В. И. Буслаев, А. Г. Витушкин, Оценка длины кода сигналов с конечным спектром в связи с задачами звукозаписи, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1974, том 38, выпуск 4, 867–895

СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ТОМ 38, № 4, 1974

УДК 517.5

В. И. БУСЛАЕВ и А. Г. ВИТУШКИН

ОЦЕНКА ДЛИНЫ КОДА СИГНАЛОВ С КОНЕЧНЫМ СПЕКТРОМ В СВЯЗИ С ЗАДАЧАМИ ЗВУКОЗАПИСИ

В статье дается оценка энтропии бернштейновского класса B_σ. Этот класс, по определению состоит из функций одного переменного, вещественных на вещественной оси, ограниченных на вещественной оси по модулю единицей и таких, что носитель их преобразований Фурье расположен на отрезке $[-\sigma, \sigma]$. Смысл полученных оценок будет прокомментирован на примере задач звукозаписи.

Введение

В технике звукозаписи чаще всего используется так называемый аналоговый метод записи сигналов. Сигнал записывается без каких-либо существенных преобразований в том естественном виде, в каком он был получен от датчика. При воспроизведении записанного таким образом сигнала всякого рода погрешности в работе приборов, неоднородность, старение материала и тому подобное приводят к искажениям сигнала. Другой, цифровой способ записи, заключается в том, что первоначальному сигналу ставится в соответствие некоторый дискретный код, при воспроизведении по этому коду восстанавливается первоначальная функция. Эта система записи имеет большие возможности защиты сигнала от различного рода помех. Успешная реализация такого способа записи требует прежде всего построения подходящей математической модели и отыскания простых способов кодирования.

Среди параметров, в терминах которых в технике характеризуют качество прибора, с теоретико-информационной точки зрения существенными являются следующие: Ω — максимальная частота, воспроизводимая прибором, ε — относительная погрешность воспроизведения, $D=20\log_{10}\frac{M}{\delta}$ — динамический диапазон прибора (M — норма максимально возможного на выходе прибора сигнала, δ — норма шумов на выходе прибора). Норма сигнала $f(t)$ определяется следующим образом:

$$\|f(t)\|=\max_t \sqrt{\frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} f(x)^2dx},$$

где $r>0$ — константа, соизмеримая с величиной $1/\Omega$.

Принимая эти параметры в качестве образца, приведем несколько определений. Прибором P будем называть пару преобразований P_1 и P_2, действующих следующим образом. Всякой функции $f(t)$ преобразование P_1 ставит в соответствие некоторый двоичный код, состоящий из чисел $P_1(k\tau)=0,1$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Число $\tau>0$ не зависит от выбора кодируемой функции. Преобразование P_2 ставит в соответствие этому коду некоторую вещественную функцию $f^*(t)$, определенную на всей вещественной оси и ограниченную единицей. Кроме того, предполагают существование константы h такой, что для всякого k значение $P_1(k\tau)$ однозначно определяется значениями функции $f(t)$ на отрезке $[k\tau-h, k\tau+h]$ и при всяком t значение $f^*(t)$ определяется значениями $P_1(k\tau)$ на отрезке $[t-h, t+h]$. Число h обычно называют величиной задержки прибора, а число $\frac{1}{\tau}$ — плотностью используемого кода. Эти параметры $(h, \frac{1}{\tau})$ характеризуют сложность прибора.

Качество воспроизведения будем характеризовать тремя параметрами: σ, ε, δ. Фиксируем число $r>0$. Функцию $f^*(t)$ будем называть (ε, δ)-приближением функции $f(t)$, если при всяком t выполняется неравенство:

$$|f(t)-f^*(t)| \leqslant \varepsilon \max_{[t-r,\, t+r]} |f(x)| + \delta.$$

Будем говорить, что прибор имеет параметры не хуже, чем σ, ε, δ, если для всякой функции $f(t) \in B_\sigma$ соответствующая функция $f^*(t)=P(f(t))$ является ее (ε, δ)-приближением.

Содержание статьи составляет доказательство следующего утверждения: для всяких σ, ε, δ можно указать преобразование $P=P_2 \cdot P_1$, параметры которого не хуже, чем σ, ε, δ, а сложность оценивается неравенствами:

$$\frac{1}{\tau} \leqslant \frac{\sigma}{\pi} \log \min\left\{\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\delta}\right\} + C \leqslant \frac{\sigma}{\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} + C$$

(C не зависит от ε и δ),

$$h \leqslant C' \max\left\{\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\delta}\right\}$$

(C' не зависит от ε и δ). Подчеркнем, что в правой части первого неравенства отсутствует δ. Оценка плотности кода состоит, как всегда, в подсчете энтропии класса B_σ в соответствующей метрике на достаточно длинном отрезке времени. Величина задержки усматривается непосредственно из конструкции приближения.

Независимость энтропии от δ (при малых δ) показывает, что в принципе можно построить прибор со сколь-угодно широким динамическим диапазоном, использующий коды ограниченной, не зависящей от δ плотности. В аналоговой записи ширина динамического диапазона является наиболее трудно реализуемым параметром.

Отметим еще одно обстоятельство, связанное с цифровой системой записи. Если прибор воспроизводит функции класса B_σ с точностью

(ε, δ), то небольшим усложнением преобразований P_1 и P_2 можно добиться того, чтобы при всяком не очень большом k (например, $k \leqslant \sigma$) функции класса B_k^σ воспроизводились с точностью (ε^k, δ). Достигается это приписыванием к коду сведений о спектре кодируемого сигнала. Плотность кода при этом практически не увеличивается. Это обстоятельство позволяет значительно снизить верхние оценки для плотности кода, учитывая реальное распределение в звуковых сигналах энергии по частотам и различную восприимчивость к искажениям в различных частях спектра.

§ 1. Формулировка результата

Фиксируем число $r>0$ и отрезок $[-T, T]$ вещественной оси. Пусть $f(t)$ и $f^*(t)$ — две функции, определенные на отрезке $[-T-r, T+r]$. Функцию $f^*(t)$ будем называть (ε, δ)-приближением функции $f(t)$ на отрезке $[-T, T]$, если для всякого $t \in [-T, T]$ выполняется неравенство:

$$|f(t)-f^*(t)| \leqslant \varepsilon \max_{t-r \leqslant x \leqslant t+r} |f(x)| + \delta.$$

Пусть F и F^* — два множества функций, определенных на отрезке $[-T-r, T+r]$. Множество F^* будем называть (ε, δ)-сетью множества F, если для всякой функции $f(t) \in F$ найдется функция $f^*(t) \in F^*$, являющаяся ее (ε, δ)-приближением. Обозначим через $N_{\varepsilon, \delta}(F, T)$ нижнюю грань числа элементов множества F^*, взятую по всевозможным F^*, являющимся (ε, δ)-сетями множества F. Положим

$$H_{\varepsilon, \delta}(F, T) = \log_2 N_{\varepsilon, \delta}(F, T).$$

ТЕОРЕМА. *Пусть заданы положительные числа r, σ, $\varepsilon \leqslant 1$, $\delta \leqslant 1$. Тогда при достаточно больших T величина $H_{\varepsilon, \delta}(B_\delta, T)$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{2\sigma T}{\pi}\left[\log \min\left\{\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\delta}\right\} + C'\right] \leqslant H_{\varepsilon,\delta}(B_\sigma, T) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\sigma T}{\pi}\left[\log \min\left\{\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\delta}\right\} + C''\right],$$

где C', C'' не зависят от σ, T, ε, δ (определение класса B_σ приведено в начале статьи).

Следствие. $H_{\varepsilon,\delta}(B_\sigma, T) \leqslant \frac{2\sigma T}{\pi} \log \frac{C}{\varepsilon}$.

Нижняя оценка $H_{\varepsilon, \delta}(B_\sigma, T)$ при всяких ε, δ и верхняя оценка $H_{\varepsilon, \delta}(B_\sigma, T)$ при $\delta > \varepsilon$ легко получаются из оценок ε-энтропии в равномерной метрике ([1]). Мы будем заниматься доказательством неравенства

$$H_{\varepsilon,\delta}(B_\sigma, T) \leqslant \frac{2\sigma T}{\pi} \log \frac{C}{\varepsilon}$$

при всяких ε, δ.

В доказательстве сначала предполагается, что $\sigma\leqslant\pi$ и $r=1$. Лемма 1 дает возможность при больших T равномерно на отрезке $[-T-1,\ T+1]$ приблизить функцию $f(t)\in B_\pi$ с точностью $\delta/3$ функцией специального вида $\varphi(t)R(t)$. Множитель $\varphi(t)$ — универсальная функция, не зависящая от выбора приближаемой функции. Второй, зависящий от выбора приближаемой функции множитель $R(t)$ — многочлен степени $n\leqslant 2T+o(T)$. Тем самым задача сводится к подсчету величины $H_{\varepsilon,\delta/3}$ класса функций вида $\varphi(t)\cdot R(t)$. Функция $\varphi(t)\cdot R(t)$ однозначно (с точностью до постоянного множителя) определяется набором $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ корней многочлена $R(t)$. Если два набора корней A и $\tilde{A}$ в некотором смысле близки, то функция $\varphi(t)\tilde{R}(t)$, определяемая набором $\tilde{A}$, является $(\varepsilon,0)$-приближением функции $\varphi(t)R(t)$, определяемой набором A. Близость наборов корней характеризуется в терминах специально введенных для этой цели функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ (§ 4) и вспомогательных характеристик $x_i^k(A)$ (§ 5). В § 5 строится $(\varepsilon,0)$-сеть в пространстве функций $\varphi(t)R(t)$ и дается оценка числа элементов этой сети. Таким образом, получается верхняя оценка для $H_{\varepsilon,\delta}(B_\sigma,T)$ при $\sigma=\pi$ и $r=1$. Соответствующей линейной заменой переменного оценка переносится на случай произвольного σ и $r=\frac{\pi}{\sigma}$.

Если в вышепринятом определении (ε,δ)-близости положить $r=0$, то при больших T и достаточно малых δ

$$H_{\varepsilon,\delta}(B_\sigma,T)\geqslant\frac{\sigma T}{\pi}\log\frac{1}{\delta}.$$

§ 2. Приближение функций из B_σ функциями специального вида

Знаками $C_1, C_2, C_3,\ldots$ мы будем обозначать абсолютные положительные константы. Для всякого выражения v различные величины, пропорциональные величине v, мы будем обозначать одним и тем же знаком Cv. Будем применять это обозначение лишь в тех случаях, когда не будет необходимости точно указывать коэффициент пропорциональности.

ЛЕММА 1. *Всякую функцию $f(t)\in B_\sigma$ $(\sigma\leqslant\pi)$ на отрезке $[-T-1,\ T+1]$ (T целочисленно) можно равномерно приблизить с точностью C_1/T функцией $g(t)$ вида*

$$g(t)=M\varphi(t)R(t),$$

где $\varphi(t)=\dfrac{\sin\pi t}{\pi(t-T-l-1)(t-T-l)\ldots(t+T+l+1)}$, $\quad l=[(T+1)^{3/4}]+1$,

$R(t)=(t-a_1),\ldots,(t-a_n)$ — *многочлен, принимающий вещественные значения при вещественных* t, $n\leqslant 2T+3l+3$,

$$|\operatorname{Re}a_i|\leqslant 2^T,\quad |\operatorname{Im}a_i|\leqslant 2^T,$$

константа M удовлетворяет неравенству $|M|\leqslant T^{C_2T}$.

Доказательство. Фиксируем функцию $f(t)\in B_\sigma(\sigma<\pi)$ и представим ее в виде (см. (2), стр. 105)

$$f(t)=P_l(t)\sin\pi t+\frac{\sin\pi t}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'(-1)^k f(k)\left[\frac{1}{t-k}+\frac{1}{k}+\ldots+\frac{t^l}{k^{l+1}}\right],$$

где $P_l(t)$ — многочлен степени не выше l, а знак $\sum'$ означает, что выражение $\left[\frac{1}{t-k}+\frac{1}{k}+\ldots+\frac{t^l}{k^{l+1}}\right]$ при $k=0$ принимается равным $1/t$.

Положим

$$f^*(t)=P_l(t)\sin\pi t+\frac{\sin\pi t}{\pi}\sum_{k=-T-l-1}^{T+l+1}{}'(-1)^k f(k)\left[\frac{1}{t-k}+\frac{1}{k}+\ldots+\frac{t^l}{k^{l+1}}\right]$$

и оценим разность $|f(t)-f^*(t)|$, $t\in[-T-1,\ T+1]$:

$$|f(t)-f^*(t)|\leqslant\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=-\infty}^{-T-l-2}\left|\frac{1}{t-k}+\frac{1}{k}+\ldots+\frac{t^l}{k^{l+1}}\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=T+l+2}^{\infty}\left|\frac{1}{t-k}+\frac{1}{k}+\ldots+\frac{t^l}{k^{l+1}}\right|\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=-\infty}^{-T-l-2}\left|\frac{t^{l+1}}{k^{l+1}}\frac{1}{t-k}\right|+\sum_{k=T+l+2}^{\infty}\left|\frac{t^{l+1}}{k^{l+1}}\cdot\frac{1}{t-k}\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(T+1)^{l+1}}{\pi l}\left\{\sum_{k=-\infty}^{-T-l-2}\left|\frac{1}{k^{l+1}}\right|+\sum_{k=T+l+2}^{\infty}\frac{1}{k^{l+1}}\right\}\leqslant\frac{(T+1)^{l+1}}{\pi l}\cdot 2\int_{T+l+1}^{\infty}\frac{1}{x^{l+1}}\,dx=$$

$$=\frac{2(T+1)^{l+1}}{\pi l}\frac{1}{l(T+l+1)^l}\leqslant\frac{(T+1)^{l+1}}{l^2(T+1)^l\left(1+\frac{l}{T+1}\right)^l}\leqslant\frac{(T+1)^2}{l^4}.$$

Полагая $l=[(T+1)^{\frac{3}{4}}]+1$, имеем:

$$|f(t)-f^*(t)|\leqslant\frac{1}{T+1}.$$

Функцию $f^*(t)$ можно переписать, приводя члены в ее выражении к общему знаменателю, в следующем виде:

$$f^*(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi(t-T-l-1)(t-T-l)\ldots(t+T+l+1)}\cdot R^*(t),$$

где $R^*(t)$ — многочлен, принимающий вещественные значения при вещественных t (так как функция $f(t)$ принимает вещественные значения на вещественной оси), степени не выше $r=2T+3l+3$. Итак, для функций из $B_\sigma(\sigma<\pi)$ имеем:

$$|f(t)-f^*(t)|\leqslant\frac{1}{T+1},\quad f^*(t)=\varphi(t)\cdot R^*(t).$$

Пусть $f(t) \in B_\pi$. Введем $f_\lambda(t) = f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$. Тогда для всякого $\lambda > 1$ функция $f_\lambda(t) \in B_\sigma$ и $\sigma < \pi$. Для всякого $\lambda > 1$ построим приближение $f_\lambda^*(t) = \varphi(t) \cdot R_\lambda^*(t)$. Проверив, что коэффициенты многочлена $R_\lambda^*(t)$ непрерывно зависят от λ, предельным переходом при $\lambda \to 1$ мы получаем приближение $f^*(t) = \lim\limits_{\lambda \to 1+0} f_\lambda^*(t)$ функции $f(t)$:

$$|f^*(t) - f(t)| \leqslant \frac{1}{T+1}, \quad f^*(t) = \varphi(t) R^*(t).$$

Представим $R^*(t)$ в виде

$$R^*(t) = M^*(t - a_1) \dots (t - a_n)(t - a_{n+1}) \dots (t - a_r),$$

где $a_1, \dots, a_n$ — те из корней многочлена, у которых мнимая и действительная части по модулю меньше 2^T, а $a_{n+1}, \dots, a_r$ — оставшиеся корни.

Положим $g(t) = \varphi(t) M (t - a_1), \dots, (t - a_n)$, где

$$M = M^*(-1)^{r-n} a_{n+1} \dots a_r.$$

Тогда при $t \in [-T-1, T+1]$

$$|f(t) - g(t)| \leqslant |f(t) - f^*(t)| + |f^*(t)| \cdot \left| 1 - \frac{a_{n+1} \dots a_r}{(a_{n+1} - t) \dots (a_r - t)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T+1} + \left(1 + \frac{1}{T+1}\right) \left| 1 - \left(1 + \frac{T+1}{2^T - T}\right)^r \right| \leqslant \frac{C_1}{T},$$

где C_1 — абсолютная константа.

Для завершения доказательства остается лишь оценить константу M. Из теоремы Чебышева о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке $[-T-1, T+1]$, следует, что существует некоторая точка $t_0 \in [-T-1, T+1]$, в которой

$$|(t_0 - a_1) \dots (t_0 - a_n)| \geqslant (T+1)^n \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Тогда

$$|M| = \left| \frac{g(t_0)}{\dfrac{\sin \pi t_0}{\pi (t_0 - T - l - 1) \dots (t_0 + T + l + 1)} (t_0 - a_1) \dots (t_0 - a_n)} \right| \leqslant T^{C_2 T}.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь три подготовительные леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть многочлен $R(t) = P(t) Q(t)$, где $P(t)$ — многочлен с вещественными коэффициентами,*

$$P(t) = \prod_{i=1}^{p} \left(1 - \frac{t}{a_i}\right), \quad |a_i| \geqslant 1, \quad i = 1, \dots, p,$$

а $Q(t)$ — произвольный многочлен степени q. Тогда если в точке z $R(z)=0$, то

$$\left|\frac{R(0)}{z}\right| \leqslant C_3 M\left(q+1+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i|^2}\right),$$

где $M=\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}|R(t)|$.

Доказательство. При $|z|\geqslant\frac{1}{3}$ $\left|\frac{R(0)}{z}\right|\leqslant 3|R(0)|\leqslant 3M$. Поэтому будем предполагать, что $|z|<\frac{1}{3}$, $q\geqslant 1$. Так как $P(t)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, то $\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{1}{a_i}$ — вещественное число.

Положим

$$\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{a_i}\right]=\alpha, \quad \left[\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i|^2}\right]+1=\beta,$$

$$\widetilde{P}(t)=\begin{cases}(1-t^2)^\beta(1-t)^\alpha, & \text{если } \alpha\geqslant 0,\\ (1-t^2)^\beta(1+t)^{-\alpha}, & \text{если } \alpha<0,\end{cases}$$

$$\widetilde{R}(t)=\widetilde{P}(t)\,Q(t).$$

Покажем, что

$$\left|\frac{\widetilde{R}(0)}{z}\right|\leqslant 7e\widetilde{M}(q+2\beta), \tag{1}$$

где

$$\widetilde{M}=\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\widetilde{R}(t)|.$$

Проведем доказательство на примере, когда $\alpha\geqslant 0$. Рассмотрим два случая: 1) $\alpha\leqslant 6(q+2\beta)$, 2) $\alpha>6(q+2\beta)$.

В первом случае оказывается, что $\widetilde{R}(t)$ — многочлен степени r не выше, чем $7(q+2\beta)$, и требуемое неравенство (1) является следствием теоремы Бернштейна ([3]), дающей оценку производных многочлена

$$|\widetilde{R}^{(s)}(0)|\leqslant\widetilde{M}r^s\cdot s, \quad s=1,2,\ldots.$$

Действительно, если $|z|\geqslant\frac{1}{r}$, то

$$\left|\frac{\widetilde{R}(0)}{z}\right|\leqslant r|\widetilde{R}(0)|\leqslant 7(q+2\beta)\widetilde{M},$$

если же $|z|\leqslant\frac{1}{r}$, то

$$\left|\frac{\widetilde{R}(0)}{z}\right| = \left|\frac{\widetilde{R}(z)-\widetilde{R}(0)}{z}\right| = \left|\frac{\widetilde{R}'(0)\,z+\ldots+R^{(r)}(0)\,\frac{z^r}{r!}}{z}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}\left(r+r^2|z|+\ldots+\frac{r^r}{(r-1)!}|z|^{r-1}\right) \leqslant \widetilde{M}er \leqslant 7e\widetilde{M}(q+2\beta).$$

Во втором случае $\alpha \geqslant 6(q+2\beta)$. Пусть

$$\gamma = \max_{-1\leqslant t\leqslant -\frac{1}{2}} \left|\frac{Q(t)}{t-z}(1-t^2)^\beta\right|$$

достигается в точке $t_0 \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. Тогда, обозначая через $T_{q-1+2\beta}(t)$ чебышевский (наименее уклоняющийся от нуля) полином степени $q-1+2\beta$ на отрезке $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ и оценивая по другой теореме Бернштейна ([4]) рост многочлена $\frac{Q(t)}{t-z}(1-t^2)^\beta$, получаем:

$$\left|\frac{\widetilde{R}(0)}{z}\right| = \left|\frac{Q(t)}{t-z}(1-t^2)^\beta\right|_{t=0} \leqslant \frac{\gamma\,|T_{q-1+2\beta}(0)|}{\left|T_{q-1+2\beta}\left(-\frac{1}{2}\right)\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma\cdot 8^{(q-1+2\beta)} \leqslant \frac{\gamma}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^{6(q+2\beta)} \leqslant \frac{\gamma}{6}\,|(1-t_0)^\alpha| \leqslant \gamma\,(1-t_0)^\alpha\,|t_0-z| =$$

$$= \left|(1-t_0)^\alpha(t_0-z)\,\frac{Q(t_0)\,(1-t_0^2)^\beta}{t_0-z}\right| = |\widetilde{R}(t_0)| \leqslant \widetilde{M} \leqslant 7e\widetilde{M}(q+2\beta).$$

Итак, неравенство (1) доказано.

Покажем теперь, что

$$|\widetilde{P}(t)| \leqslant e\,|P(t)|, \quad t \in [-1, 1]. \tag{2}$$

Заметив предварительно, что в силу условия $|a_i| \geqslant 1$, $i=1, \ldots, p$,

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|a_i|^2} \geqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{a^k}, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

имеем:

$$\ln e\,|P(t)| = 1 + \sum_{i=1}^{p} \ln\left(1-\frac{t}{a_i}\right) = 1 - \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}\frac{1}{a_i^k} =$$

$$= \left(1 - t\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{a_i}\right) - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{k}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{a_i^k} \geqslant -\alpha t - \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i|^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^{2l}}{l} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha\ln(1-t) + \beta\ln(1-t^2) = \ln|\widetilde{P}(t)|.$$

Итак, при $\alpha > 0$ из (1) и (2) получаем:

$$\left|\frac{R(0)}{z}\right| = \left|\frac{\widetilde{R}(0)}{z}\right| \leqslant \widetilde{M} 7e(q+2\beta) \leqslant 7e^2 M(q+2\beta) \leqslant$$

$$\leqslant C_3 M\left(q+1+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i|^2}\right).$$

При $\alpha < 0$ доказательство леммы проводится аналогичным образом.

ЛЕММА 3. *Пусть заданы вещественные числа t', t_0 такие, что $|t'-t_0| \leqslant \leqslant \frac{1}{2}$, и многочлен $R(t) = P(t)Q(t)$, где $Q(t)$ — вещественный многочлен степени q, $P(t) = \prod_{i=1}^{p}\left(1-\frac{t}{a_i}\right)$ — вещественный многочлен, $|t_0 - a_i| \geqslant 1$. Тогда если в точке z $R(z) = 0$, то*

$$\left|\frac{R(t')}{t'-z}\right| \leqslant C_4 M\left(q+1+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right),$$

где

$$M = \max_{t_0-1\leqslant t\leqslant t_0+1} |R(t)|.$$

Доказательство. Пусть для определенности $t' \geqslant t_0$. Пусть $b_1, \ldots, b_s$ — все корни многочлена $Q(t)$, лежащие вне круга $|t-t'| \leqslant t_0+1-t'$. Положим

$$P^*(t) = P(t)\left(1-\frac{t-t'}{b_1-t'}\right)\ldots\left(1-\frac{t-t'}{b_s-t'}\right),$$

$$Q^*(t) = Q(t)\left[\left(1-\frac{t-t'}{b_1-t'}\right)\ldots\left(1-\frac{t-t'}{b_s-t'}\right)\right]^{-1}$$

и представим многочлен $R(t)$ в виде

$$R(t) = R^*(t) = P^*(t)Q^*(t).$$

Делая замену переменных $t = \theta(t_0+1-t')+t'$ и применяя лемму 2 к функции $\widetilde{R}(\theta) = R\left(\frac{t-t'}{t_0+1-t'}\right)$, имеем:

$$\frac{\widetilde{R}(0)(t_0+1-t')}{z-t'} \leqslant C_3 \max_{-1\leqslant\theta\leqslant 1}|\widetilde{R}(\theta)|\left(q-s+1+\sum_{i=1}^{p}\frac{(t_0+1-t')^2}{|a_i-t'|^2}+\sum_{j=1}^{s}\frac{(t_0+1-t')^2}{(b_j-t')^2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{R(t')}{z-t'} \leqslant \frac{C_3}{t_0+1-t'}\max_{2t'-t_0-1\leqslant t\leqslant t_0+1}|R(t)|\left(q-s+1+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{p}\frac{(t_0+1-t')^2}{|a_i-t'|^2}+\sum_{j=1}^{s}\frac{(t_0+1-t')^2}{|b_j-t'|^2}\right) \leqslant 2C_3 M\left(q-s+1+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\frac{(t_0+1-t')^2}{|a_i-t'|^2}+\sum_{j=1}^{s}\frac{(t_0+1-t')^2}{|b_j-t'|^2}\Bigg).$$

Замечая, что

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{(t_0+1-t')^2}{|b_j-t'|^2}\leqslant s,$$

так как $|b_j-t'|\geqslant t_0+1-t'$, и

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{(t_0+1-t')^2}{|a_i-t'|^2}\leqslant\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i-t_0|^2},$$

так как $|a_i-t'|\geqslant|a_i-t_0|-|t_0-t'|\geqslant|a_i-t_0|(1+t_0-t')$, имеем:

$$\left|\frac{R(t')}{t'-z}\right|\leqslant C_4M\left(q+1+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right)\quad(C_4=2C_3).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть вещественный многочлен* $R(t)=P(t)Q(t)$, *где* $Q(t)$ — *многочлен степени* q,

$$P(t)=\prod_{i=1}^{p}\left(1-\frac{t-t_0}{a_i-t_0}\right),\quad |a_i-t_0|\geqslant 1,$$

$z_1,\ldots,z_s$ — *некоторые корни* $R(t)$. *Тогда*

$$\left|\frac{R(t_0)}{(t_0-z_1)\ldots(t_0-z_s)}\right|\leqslant M\left[C_4\left(q+1+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right)\right]^s$$

(M, C_4 *см. в лемме* 3).

Доказательство проведем индукцией по числу s. При $s=1$ утверждение получается из леммы 3 при $t'=t_0$. Пусть

$$|t_0-z_s|\geqslant\frac{1}{C_4\left(q+1+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right)},$$

тогда в силу предположения индукции

$$\left|\frac{R(t_0)}{(t_0-z_1)\ldots(t_0-z_{s-1})}\right|\left|\frac{1}{t_0-z_s}\right|\leqslant M\left[C_4\left(q+1+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right)\right]^s,$$

т. е. в данном случае лемма доказана. Поэтому будем далее предполагать, что

$$|t_0-z_s|\leqslant\frac{1}{C_4\left(q+1+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right)}.$$

Покажем, что для всякого $t \in [t_0-1, t_0+1]$

$$\left|\frac{R(t)}{t-z_s}\right| \leqslant C_4 M \left(q+1+\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right).$$

При $|t-t_0| \leqslant \frac{1}{2}$ неравенство утверждается леммой 3.

При $|t-t_0| > \frac{1}{2}$ неравенство вытекает из соотношения

$$|t-z_s| \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{C_4\left(q+1+\sum\limits_{i=1}^{p} \frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right)} \geqslant \frac{1}{C_4\left(q+1+\sum\limits_{i=1}^{p} \frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right)}.$$

Индуктивное предположение в применении к многочлену $\frac{R(t)}{t-z_s}$ означает, что

$$\left|\frac{R(t_0)/(t_0-z_s)}{(t_0-z_1)\ldots(t_0-z_{s-1})}\right| \leqslant \left[C_4\left(q+1+\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right)\right]^{s-1} \max_{t_0-1 \leqslant t \leqslant t_0+1} \left|\frac{R(t)}{t-z_s}\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\left[C_4\left(q+1+\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right)\right]^s.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть заданы целые числа $l>1$ и T, вещественное число t_0 и функция $g(t)=\varphi(t)P^*(t)Q^*(t)$ такие, что $-T \leqslant t_0 \leqslant T$, $Q^*(t)$ — вещественный многочлен степени q, $P^*(t)$ — вещественный многочлен, p корней которого лежат вне круга $|t-t_0|<1$,*

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi(t-T-l-1)\ldots(t+T+l+1)}.$$

Тогда если $g(z_i)=0$, $i=1, \ldots, s$, то

$$\left|\frac{g(t_0)}{(t_0-z_1)\ldots(t_0-z_s)}\right| \leqslant M\left[C_4\left(q+2+\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|a_i-t_0|^2}\right)\right]^s,$$

где

$$M = \max_{t_0-1 \leqslant t \leqslant t_0+1} |g(t)|.$$

Доказательство. Функция $\varphi(t)$ может быть представлена так:

$$\varphi(t) = \frac{1}{(-1)^{T+l+1}[(T+l+1)!]^2} \prod_{k=T+l+2}^{\nu} \left(1-\frac{t^2}{k^2}\right) \prod_{k=\nu+1}^{\infty} \left(1-\frac{t^2}{k^2}\right).$$

Полагая

$$P_\nu(t) = P^*(t) \prod_{k=T+l+2}^{\nu} \left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right),$$

$$Q_\nu(t) = Q^*(t) \frac{1}{(-1)^{T+l+1}[(T+l+1)!]^2}$$

и делая предельный переход по $\nu \longrightarrow \infty$, мы получим утверждение этой леммы из леммы 4.

§ 3. Оценки энтропии некоторых простейших множеств

Пусть X^m — m-мерное пространство векторов x с вещественными координатами $(x_1, \ldots, x_m)$ и нормой $\|x\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k|$, E — компакт в X^m, $N_\varepsilon(E)$ — число элементов минимальной ε-сети этого компакта, $H_\varepsilon(E) = \log N_\varepsilon(E)$ — ε-энтропия компакта E.

ЛЕММА 6. *Пусть* $E = \left\{x : \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i| \leqslant Dm\varepsilon\right\}$. *Тогда*:

$$\begin{aligned} &\text{при } D \geqslant 1 \quad H_\varepsilon(E) \leqslant 8\,Dm, \\ &\text{при } D < 1 \quad H_\varepsilon(E) \leqslant 19\,Dm \log \frac{2}{D}. \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Укажем некую условную запись вектора x, по которой x восстанавливается с точностью ε, используя три знака: 0, 1, 2. Код вектора x состоит из m групп, разделенных между собой условным знаком 2; i-ая группа представляет собой двоичную запись (использующую только 0 и 1) числа $\left[\frac{x_i}{\varepsilon}\right]$. Общая длина кода для всякого x оценивается числом

$$m + \sum_{i=1}^{m} \left\{\log_2\left(1 + \frac{|x_i|}{\varepsilon}\right) + 2\right\} \leqslant 3m + Dm.$$

Следовательно, при $D \geqslant 1$ $H_\varepsilon(E) \leqslant 4Dm \log_2 3 \leqslant 8Dm$.

Будем, далее, предполагать, что $D < 1$. Заметим, что для всякого x общее число индексов i, для которых $|x_i| \geqslant \varepsilon$, не превышает $q = [Dm]$. При $q = 0$ точка начала координат $(0, \ldots, 0)$ будет являться ε-сетью множества E, т. е. в этом случае $H_\varepsilon(E) = 0$. Поэтому будем предполагать, что $q \geqslant 1$.

Фиксируем некоторый набор индексов $\{i_1, \ldots, i_q\}$ и обозначим через $E_{i_1, \ldots, i_q}$ подмножество E, состоящее из всех векторов $x \in E$ таких, что для всякого $i \notin \{i_1, \ldots, i_q\}$ $|x_i| \leqslant \varepsilon$. Так как $|x_{i_1}| + \ldots + |x_{i_q}| \leqslant Dm\varepsilon \leqslant 2q\varepsilon$, то, применяя доказанное неравенство (3), получаем, что в $E_{i_1 \ldots i_q}$ существует ε-сеть, состоящая из не более, чем 2^{16q} элементов.

Кроме того, так как $E \subset \bigcup E_{i_1 \ldots i_q}$ (объединение берется по всем наборам из q индексов), то в E можно построить ε-сеть, состоящую из не более, чем

$$C_m^q \cdot 2^{18q} \leqslant \frac{m^q}{q!} 2^{18q} \leqslant \left(\frac{m}{q}\right)^q \cdot 2^{18q}$$

элементов и, следовательно,

$$H_\varepsilon(E) \leqslant 18q + q \log \frac{m}{q} \leqslant 18 Dm + Dm \log \frac{2}{D} \leqslant 19 Dm \log \frac{2}{D}.$$

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. *Пусть*

$$E = \left\{x : |x_1| + \sum_{i=2}^{m} \left| \left(\frac{x_i}{s_i} - \frac{x_{i-1}}{s_{i-1}}\right)(s_i + s_{i-1}) \right| \leqslant Dm\varepsilon \right\},$$

где $D \geqslant 1$, $s_1, \ldots, s_m$ — *действительные положительные числа такие, что* $\frac{1}{C_5} \leqslant \frac{s_i}{s_{i-1}} \leqslant C_5$ $(i = 2, \ldots, m)$. *Тогда* $H_\varepsilon(E) \leqslant C_6 Dm$ $(C_5 \geqslant 1, C_6 \geqslant 1$ — *абсолютные константы*).

Доказательство. Будем записывать точки множества E кодом, состоящим из знаков $0, 1, 2$. Этот код состоит из m групп, разделенных между собой знаком 2; i-ая группа представляет собой двоичную запись целого числа y_i, $i = 1, \ldots, m$. Числа y_i определяются рекуррентным образом вместе со второй группой чисел $\tilde{x}_i$:

$$y_1 = \left[\frac{x_1}{\varepsilon}\right], \quad \tilde{x}_1 = y_1 \cdot \varepsilon,$$

$$y_{i+1} = \left[\frac{x_{i+1} \dfrac{s_{i+1} + s_i}{s_{i+1}} - \tilde{x}_i \dfrac{s_{i+1} + s_i}{s_i}}{\varepsilon}\right],$$

$$\tilde{x}_{i+1} = y_{i+1} \frac{s_{i+1}}{s_i + s_{i+1}} \varepsilon + \tilde{x}_i \frac{s_{i+1}}{s_i}.$$

Проверяется, что $|x_i - \tilde{x}_i| \leqslant \varepsilon$. Затем проверяется, что

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i| \leqslant CDm.$$

Отсюда следует, что для всякого $x \in E$ длина его кода не превосходит числа

$$m + \sum_{i=1}^{m} \{\log(1 + |y_i|) + 2\} \leqslant CDm$$

и, следовательно,

$$H_\varepsilon(E) \leqslant C_6 Dm.$$

Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. *Пусть*

$$E=\left\{x:|x_1|+|x_2|+\sum_{i=2}^{m-1}\left|\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{s_{i+1}+s_i}-\frac{x_i-x_{i-1}}{s_i+s_{i-1}}\right)(s_{i-1}+s_i+s_{i+1})\right|\leqslant Dm\varepsilon\right\},$$

где $D>1$, $s_1,\ldots,s_m$ — *действительные числа такие, что* $\frac{1}{C_5}\leqslant\frac{s_i}{s_{i-1}}\leqslant C_5$ $(i=2,\ldots,m)$. *Тогда* $H_\varepsilon(E)\leqslant C_7Dm$.

Доказательство. При использовании рекуррентных соотношений

$$y_1=\left[\frac{x_1}{\varepsilon}\right],\quad \tilde{x}_1=y_1\varepsilon,\quad y_2=\left[\frac{x_2}{\varepsilon}\right],\quad \tilde{x}_2=y_2\cdot\varepsilon,$$

$$y_{i+1}=\left[\left(\frac{x_{i+1}-\tilde{x}_i}{s_{i+1}+s_i}-\frac{\tilde{x}_i-\tilde{x}_{i-1}}{s_i+s_{i-1}}\right)\frac{s_{i-1}+s_i+s_{i+1}}{\varepsilon}\right],$$

$$\tilde{x}_{i+1}=\left[y_{i+1}\frac{\varepsilon}{s_{i-1}+s_i+s_{i+1}}+(\tilde{x}_i-\tilde{x}_{i-1})\frac{1}{s_i+s_{i-1}}\right](s_{i+1}+s_i)+\tilde{x}_i$$

доказательство проводится аналогично доказательству леммы 7.

§ 4. Вспомогательные функции, характеризующие плотность дискретного множества

При подсчете энтропии класса B_σ будет использован некоторый специальный способ записи нулей целых функций. Для этого введем несколько вспомогательных характеристик множества, состоящего из конечного числа точек, и рассмотрим соотношения между ними.

Фиксируем некоторый набор A, состоящий из точек $a_1,\ldots,a_n$ комплексной плоскости и примем следующие обозначения: $\psi\{G\}$ — число точек набора A, лежащих в множестве G,

$$\mu(t)=1+\psi\{|z-t|<t\}+\left[\sum_{\substack{a\in A\\|a-t|\geqslant 1}}\frac{1}{|a-t|^2}\right],$$

$$\nu(t)=1+\psi\left\{|z-t|<\frac{1}{\mu(t)}\right\}+\left[\sum_{\substack{a\in A\\ \frac{1}{\mu(t)}\leqslant|a-t|<1}}\frac{1}{\mu(t)^2|a-t|^2}\right].$$

Для всякого набора A функции $\mu(t)$, $\nu(t)$ обладают свойствами:

1) $$\psi\{|z-t|<\gamma\}\leqslant\gamma^2\mu(t)\quad(\gamma\geqslant 1),$$
$$\psi\left\{|z-t|<\frac{\gamma}{\mu(t)}\right\}\leqslant\gamma^2\nu(t)\quad(1\leqslant\gamma\leqslant\mu(t));$$

2) если $|u-v|\leqslant 1$, то $\frac{1}{4}\leqslant\frac{\mu(u)}{\mu(v)}\leqslant 4$;

3) если $|u-v|\leqslant\frac{1}{\mu(u)}+\frac{1}{\mu(v)}$, то $\frac{1}{C_8}\leqslant\frac{\nu(u)}{\nu(v)}\leqslant C_8$;

4) если отрезок $[-T-1, T+1]$ разбит на $2T+2$ единичных отрезка $\Delta_1, \dots, \Delta_{2T+2}$ с центрами в точках $\theta_1, \dots, \theta_{2T+2}$, то при $n \leqslant 5T$

$$\sum_{j=1}^{2T+2} \mu(\theta_j) \leqslant C_9 T;$$

5) если единичный отрезок $\left[t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}\right]$ (t_0 вещественно) разбит на $\mu(t_0)$ отрезков длины $\frac{1}{\mu(t_0)}$ с центрами в точках $\theta_1, \dots, \theta_{\mu(t_0)}$, то

$$\sum_{k=1}^{\mu(t_0)} \nu(\theta_k) \leqslant C_{10} \mu(t_0).$$

Доказательство свойства 4). Учитывая, что для всякого $p = 0, 1, \dots$ $\bigcup_{j=1}^{2T+2} \{p \leqslant |z - \theta_j| < p+1\}$ покрывает каждую точку плоскости не более, чем дважды, имеем:

$$\sum_{j=1}^{2T+2} \mu(\theta_j) \leqslant \sum_{j=1}^{2T+2} \left\{1 + \psi\{|z-\theta_j| < 1\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \psi\{p \leqslant |z - \theta_j| < p+1\}\right\} \leqslant 2T + 2 + 2n\left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}\right) \leqslant C_9 T.$$

Свойство 4) доказано.

Доказательство свойства 5). Учитывая, что при всех $p \leqslant 4\mu(t_0)$

$$\bigcup_{k=1}^{\mu(t_0)} \left\{4\frac{p-1}{\mu(t_0)} \leqslant |z - \theta_k| < 4\frac{p}{\mu(t_0)}\right\} \subset \{|z - t_0| < 17\},$$

причем каждая точка последнего множества покрывается не более, чем 8 раз, из свойства 2) получаем:

$$\sum_{k=1}^{\mu(t_0)} \nu(\theta_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\mu(t_0)} \left\{1 + \psi\left\{|z-\theta_k| < \frac{1}{\mu(\theta_k)}\right\} + \sum_{p=1}^{\mu(\theta_k)} \frac{1}{p^2} \psi\left\{\frac{p}{\mu(\theta_k)} \leqslant \right.\right.$$

$$\left.\left. \leqslant |z - \theta_k| < \frac{p+1}{\mu(\theta_k)}\right\}\right\} \leqslant \mu(t_0) + \sum_{k=1}^{\mu(t_0)} \left\{\psi\left\{|z-\theta_k| < \frac{4}{\mu(t_0)}\right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{4\mu(t_0)} \frac{1}{p^2} \psi\left\{4\frac{p}{\mu(t_0)} \leqslant |z - \theta_k| < 4\frac{p+1}{\mu(t_0)}\right\}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mu(t_0) + 8\psi\{|z - t_0| < 17\}\left(1 + \sum_{p=1}^{4\mu(t_0)} \frac{1}{p^2}\right) \leqslant C_{10}\mu(t_0).$$

Свойство 5) доказано.

Обозначим через Φ соответствие, которое всякому набору $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ следующим образом ставит в соответствие разбиение $\Phi(A)$ отрезка $[-T-1, T+1]$ на отрезки $\{D_i\}$. Отрезок $[-T-1, T+1]$ делится сначала на единичные отрезки Δ_j с центрами в точках θ_j, $j=1,\dots,2T+2$. Отрезок Δ_j разбивается на $\mu(\theta_j)$ отрезков Δ_{jk} длины $\frac{1}{\mu(\theta_j)}$ с центрами в точках θ_{jk}, $k=1,\dots$ $\dots,\mu(\theta_j)$, а каждый из отрезков Δ_{jk} делится на $\nu(\theta_{jk})$ отрезков Δ_{jkl} длины $\frac{1}{\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})}$ с центрами в точках θ_{jkl}, $l=1,\dots,\nu(\theta_{jk})$.

Получившиеся отрезки $\{\Delta_{jkl}\}$ перенумеруем одним индексом i (в естественном порядке), получая разбиение $\Phi(A)$ отрезка $[-T-1, T+1]$ на отрезки D_i, $i=1,\dots,m$. Обозначим через s_i длину отрезка D_i, через t_i — центр отрезка D_i, а через A_i — множество $\{a\in A: |a-t_i|\geqslant s_i\}$.

ЛЕММА 9. *Разбиение $\Phi(A)$ отрезка $[-T-1, T+1]$ на систему отрезков $D_i (i=1,\dots,m)$ удовлетворяет следующим условиям*:

1) $T\leqslant m\leqslant C_{11}T$,

2) $$\frac{C_{12}}{\mu(t)\nu(t)}\leqslant s_i\leqslant\frac{C_{13}}{\mu(t)\nu(t)},\quad t\in D_i,\quad i=1,\dots,m,$$

3) $$\frac{1}{C_5}\leqslant\frac{s_i}{s_{i-1}}\leqslant C_5,\quad i=2,\dots,m.$$

4) $$\sum_{i=1}^{m}\psi\{\{|z-t_i|<s_i\}\cup\{|z-t_{i-1}|<s_{i-1}\}\cup\{|z-t_{i+1}|<s_{i+1}\}\}\leqslant C_{14}T,$$

5) если $|t-t_i|\geqslant s_i$, то $\frac{1}{\mu(t)\nu(t)|t-t_i|}\leqslant C_{15}$,

6) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{a\in A_i}\left(\frac{s_i}{|a-t_i|}\right)^r\leqslant C_{16}T,\quad r=2,3,\dots .$$

Утверждения пунктов 1)—5) следуют из свойств функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$. Докажем лишь п. 6).

По определению система отрезков $\{D_i\}$ совпадает с системой $\{\Delta_{jkl}\}$ (см. определение $\Phi(A)$). Это ставит в соответствие каждому индексу i тройной индекс jkl. Положим

$$A_{jkl}=A_i=\left\{a\in A: |a-\theta_{jkl}|\geqslant\frac{1}{\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})}\right\},$$

$$A_{jk}=\left\{a\in A: |a-\theta_{jk}|\geqslant\frac{1}{\mu(\theta_j)}\right\},$$

$$\tilde A_j=\{a\in A: |a-\theta_j|\geqslant 1\}.$$

Легко видеть, что $\tilde A_j\subset A_{jk}\subset A_{jkl}$. Представим выражение

$$\sum_{j=1}^{2T+2}\sum_{k=1}^{\mu(\theta_j)}\sum_{l=1}^{\nu(\theta_{jk})}\sum_{a\in A_{jkl}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})|a-\theta_{jkl}|)^r},$$

которое требуется оценить, в виде суммы двух слагаемых:

$$\sum_{j,k,l}\sum_{a\in A_{jkl}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})|a-\theta_{jkl}|)^r}=\sum_{j,k,l}\sum_{a\in A_{jkl}\setminus A_{jk}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})|a-\theta_{jkl}|)^r}+$$
$$+\sum_{j,k,l}\sum_{a\in A_{jk}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})|a-\theta_{jkl}|)^r}.$$

Оценим сначала первое слагаемое. Фиксируем индексы, j, k и обозначим через τ_l, $l=0,\ \pm1,\ \ldots$, точки вещественной прямой, разбивающие ее на отрезки равной длины. Эта система точек выбирается таким образом, чтобы множество точек τ_l, $l=1,\ \ldots,\ \nu(\theta_{jk})$, оказалось совпадающим с множеством точек θ_{jkl}, $l=1,\ \ldots,\ \nu(\theta_{jk})$.

Положим

$$P_l=\left\{\tau_l-\frac{1}{2\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})}\leqslant \operatorname{Re} t<\tau_l+\frac{1}{2\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})}\right\}\cap\left\{|t-\theta_{jk}|<\frac{1}{\mu(\theta_j)}\right\},$$
$$p_l=\psi\{P_l\}.$$

Отметим, что

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}p_l=\psi\left\{|t-\theta_{jk}|<\frac{1}{\mu(\theta_j)}\right\}\leqslant\psi\left\{|t-\theta_{jk}|<\frac{4}{\mu(\theta_{jk})}\right\}\leqslant 16\nu(\theta_{jk}).$$

Разбивая множество $\left\{|t-\theta_{jk}|<\frac{1}{\mu(\theta_j)}\right\}$, в котором могут лежать корни $a\in A_{jkl}\setminus A_{jk}$, на непересекающиеся подмножества $\{P_l\}$ и для каждого $\{P_l\}$ беря всякий раз самый плохой случай, когда все из p_l корней, лежащих в P_l, расположены наиболее близко к точке θ_{jkl}, получим неравенство

$$\sum_{l=1}^{\nu(\theta_{jk})}\sum_{a\in A_{jkl}\setminus A_{jk}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})|a-\theta_{jkl}|)^r}=\sum_{l=1}^{\nu(\theta_{jk})}\left\{\sum_{q=-\infty}^{l-2}\sum_{a\in P_q}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})|a-\theta_{jkl}|)^r}+\right.$$
$$+\sum_{q=l-1}^{l+1}\sum_{\substack{a\in P_q\\ a\in A_{jkl}\setminus A_{jk}}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})|a-\theta_{jkl}|)^r}+\sum_{q=l+2}^{\infty}\sum_{a\in P_q}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\nu(\theta_{jk})|a-\theta_{jkl}|)^r}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{q=-\infty}^{l-2}\frac{p_q}{\left(l-q-\frac{1}{2}\right)^r}+(p_{l-1}+p_l+p_{l+1})+\sum_{q=l+2}^{\infty}\frac{p_q}{\left(q-l-\frac{1}{2}\right)^r}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{l=-\infty}^{\infty}(p_{l-1}+p_l+p_{l+1})+\sum_{q=-\infty}^{\infty}p_q\sum_{\substack{l=-\infty\\ l\neq q,q\pm1}}^{\infty}\frac{1}{\left(|l-q|-\frac{1}{2}\right)^r}\leqslant C_{17}\nu(\theta_{jk}).$$

Суммируя теперь полученное неравенство по j и k, из свойств 4) и 5) функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ находим:

$$\sum_{j=1}^{2T+2}\sum_{k=1}^{\mu(\theta_j)}\sum_{l=1}^{\nu(\theta_{jk})}\sum_{a\in A_{jkl}\setminus A_{jk}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\,\nu(\theta_{jk})\,|a-\theta_{jkl}|)^r}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{2T+2}\sum_{k=1}^{\mu(\theta_j)}C_{17}\nu(\theta_{jk})\leqslant C_{17}\cdot C_{10}\sum_{j=1}^{2T+2}\mu(\theta_j)\leqslant C_9\cdot C_{10}\cdot C_{17}\cdot T=C_{18}T.$$

Таким образом, получена нужная оценка для первого слагаемого. Преобразуем второе слагаемое. Для этого заметим, что если

$$|a-\theta_{jk}|\geqslant\frac{1}{\mu(\theta_j)},\ \text{то}\ |\theta_{jk}-\theta_{jkl}|\leqslant\frac{1}{2\mu(\theta_j)}\leqslant\frac{1}{2}|a-\theta_{jk}|$$

и, следовательно, $|a-\theta_{jkl}|\geqslant\frac{1}{2}|a-\theta_{jk}|$, $l=1,\ldots,\nu(\theta_{jk})$. Поэтому при $\nu(\theta_{jk})\geqslant 2$

$$\sum_{l=1}^{\nu(\theta_{jk})}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\,\nu(\theta_{jk})\,|a-\theta_{jkl}|)^r}\leqslant$$

$$\leqslant 2^r\frac{1}{(\mu(\theta_j)\,\nu(\theta_{jk})\,|a-\theta_{jk}|)^r}\,\nu(\theta_{jk})\leqslant 2\frac{1}{(\mu(\theta_j)|a-\theta_{jk}|)^r},$$

а при $\nu(\theta_{jk})=1$ это неравенство тривиально. Таким образом, для второго слагаемого имеем:

$$\sum_{j,k,l}\sum_{a\in A_{jk}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\,\nu(\theta_{jk})|a-\theta_{jkl}|)^r}\leqslant 2\sum_{j,k}\sum_{a\in A_{jk}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\,|\,a-\theta_{jk}|)^r}.$$

Замечая, что получившееся выражение сходно по форме с первоначальным, и применяя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, будем иметь:

$$\sum_{j,k,l}\sum_{a\in A_{jkl}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\,\nu(\theta_{jk})\,|a-\theta_{jkl}|)^r}\leqslant C_{18}T+$$

$$+2\sum_{j,k}\sum_{a\in A_{jk}}\frac{1}{(\mu(\theta_j)\,|a-\theta_{jk}|)^r}\leqslant C_{18}T+C_{19}T+4\sum_{j=1}^{2T+2}\sum_{a\in\widetilde{A}_j}\frac{1}{|a-\theta_j|^r}\leqslant C_{16}T.$$

Лемма доказана.

Пусть $\Phi(A)$ и $\Phi(\widetilde{A})$ — два разбиения отрезка $[-T-1,\,T+1]$ на системы отрезков $\{D_i\}=\{\Delta_{jkl}\}$ и $\{\widetilde{D}_i\}=\{\widetilde{\Delta}_{jkl}\}$. Эти разбиения будем называть тождественными, если для всяких j,k,l $\Delta_{jkl}=\widetilde{\Delta}_{jkl}$. В противном случае разбиения будем называть различными.

ЛЕММА 10. *Если $n\leqslant 5T$, то число различных разбиений $\Phi(A)$ отрезка $[-T-1,\,T+1]$ не превосходит $C_{20}\cdot 2^T$.*

Доказательство. Всякое разбиение $\Phi(A)$ однозначно определяется двумя комплектами целых положительных чисел $\{\mu(\theta_j)\}$, $\{\nu(\theta_{jk})\}$,

$j=1, \ldots, 2T+2$, $k=1, \ldots, \mu(\theta_j)$. Но в силу свойств 4) и 5) функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ и в силу леммы 6 таких различных комплектов существует не больше, чем $C_{20}\cdot 2^T$. Лемма доказана.

§ 5. Построение сетей в пространстве многочленов

Будем говорить, что набор $\tilde{A}$ является ε-приближением набора A, если они состоят из одинакового числа элементов и если существует такая перестановка $\gamma(1), \ldots, \gamma(n)$ чисел $1, \ldots, n$ (n — число элементов в наборах), что

$$|a_k-\tilde{a}_{\gamma(k)}| \leqslant \varepsilon \max \left\{\frac{1}{\mu_A(a_k)\,\nu_A(a_k)},\ \rho(a_k)\right\}, \quad k=1, \ldots, n$$

($\rho(t)$ — расстояние от точки t до отрезка $[-T, T]$). Нижний индекс A у функций μ и ν означает, что они вычисляются по набору A. В дальнейшем всегда будем предполагать, что если $\tilde{A}$ является ε-приближением A, то соответствующая перестановка уже сделана, так что для $k=1, \ldots, n$ выполняется оценка:

$$|a_k-\tilde{a}_k| \leqslant \varepsilon \max \left\{\frac{1}{\mu_A(a_k)\,\nu_A(a_k)},\ \rho(a_k)\right\}.$$

Сразу же отметим два простых свойства, вытекающих из приведенного определения ε-приближения:

1) если $\tilde{A}$—ε-приближение A и $t\in[-T, T]$, то

$$\frac{1}{C_{21}} \leqslant \frac{\mu_{\tilde{A}}(t)}{\mu_A(t)} \leqslant C_{21}, \quad \frac{1}{C_{22}} \leqslant \frac{\nu_{\tilde{A}}(t)}{\nu_A(t)} \leqslant C_{22}.$$

2) Пусть $\tilde{A}$ — ε-приближение A и $\Phi(\tilde{A})$ — разбиение отрезка $[-T-1, T+1]$ на систему отрезков $\{D_i\}$ с центрами $\{t_i\}$ и длинами $\{s_i\}$, соответствующее $\tilde{A}$. Тогда если $|\tilde{a}_r-t_i| \geqslant s_i$, то $\left|\dfrac{\tilde{a}_r-a_r}{a_r-t_i}\right| \leqslant C_{23}\varepsilon$ (свойство 2 легко может быть получено из определения ε-приближения использованием предыдущего свойства и пункта 5 леммы 9).

Обозначим через Ω квадрат $\{|\mathrm{Re}\, t| \leqslant 2^T,\ |\mathrm{Im}\, t| \leqslant 2^T\}$, а через $\mathscr{L}$ — множество наборов A, состоящее из n точек ($n=1, 2, \ldots$ $\ldots, 2T+3[(T+1)^{\frac{3}{4}}]+3=\tilde{T}$), лежащих внутри Ω и таких, что если $a\in A$, то и комплексно сопряженная точка $\bar{a}\in A$. Эти ограничения связаны с тем, что в дальнейшем мы будем рассматривать наборы корней многочленов (см. лемму 1).

ЛЕММА 11. *В множестве наборов $\mathscr{L}$ существует ε-сеть, состоящая из $N_\varepsilon(\mathscr{L}) \leqslant 2^{\tilde{T}\log\frac{C_{24}}{\varepsilon}}$ элементов.*

Доказательство. Пусть β есть множество всех наборов $A \in \mathcal{L}$, дающих одно и то же разбиение Φ отрезка $[-T-1, T+1]$ на отрезки $\{D_i\}$. Построим ε-сеть множества β, состоящую из $N \leqslant 2^{T \log \frac{C_{25}}{\varepsilon}}$ элементов. Для этого квадрат Ω разделим на систему прямоугольников Ω_s, $s = 1, \ldots, q$, обладающую следующими свойствами:

$\{\Omega_s\}$ попарно не имеют общих внутренних точек;

$\bigcup\limits_{s=1}^{q} \Omega_s = \Omega$;

система $\{\Omega_s\}$ содержит квадраты $\{\operatorname{Re} t \in D_i,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant s_i\}$ и $\{\operatorname{Re} t \in D_i,\ -s_i \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant 0\}$ (s_i см. в определении $\Phi(A)$);

если прямоугольник Ω_s не имеет общих точек с отрезком $[-T, T]$, то его одномерный диаметр $d(\Omega_s)$ не превосходит расстояния $\rho(\Omega_s)$ от этого прямоугольника до отрезка $[-T, T]$; число q этих прямоугольников не превышает $C_{26}T$.

Систему отрезков D_i, $i = 1, \ldots, m$, доопределим до системы D_j^*, $j = 1, \ldots, M$, включая в нее, кроме отрезков $\{D_i\}$, все отрезки, являющиеся пересечениями прямоугольников Ω_s с вещественной осью. Отрезки $\{D_j^*\}$ попарно не имеют общих точек и

$$\bigcup_{j=1}^{M} D_j^* = [-2^T, 2^T], \qquad M \leqslant C_{26}T.$$

Фиксируем $C_{27}\varepsilon s_j^*$-сеть (s_j^* — длина отрезка D_j^*, а абсолютная константа $C_{27} < 1$ будет предполагаться достаточно малой) на отрезке D_j^*, состоящую из точек $a_j(k_j)$ $\left(k_j = 1, \ldots, \left[\frac{1}{C_{27}\varepsilon}\right]\right)$. В прямоугольнике Ω_s фиксируем $C_{27}\varepsilon d(\Omega_s)$-сеть, состоящую из точек $b_s(k_s)$ $\left(k_s = 1, \ldots, \frac{1}{[C_{27}\varepsilon]^2}\right)$. Будем предполагать точки $\{b_s(k_s)\}$ выбранными так, чтобы эта система вместе со всякой точкой $b_s(k_s)$ содержала и $\overline{b_s(k_s)}$.

Обозначим через $\tilde{\beta}$ множество наборов из $\mathcal{L}$, состоящих из точек $\{a_j(k_j)\}$ и $\{b_s(k_s)\}$. Если константа C_{27} достаточно мала, то для всякого набора $A \in \beta$ найдется набор $\tilde{A} \in \tilde{\beta}$, являющийся его ε-приближением, т. е. $\tilde{\beta}$ является ε-сетью для β. Оценим число N элементов этой ε-сети. Обозначим через $\tilde{\beta}(k, r)$ все наборы из $\hat{\beta}$, каждый из которых имеет ровно k точек на вещественной оси и $2r$ пар комплексносопряженных точек, а через $N(k, r)$ — число элементов $\tilde{\beta}(k, r)$ $(k + 2r \leqslant \tilde{T})$:

$$N(k, r) = \left\{\left(\frac{M}{C_{27}\varepsilon}\right)^k \cdot \frac{1}{k!}\right\} \times \left\{\left(\frac{q}{[C_{27}\varepsilon]^2}\right)^r \cdot \frac{1}{r!}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{C_{27}\varepsilon}\right)^{k+2r} C_{26}^{k+r} \cdot \frac{T^{k+r}}{k!\,r!} \leqslant \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\tilde{T}}.$$

Следовательно,

$$N \leqslant \sum_{k,r} N(k,r) \leqslant \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\widetilde{T}} \cdot (\widetilde{T})^2 \leqslant \left(\frac{C_{25}}{\varepsilon}\right)^{\widetilde{T}}.$$

Так как из леммы 10 следует, что $\mathscr{L}$ можно представить в виде объединения из не более, чем $C_{20}2^T$ подмножеств β_i, в каждом из которых существует ε-сеть, состоящая из $N_i \leqslant \left(\frac{C_{25}}{\varepsilon}\right)^{\widetilde{T}}$ элементов, то, значит, $N_\varepsilon(\mathscr{L}) \leqslant \left(\frac{C_{24}}{\varepsilon}\right)^{\widetilde{T}}$. Лемма доказана.

Пусть заданы два многочлена $P(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-a_k)$ и $\widetilde{P}(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-\widetilde{a}_k)$ с наборами корней $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\widetilde{A} = \{\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n\}$. Если $\widetilde{A}$ является ε-приближением A, то многочлены, вообще говоря, не обязаны быть близкими в относительной метрике. Введем еще ряд вспомогательных характеристик корней многочлена, в терминах которых можно будет сформулировать достаточные условия близости многочленов.

Фиксируем набор $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ и соответствующее ему разбиение $\Phi(A)$ отрезка $[-T-1, T+1]$ на систему отрезков $\{D_i\}$ (с центрами в точках t_i и длинами s_i). Через R_i будем обозначать комплект целых чисел $r(1 \leqslant r \leqslant n)$, определяемый следующим образом: r включается в R_i, если $|a_r - t_i| \geqslant s_i$, и r не включается в R_i, если $|a_r - t_i| < s_i$. Фиксируем набор $B=\{b_1, \ldots, b_n\}$ и положим

$$x_i^0(B) = \sum_{r \in R_i} \ln|b_r - t_i|,$$

$$x_i^k(B) = \sum_{r \in R_i}\left(\frac{s_i}{b_r - t_i}\right)^k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

ЛЕММА 12. *Если набор A является ε-приближением набора B, то выполняются неравенства*:

1)

$$|x_1^0(B) - x_1^0(A)| + |x_2^0(B) - x_2^0(A)| +$$
$$+\sum_{i=2}^{m-1}\left|\frac{(x_{i+1}^0(B) - x_{i+1}^0(A)) - (x_i^0(B) - x_i^0(A))}{s_{i+1}+s_i} -\right.$$
$$\left.-\frac{(x_i^0(B) - x_i^0(A)) - (x_{i-1}^0(B) - x_{i-1}^0(A))}{s_i + s_{i-1}}\right|(s_{i-1} + s_i + s_{i+1}) \leqslant C_{28}T\varepsilon,$$

2)

$$|x_1^1(B) - x_1^1(A)| + \sum_{i=2}^{m}\left|\frac{x_i^1(B) - x_i^1(A)}{s_i} - \frac{x_{i-1}^1(B) - x_{i-1}^1(A)}{s_{i-1}}\right|(s_{i-1}+s_i) \leqslant C_{29}T\varepsilon,$$

3) $$\sum_{i=1}^{m} |x_i^k(B) - x_i^k(A)| \leqslant C_{30} T\varepsilon \left(\frac{5}{4}\right)^k \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Начнем с доказательства неравенства 3). Из свойства 2) ε-приближений наборов и пункта 6 леммы 9 следует:

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i^k(B) - x_i^k(A)| = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{r \in R_i} \frac{s_i^k}{(b_r - t_i)^k} - \frac{s_i^k}{(a_r - t_i)^k} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{r \in R_i} \frac{s_i^k}{|a_r - t_i|^k} \left| \left(1 + \frac{a_r - b_r}{b_r - t_i}\right)^k - 1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{16} T k C_{23} \varepsilon (1 + C_{23}\varepsilon)^{k-1} \leqslant C_{30} T\varepsilon \left(\frac{5}{4}\right)^k \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

при достаточно малых ε. Неравенство 3) доказано.

Докажем теперь неравенство 2). Покажем, что $|x_1^1(B) - x_1^1(A)| \leqslant CT\varepsilon$. Из свойства 2) ε-приближений имеем:

$$|x_1^1(B) - x_1^1(A)| \leqslant \sum_{r \in R_1} \left| \frac{s_1}{b_r - t_1} - \frac{s_1}{a_r - t_1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r \in R_1} \frac{s_1}{|a_r - t_1|} \left| \left(1 + \frac{a_r - b_r}{b_r - t_1}\right) - 1 \right| \leqslant C_{23} n\varepsilon \leqslant 5C_{23} T\varepsilon.$$

Распишем общий член под знаком суммы:

$$\left| \frac{x_i^1(B) - x_i^1(A)}{s_i} - \frac{x_{i-1}^1(B) - x_{i-1}^1(A)}{s_{i-1}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{r \in R_i \cap R_{i-1}} \left[\left(\frac{1}{b_r - t_i} - \frac{1}{a_r - t_i} \right) - \left(\frac{1}{b_r - t_{i-1}} - \frac{1}{a_r - t_{i-1}} \right) \right] + \right.$$

$$+ \sum_{r \in R_i \setminus R_{i-1}} \left(\frac{1}{b_r - t_i} - \frac{1}{a_r - t_{i-1}} \right) - \sum_{r \in R_{i-1} \setminus R_i} \left(\frac{1}{b_r - t_{i-1}} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{a_r - t_{i-1}} \right) \right| \leqslant \sum_{r \in R_i \cap R_{i-1}} \frac{s_i + s_{i-1}}{2} \, \frac{1}{|(a_r - t_i)(a_r - t_{i-1})|} \times$$

$$\times \left| \left(1 + \frac{a_r - b_r}{b_r - t_i}\right) \left(1 + \frac{a_r - b_r}{b_r - t_{i-1}}\right) - 1 \right| + \sum_{r \in R_i \setminus R_{i-1}} \frac{1}{|a_r - t_i|} \times$$

$$\times \left| \left(1 + \frac{a_r - b_r}{b_r - t_i}\right) - 1 \right| + \sum_{r \in R_{i-1} \setminus R_i} \frac{1}{|a_r - t_{i-1}|} \left| \left(1 + \frac{a_r - b_r}{b_r - t_{i-1}}\right) - 1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\, C_{23}\varepsilon \left[\sum_{r \in R_i \cap R_{i-1}} \frac{s_i + s_{i-1}}{|a_r - t_i|\,|a_r - t_{i-1}|} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r \in R_i \setminus R_{i-1}} \frac{1}{|a_r - t_i|} + \sum_{r \in R_{i-1} \setminus R_i} \frac{1}{|a_r - t_{i-1}|} \right].$$

Умножив последнее неравенство на (s_i+s_{i-1}) и просуммировав его по i от 2 до m, из пункта 3 леммы 9 получим:

$$\sum_{i=2}^{m}\left|\frac{x_i^1(B)-x_i^1(A)}{s_i}-\frac{x_{i-1}^1(B)-x_{i-1}^1(A)}{s_{i-1}}\right|(s_i+s_{i-1})\leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon\sum_{i=2}^{m}\left[\sum_{r\in R_i}\frac{s_i^2}{|a_r-t_i|^2}+\sum_{r\in R_{i-1}}\frac{s_{i-1}^2}{|a_r-t_{i-1}|^2}+\right.$$

$$\left.+\psi_A\{|z-t_{i-1}|<s_{i-1}\}+\psi_A\{|z-t_i|<s_i\}\right].$$

Применяя к полученному неравенству пункты 4 и 6 леммы 9, получим требуемое неравенство 2).

Неравенство 1) доказывается почти так же, как и неравенство 2). Лемма доказана.

Введем вектор $x^k(B)=(x_1^k(B),\ldots,x_m^k(B))$ с нормой

$$\|x^k(B)\|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i^k(B)|.$$

ЛЕММА 13. *Пусть β — множество всех элементов $B\in\mathscr{L}$, для которых A является ε-приближением. Тогда β можно разбить на подмножества β_l, $l=1,\ldots,L$, $L\leqslant C_{31}^T$, так, чтобы для всякого l и для всех наборов $B\in\beta_l$ и $\tilde{B}\in\beta_l$ выполнялись неравенства*:

$$\|x^k(B)-x^k(\tilde{B})\|\leqslant\varepsilon\left(\frac{3}{2}\right)^k\quad(k=0,1,\ldots).$$

Доказательство. Пусть $x^{k,1},\ldots,x^{k,p_k}$ — $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^k$-сеть множества, являющегося объединением векторов $x^k(B)$ (B пробегает все значения из β). Покажем, что ее можно выбрать так, чтобы

$$\log p_k\leqslant\tilde{C}_{31}Tk\left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Действительно, в силу пункта 3 предыдущей леммы при $k=2,3,\ldots$

$$\sum_{i=1}^{m}|x_i^k(B)-x_i^k(A)|\leqslant C_{30}T\varepsilon\left(\frac{5}{4}\right)^k\leqslant 2C_{30}\left(\frac{5}{6}\right)^k m\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

и, следовательно, из леммы 6 имеем:

$$\log p_k\leqslant C\left(\frac{5}{6}\right)^k m\max\left\{1,\log\frac{1}{C_{30}\left(\frac{5}{6}\right)^k}\right\}\leqslant\tilde{C}_{31}Tk\left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Точно так же при $k=0, 1$, в силу пунктов 1 и 2 предыдущей леммы, из лемм 8 и 7 имеем:

$$\log p_0 \leqslant \widetilde{C}_{31}/T, \quad \log p_1 \leqslant C_{31}T.$$

Пусть $\beta_l = \beta^{r_0, r_1, \ldots}$ $(1 \leqslant r_i \leqslant p_i)$ состоит из всех наборов $B \in \beta$ таких, что $\|x^k(B) - x^{k, r_k}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k$.

Число L множеств β_l не превосходит

$$p_0 \times p_1 \times \ldots \leqslant 2^{\widetilde{C}_{31}T\left(1+\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)} \leqslant C_{31}^T$$

и объединение множеств β_l покрывает все множество β. Легко видеть, что для любых B и $\widetilde{B}$ из одного и того же β_l

$$\|x^k(B) - x^k(\widetilde{B})\| \leqslant \varepsilon\left(\frac{3}{2}\right)^k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 14. *Пусть $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ и $\widetilde{B} = \{\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\}$ — два набора, принадлежащие одному и тому же множеству β_l,*

$$P_i(t) = \prod_{r \in R_i} (t - b_r), \quad \widetilde{P}_i(t) = \prod_{r \in R_i} (t - \widetilde{b}_r), \quad i = 1, \ldots, m$$

(обозначение R_i см. перед леммой 12). Тогда для всех i при $t \in D_i$

$$|\widetilde{P}_i(t) - P_i(t)| \leqslant 6\varepsilon \min\{|P_i(t)|, |\widetilde{P}_i(t)|\}.$$

Доказательство. Покажем, что $\left|\ln \frac{\widetilde{P}_i(t)}{P_i(t)}\right| \leqslant 5\varepsilon$ при $t \in D_i$:

$$\left|\ln \frac{\widetilde{P}_i(t)}{P_i(t)}\right| = \left|\ln \prod_{r \in R_i} \frac{t - \widetilde{b}_r}{t - b_r}\right| \leqslant \left|\ln \prod_{r \in R_i} \frac{t_i - \widetilde{b}_r}{t_i - b_r}\right| +$$

$$+ \left|\ln \prod_{r \in R_i} \frac{1 + \dfrac{t - t_i}{t_i - \widetilde{b}_r}}{1 + \dfrac{t - t_i}{t - b_r}}\right|.$$

Первое слагаемое равно $|x_i^0(\widetilde{B}) - x_i^0(B)|$ и поэтому меньше ε. Оценим второе слагаемое. Так как при наших условиях $\left|\frac{t - t_i}{t_i - b_r}\right| < 1$ и $\left|\frac{t - t_i}{t_i - \widetilde{b}_r}\right| < 1$, то допустимо разложение в ряд

$$\left|\ln\prod_{r\in R_i}\frac{1+\dfrac{t-t_i}{t_i-\widetilde{b}_r}}{1+\dfrac{t-t_i}{t_i-b_r}}\right| = \left|\sum_{r\in R_i}(t-t_i)\left(\frac{1}{t_i-\widetilde{b}_r}-\frac{1}{t_i-b_r}\right)-\right.$$

$$\left. -\frac{(t-t_i)^2}{2}\left(\frac{1}{(t_i-\widetilde{b}_r)^2}-\frac{1}{(t_i-b_r)^2}\right)+\ldots\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|t-t_i|}{s_i}\,|x_i^1(B)-x_i^1(\widetilde{B})|+\frac{|t-t_i|^2}{2s_i^2}\,|x_i^2(B)-x_i^2(\widetilde{B})|+\ldots\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon\left(\frac{3}{2}\right)^2+\ldots\leqslant 4\varepsilon.$$

Таким образом, $\left|\ln\dfrac{\widetilde{P}_i(t)}{P_i(t)}\right|\leqslant 5\varepsilon$ при $t\in D_i$. Следовательно,

$$1-6\varepsilon\leqslant\frac{\widetilde{P}_i(t)}{P_i(t)}\leqslant 1+6\varepsilon,$$

откуда

$$|\widetilde{P}_i(t)-P_i(t)|\leqslant 6\varepsilon\,|P_i(t)|.$$

Аналогично,

$$|\widetilde{P}_i(t)-P_i(t)|\leqslant 6\varepsilon|\widetilde{P}_i(t)|.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 15. *Пусть наборы* $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ *и* $\widetilde{B}=\{\widetilde{b}_1,\ldots,\widetilde{b}_n\}$ *принадлежат одному и тому же* β_l,

$$g(t)=\varphi(t)(t-b_1)\ldots(t-b_n),$$

$$\widetilde{g}(t)=\varphi(t)(t-\widetilde{b}_1)\ldots(t-\widetilde{b}_n)$$

($\varphi(t)$ *см. в лемме* 1). *Тогда*

$$|g(t)-\widetilde{g}(t)|\leqslant C_{32}\varepsilon\min\{\max_{t-1\leqslant x\leqslant t+1}|g(x)|,\ \max_{t-1\leqslant x\leqslant t+1}|\widetilde{g}(x)|\},\quad t\in[-T,T].$$

Доказательство. Положим

$$Q_i(t)=\prod_{r\notin R_i}(t-b_r),\qquad \widetilde{Q}_i(t)=\prod_{r\notin R_i}(t-\widetilde{b}_r).$$

Таким образом, для всех i

$$g(t)=\varphi(t)P_i(t)Q_i(t),\qquad \widetilde{g}(t)=\varphi(t)\widetilde{P}_i(t)\widetilde{Q}_i(t).$$

Из определения множества индексов $\{R_i\}$ и пункта 2 леммы 9 следует, что число p_i сомножителей в $Q_i(t)$ и $\widetilde{Q}_i(t)$ удовлетворяет неравенству

$$p_i=\psi_A\{|z-t_i|<s_i\}\leqslant\psi_A\left\{|z-t_i|<\frac{C_{13}}{\mu_A(t_i)\,\nu_A(t_i)}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\psi_A\left\{|z-t_i|<\frac{C_{13}}{\mu_A(t_i)}\right\}\leqslant C_{13}^2\nu_A(t_i).$$

Поэтому из свойства 2) функции $\nu_A(t)$ получаем, что при $t\in D_i$ $p_i\leqslant C_{33}\nu_A(t)$.

Пусть $t\in D_i$. Тогда, полагая $p=p_i$, имеем:

$$|g(t)|\left|1-\frac{\widetilde{Q}_i(t)}{Q_i(t)}\right|=|g(t)|\left|1-\prod_{r\notin R_i}\left(1+\frac{b_r-\widetilde{b}_r}{t-b_r}\right)\right|=$$

$$=|g(t)|\left|\left(\frac{\varepsilon_1}{t-b_{r_1}}+\ldots+\frac{\varepsilon_p}{t-b_{r_p}}\right)+\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(t-b_{r_1})(t-b_{r_2})}+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots+\frac{\varepsilon_{p-1}\varepsilon_p}{(t-b_{r_{p-1}})(t-b_{r_p})}\right)+\ldots+\frac{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p}{(t-b_{r_1})\ldots(t-b_{r_p})}\right|,$$

где $r_1,\ldots,r_p$ — индексы, не принадлежащие R_i,

$$|\varepsilon_s|=|b_{r_s}-\widetilde{b}_{r_s}|\leqslant|a_{r_s}-b_{r_s}|+|a_{r_s}-\widetilde{b}_{r_s}|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\max\left\{\frac{1}{\mu_B(b_{r_s})\,\nu_B(b_{r_s})},\ \rho(b_{r_s})\right\}+\varepsilon\max\left\{\frac{1}{\mu_{\widetilde{B}}(\widetilde{b}_{r_s})\,\nu_{\widetilde{B}}(\widetilde{b}_{r_s})},\ \rho(\widetilde{b}_{r_s})\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_{21}C_{22}\varepsilon\frac{1}{\mu_A(t)\,\nu_A(t)}=\frac{C_{34}\varepsilon}{\mu_A(t)\,\nu_A(t)}\quad\text{при } t\in D_i.$$

Из леммы 5 и свойства 1) ε-приближений наборов получаем:

$$|g(t)|\left|1-\frac{\widetilde{Q}_i(t)}{Q_i(t)}\right|\leqslant C_{34}\varepsilon\frac{p}{\mu_A(t)\,\nu_A(t)}\,C_4\mu_B(t)\max_{t-1\leqslant x\leqslant t+1}|g(x)|+\ldots$$

$$\ldots+C_p^p(C_{34}\varepsilon)^p\frac{1}{(\mu_A(t)\,\nu_A(t))^p}(C_4\mu_B(t))^p\max_{t-1\leqslant x\leqslant t+1}|g(x)|\leqslant C\varepsilon\max_{t-1\leqslant x\leqslant t+1}|g(x)|.$$

Следовательно,

$$|g(t)-\widetilde{g}(t)|\leqslant|\varphi(t)P_i(t)Q_i(t)-\varphi(t)\widetilde{P}_i(t)Q_i(t)|+$$

$$+|\varphi(t)\widetilde{P}_i(t)Q_i(t)-\varphi(t)\widetilde{P}_i(t)\widetilde{Q}_i(t)|\leqslant|g(t)|\left|1-\frac{\widetilde{P}_i(t)}{P_i(t)}\right|+$$

$$+\left|\frac{\widetilde{P}_i(t)}{P_i(t)}\right||g(t)|\left|1-\frac{\widetilde{Q}_i(t)}{Q_i(t)}\right|\leqslant C_{32}\varepsilon\max_{t-1\leqslant x\leqslant t+1}|g(x)|.$$

Аналогично,

$$|g(t)-\widetilde{g}(t)|\leqslant C_{32}\varepsilon\max_{t-1\leqslant x\leqslant t+1}|g(x)|.$$

Лемма доказана.

§ 6. Доказательство теоремы

Мы должны показать, что $H_{(\varepsilon,\delta)}(B_\sigma, T) \leqslant \frac{2\sigma T}{\pi} \log \frac{C}{\varepsilon}$ (см. пояснение после формулировки теоремы § 1). Фиксируем $T \geqslant \frac{3C_1}{\delta}$ (C_1 см. в лемме 1). По лемме 1 всякая функция $f(t)$ из B_π равномерно на отрезке $[-T-1, T+1]$ приближается с точностью $\delta/3$ функцией вида

$$g(t) = M\varphi(t) R(t).$$

Множество функций указанного вида, обладающих свойствами, перечисленными в лемме 1, обозначим через G. Всякая функция $g(t) \in G$ однозначно определяется соответствующей ей константой M и набором $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ корней многочлена $R(t)$. Обозначим через $\widetilde{\mathscr{L}}$ множество наборов A, соответствующих функциям $g(t) \in G$. Сопоставляя определения $\widetilde{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L}$ определено перед леммой 11), получим $\widetilde{\mathscr{L}} \subset \mathscr{L}$.

По лемме 11 в множестве наборов $\mathscr{L}$ можно выбрать ε'-сеть, состоящую из $q \leqslant 2^{\widetilde{T} \log \frac{C_{24}}{\varepsilon'}}$ наборов $A', \ldots, A^q$, где $\widetilde{T} = 2T + 3[(T+1)^{3/4}] + 3$. Обозначим через β^l множество всех наборов $B \in \mathscr{L}$, для которых A^l является ε-приближением. Множество β^j разобьем на подмножества $\beta_l = \beta_l^j$, $l = 1, \ldots, L$, $L \leqslant C_{31}^T$ (см. лемму 13).

Выберем в каждом множестве по представителю B_l^j, $j = 1, \ldots, q$, $l = 1, \ldots, L$, и обозначим через $g_l^j(t)$ функцию $\varphi(t) \prod (t - b)$ (b пробегает все значения набора B_l^j).

Фиксируем систему чисел $\{M_i\}$, $-s \leqslant i \leqslant s$,

$$s = \log_{(1+\varepsilon)} \frac{T^{C_2 T} \cdot 2^{C_{35} T^2}}{\delta},$$

такую, что $M_{-i} = -M_i$, $M_0 = 0$, $M_1 = \frac{\delta}{2^{C_{35} T^2}}$ и при положительных i

$$M_{i+1} = M_i (1 + \varepsilon).$$

Покажем, что множество G^*, состоящее из функций

$$g_{l,i}^j(t) = M_i g_l^j(t), \quad -s \leqslant i \leqslant s, \quad j = 1, \ldots, q, \quad l = 1, \ldots, L,$$

при надлежащем выборе ε' образует (ε, δ)-сеть множества B_π на отрезке $[-T, T]$.

Фиксируем $g(t) = M\varphi(t) R(t)$ из множества G. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — набор корней многочлена $R(t)$. Этот набор принадлежит $\widetilde{\mathscr{L}} \subset \mathscr{L}$, поэтому существуют j, l такие, что $A \in \beta_l^j$. Из леммы 15 следует, что

$$\left| \varphi(t) \prod_{i=1}^{n} (t - a_i) - g_l^j(t) \right| \leqslant C_{32} \varepsilon' \max_{t-1 \leqslant x \leqslant t+1} \left| \varphi(x) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) \right|.$$

Пусть для определенности $M \geqslant 0$ и i таково, что

$$M_i \leqslant M < M_{i+1}.$$

Если $M_i = 0$, то

$$|g(t) - g_{l,i}^{(j)}| \leqslant M_1 \cdot \left|\varphi(t) \prod_{i=1}^{n} (t - a_i)\right| \leqslant \frac{\delta}{3}.$$

Если $M_i \neq 0$, то

$$|g(t) - g_{l,i}^{j}(t)| = \left|M\varphi(t) \prod_{i=1}^{n} (t - a_i) - M_i g_l^i(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |g(t)| \cdot \left|1 - \frac{M_i}{M}\right| + M_i \left|\varphi(t) \prod_{i=1}^{n} (t - a_i) - g_l^j(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |g(t)|\varepsilon + \frac{M_i}{M} C_{32}\varepsilon' \max_{t-1 \leqslant x \leqslant t+1} |g(x)| \leqslant C_{36}\varepsilon' \max_{t-1 \leqslant x \leqslant t-1} |g(x)|.$$

Итак,

$$|g(t) - g_{l,i}^{(j)}(t)| \leqslant C_{36}\varepsilon' \max_{t-1 \leqslant x \leqslant t+1} |g(x)| + \frac{\delta}{3}, \quad t \in [-T, T].$$

Как указывалось выше, для всякой функции $f(t) \in B_\pi$ найдется функция $g(t) \in G$ такая, что $|g(t) - f(t)| \leqslant \frac{\delta}{3}$, $t \in [-T-1, T+1]$, а так как эта функция $g(t)$ может быть приближена функцией $g_{l,i}^j$ с $(C_{36}\varepsilon', \delta/3)$-точностью, то

$$|f(t) - g_{l,i}^j(t)| \leqslant |f(t) - g(t)| + |g(t) - g_{l,i}^j(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{3} + C_{36}\varepsilon' \max_{t-1 \leqslant x \leqslant t+1} |g(x)| + \frac{\delta}{3} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{3}(2 + C_{36}\varepsilon') + C_{36}\varepsilon' \max_{t-1 \leqslant x \leqslant t+1} |f(x)|.$$

Полагая ε' равным ε / C_{36}, получим:

$$|f(t) - g_{l,i}^j(t)| \leqslant \varepsilon \max_{t-1 \leqslant x \leqslant t+1} |f(x)| + \delta, \quad t \in [-T, T].$$

Итак, множество G^* является (ε, δ)-сетью пространства функций из B_π на отрезке $[-T, T]$. Число элементов этой сети равно

$$q \times L \times 2s \leqslant 2^{T' \log \frac{C_{24}}{\varepsilon'}} \times C_{31}^T \times \log_{(1+\varepsilon)} \frac{T^{C_2 T} 2^{C_{35} T^2}}{\delta}.$$

Следовательно,

$$N_{(\varepsilon,\delta)}(B_\pi, T) \leqslant 2^{\widetilde{T} \log \frac{C_{37}}{\varepsilon}} = 2^{(2T + 3[(T+1)^{3/4}] + 3) \log \frac{C_{37}}{\varepsilon}}.$$

Поэтому если $T \geqslant C_{38}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^4$ и константа C_{38} достаточно велика, то

$$\tilde{T}\log\frac{C_{37}}{\varepsilon} \leqslant 2T\log\frac{C_{39}}{\varepsilon}$$

и, значит,

$$H_{(\varepsilon,\delta)}(B_\pi, T) \leqslant 2T\log\frac{C_{39}}{\varepsilon}.$$

Так как заменой переменных $t' = \frac{t}{\sigma}$ класс B_σ может быть преобразован в B_π, то при

$$T \geqslant C_{40}\sigma\max\left\{\frac{1}{\delta}, \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^4\right\}$$

имеем:

$$H_{(\varepsilon,\delta)}(B_\sigma, T) \leqslant \frac{2\sigma T}{\pi}\log\frac{C_{39}}{\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

Поступило
4.IV.1974

Литература

[1] **Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.**, ε-энтропия, ε-емкость множеств в функциональных пространствах, Успехи матем. наук, т. 14, вып. 2 (1959), 3—86.
[2] **Левин Б. Я.**, Целые функции (курс лекций), М., Ин-т механики МГУ, 1971.
[3] **Бернштейн С. Н.**, Собр. соч., т. 2, М., Изд-во АН СССР (1952), стр. 443.
[4] **Бернштейн С. Н.**, Собр. соч., т. 1, М., Изд-во АН СССР (1952), стр. 21.