцию
16.04.2015

**Стефан Терио**
**(Stephen Theriault)**
University of Southampton, Southampton, UK
*E-mail*: S.D.Theriault@soton.ac.uk