T. V. Apraksina, Diagonal polygons over semigroups of isotopic transformations, *Chebyshevskii Sb.*, 2011, Volume 12, Issue 1, 10–16

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Посвящается 65-ой годовщине со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина

Том 12 Выпуск 1 (2011)

УДК 512.579, 512.534.5

ДИАГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИГОНЫ НАД ПОЛУГРУППАМИ ИЗОТОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Т. В. Апраксина (г. Москва)

Аннотация

В данной работе находятся условия цикличности диагональных полигонов над полугруппами изотонных преобразований частично упорядоченного множества и полугруппой непрерывных преобразований отрезка числовой прямой.

Ключевые слова: полигон над полугруппой, диагональный полигон, полугруппа изотонных преобразований, полугруппа непрерывных преобразований

Правым полигоном над полугруппой S (см. [1]) называется множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$ и выполняется тождество $x(st) = (xs)t$ для $x \in X$, $s, t \in S$. *Левый полигон* определяется двойственным образом. *Биполигон* над полугруппами S и T – это множество X, являющееся левым полигоном над S и правым полигоном над T, причем $(sx)t = s(xt)$ для всех $x \in X$, $s \in S$, $t \in T$. Очевидно, множество $S \times S$ будет правым полигоном над S, если действие определить следующим образом: $(x, y)s = (xs, ys)$, и левым полигоном относительно действия $s(x, y) = (sx, sy)$. Эти полигоны назовем *диагональным правым* и *диагональным левым* соответственно. *Диагональным биполигоном* над полугруппой S называется множество $X = S \times S$, на котором определено действие полугруппы S слева и справа по вышеуказанным правилам. Диагональный правый полигон называется *циклическим*, если существует порождающая его пара элементов, т.е. $(\alpha_0, \beta_0)S = S \times S$ для некоторых $\alpha_0, \beta_0 \in S$. Циклический диагональный левый полигон и диагональный биполигон определяются аналогично, а именно: $S(\alpha_0, \beta_0) = S \times S$ и $S(\alpha_0, \beta_0)S = S \times S$ соответственно.

В работе [2] было доказано (см. теоремы 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3), что диагональный правый полигон $(S \times S)_S$, диагональный левый полигон ${}_S(S \times S)$

и диагональный биполигон $_S(S \times S)_S$ являются циклическими, если $S = T_X$, P_X или B_X, где X — бесконечное множество, T_X — полугруппа преобразований множества X, P_X — полугруппа частичных преобразований, а B_X — полугруппа бинарных отношений на множестве X. Цель настоящей работы – получить условия цикличности диагональных полигонов над полугруппами изотонных преобразований частично упорядоченного множества и полугруппой непрерывных преобразований отрезка числовой прямой.

Для произвольного множества X через T_X мы обозначаем полугруппу всех преобразований множества X, т.е. отображений $\alpha : X \to X$ с умножением $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$. Пусть X – частично упорядоченное множество. Отображение $\alpha : X \to X$ называется *изотонным*, если оно сохраняет порядок, т.е. $x \leqslant y \Rightarrow x\alpha \leqslant y\alpha$ для любых $x, y \in X$. Нетрудно видеть, что множество O_X всех изотонных отображений $\alpha : X \to X$ образует полугруппу относительно операции умножения отображений. Также ясно, что O_X является подполугруппой полугруппы T_X. Частичным отображением множества X называется отображение $\alpha : X_1 \to X$, где $X_1 \subseteq X$. Множество X_1 называется *областью определения* отображения α и обозначается $\operatorname{dom} \alpha$. Через P_X обозначим полугруппу всех частичных преобразований. Частичное $\alpha \in P_X$ отображение называется изотонным, если $\forall x, y \in \operatorname{dom} \alpha\ x \leqslant y \Rightarrow x\alpha \leqslant y\alpha$ (см. [4]). Частичные изотонные преобразования множества образуют полугруппу, которую мы обозначим PO_X.

Следующая теорема показывает, что цикличность диагональных левых и правых полигонов $S \times S$ над полугруппой S равносильна цикличности полигонов $(\underbrace{S \times ... \times S}_{n})$.

Теорема 1. *Если диагональные полигоны $(S \times S)_S$ или $_S(S \times S)$ являются циклическими, то полигоны $(\underbrace{S \times ... \times S}_{n})_S$ и $_S(\underbrace{S \times ... \times S}_{n})$ для любого натурального числа n также являются циклическими.*

Доказательство. Ясно, что доказательство для $_S(S^n)$ аналогично доказательству для $(S^n)_S$, поэтому достаточно рассмотреть случай диагонального правого полигона $(S^n)_S$.

Пусть (s_0, t_0) — порождающая пара диагонального правого полигона $(S \times S)_S$, т.е. $\forall a, b \in S\ \exists p :\ \ s_0p = a,\ t_0p = b$. Убедимся, что $(s_0s_0, s_0t_0, t_0s_0, t_0t_0)$ — порождающая четверка для диагонального правого полигона $(S \times S \times S \times S)_S$. По условию имеем, что для некоторого $k \in S$ $s_0k = a$, $t_0k = b$. Аналогично, $s_0l = c$, $\ \ t_0l = d$ для некоторого $l \in S$. Кроме того, существует такое p, что $s_0p = k$, $t_0p = l$. Отсюда получается, что $s_0s_0p = a$, $t_0s_0p = b$, $s_0t_0p = c$, $t_0t_0p = d$. Таким образом, полигон $(S \times S \times S \times S)_S$ является циклическим с порождающей четверкой $(s_0s_0, s_0t_0, t_0s_0, t_0t_0)$.

Применяя эти рассуждения несколько раз, нетрудно показать, что все диагональные правые полигоны $(S^{2^n})_S$, а значит и все полигоны $(S^n)_S$, являются циклическими. $\square$

Рассмотрим теперь диагональные полигоны над полугруппами изотонных преобразований частично упорядоченных множеств. Как обычно, линейно упорядоченное множество мы называем *цепью.* Полученные далее утверждения о диагональных полигонах над такими полугруппами можно рассматривать как естественное развитие исследований из [2]. Для любого множества X и элемента $a \in X$ обозначим через θ_a *константное отображение* $X \to X$, соответствующее этому элементу, т.е. $x\theta_a = a$ при всех $x \in X$.

Теорема 2. *Если X — бесконечная цепь, то диагональные полигоны $(O_X \times O_X)_{O_X}$ и ${}_{O_X}(O_X \times O_X)$ не являются циклическими.*

Доказательство. Пусть диагональный правый полигон $(O_X \times O_X)_{O_X}$ над полугруппой O_X изотонных преобразований бесконечной цепи X является циклическим. Тогда существует порождающая пара (α_0, β_0).
Следовательно, $\forall \alpha, \beta\ \exists \gamma :\ \alpha_0\gamma = \alpha,\ \beta_0\gamma = \beta.$

Пусть a и b — различные элементы цепи X и $a < b$. Возьмем в качестве α и β константные отображения, а именно: $x\alpha = a$, $x\beta = b$ при всех $x \in X$. Найдем $\gamma \in O_X$ такое, что $\alpha_0\gamma = \alpha$ и $\beta_0\gamma = \beta$. Тогда $x\alpha_0\gamma = a$ и $x\beta_0\gamma = b$ при всех $x \in X$. Так как $a < b$, то $x\alpha_0 < x\beta_0$ (действительно, если $x\alpha_0 \geqslant x\beta_0$, то $x\alpha_0\gamma \geqslant x\beta_0\gamma$, т.е. $a \geqslant b$ – противоречие.

Аналогичным образом найдем такое $\delta \in O_X$, что $\alpha_0\delta = \theta_b$ и $\beta_0\delta = \theta_a$. Имеем: $x\alpha_0\delta = b > a = x\beta_0\delta$, поэтому $x\alpha_0 > x\beta_0$ – противоречие.

Пусть теперь диагональный левый полигон ${}_{O_X}(O_X \times O_X)$ над полугруппой O_X изотонных преобразований бесконечной цепи X является циклическим и пусть (α_0, β_0) – порождающая пара. Тогда $\forall \alpha, \beta\ \ \exists \gamma :\ \ \gamma\alpha_0 = \alpha,\ \ \gamma\beta_0 = \beta.$

Пусть a и b — различные элементы цепи X и $a < b$. Возьмем в качестве α тождественное отображение: $\alpha = 1_X$, а в качестве β — константное отображение, а именно: $\beta = \theta_a$. Тогда $\exists \gamma :\ \gamma\alpha_0 = 1_X$, $\gamma\beta_0 = \theta_a$. Для элементов a, b имеем: $a = a\,\gamma\alpha_0,\ \ b = b\gamma\alpha_0$ и $a = a\,\gamma\beta_0 = b\gamma\beta_0$.

Пусть $p = a\gamma$, $q = b\gamma$.

Теперь положим $\alpha = 1_X$, $\beta = \theta_b$. Найдем такое $\delta \in O_X$, что $\delta\alpha_0 = 1_X$, $\delta\beta_0 = \theta_b$. Таким образом, имеем: $a = a\delta\alpha_0$, $b = b\delta\alpha_0$ и $b = a\delta\beta_0 = b\delta\beta_0$.

Положим теперь $p' = a\delta$, $q' = b\delta$.

Так как $a = p\alpha_0 = p'\alpha_0 < b = q\alpha_0 = q'\alpha_0$, то $p' < q$. Но тогда получается, что $p'\beta_0 \leqslant q\beta_0$, то есть $b \leqslant a$ — противоречие. □

Сформулируем условия, при которых, диагональный правый полигон над полугруппой частичных изотонных преобразований является циклическим.

Теорема 3. *Пусть X — частично упорядоченное множество. Диагональный правый полигон $(PO_X \times PO_X)_{PO_X}$ является циклическим в том и только том случае, если множество X содержит подмножества $X_1,\ X_2$ такие что:*

(i) $X_1 \cong X_2 \cong X$,

(ii) $x \nleqslant y$ *при* $x \in X_1,\ y \in X_2$ *и* $y \in X_1,\ x \in X_2$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $(PO_X \times PO_X)_{PO_X}$ — диагональный правый полигон и (α_0, β_0) — его порождающая пара. Тогда существует отображение $\gamma \in PO_X$ такое, что: $\gamma\alpha_0 = \gamma\beta_0 = 1_X$. Из этих равенств получаем, что $\operatorname{dom}\alpha_0 = \operatorname{dom}\beta_0 = $ X, т.е. $\alpha_0,\ \beta_0 \in O_X$. Пусть $X\alpha_0 = X_1, \quad X\beta_0 = X_2$. Так как $\gamma\alpha_0 = 1_X$, то α_0 взаимно однозначно отображает X на X_1. Аналогично этому β_0 — взаимно однозначное отображение X на X_2.

Докажем, что отображения $\alpha_0 : X \to X_1$ и $\beta_0 : X \to X_2$ являются изоморфизмами частично упорядоченных множеств. Ясно, что это достаточно проверить для α_0. Пусть $x, y \in X$ и $x \leqslant y$. Тогда $x\alpha_0 \leqslant y\alpha_0$ ввиду изотонности отображения α_0. Пусть элементы $u,\ v \in X_1$. Обозначим $u\gamma = x$, $v\gamma = y$. Так как отображение γ изотонно, то $x \leqslant y$, следовательно, $u\gamma \leqslant v\gamma$. Поскольку $u,\ v \in X_1 = \operatorname{im}\alpha_0$, то $u = x\alpha_0, \quad v = y\alpha_0$ при некоторых $x, y \in X$. Имеем: $x = x\alpha_0\gamma = u\gamma \leqslant v\gamma = y\alpha_0\gamma = y$, т.е. $x \leqslant y$, что и требовалось доказать.

Докажем, что множества $X_1,\ X_2$ не содержат общих элементов, т.е. $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Предположим, что это не так, тогда существует $x \in X_1 \cap\ X_2$. Значит, существуют $u,\ v \in X$ такие, что $x = u\alpha_0 = v\beta_0$. Возьмем любые элементы $a, b \in X$, такие что $a \neq b$ (если таких элементов нет, то X — антицепь и доказательство очевидно). Так как пара (α_0, β_0) — образующий элемент правого диагонального полигона $(PO_X \times PO_X)_{PO_X}$, то $\exists\delta : \quad \alpha_0\delta = \theta_a, \quad \beta_0\delta = \theta_b$ при некотором $\delta \in PO_X$. Имеем $u\alpha_0\delta = a, \quad v\beta_0\delta = b$. Отсюда видно, что $u\alpha_0 \neq v\beta_0$, а это противоречит сделанному предположению.

Докажем теперь, что если $x \in X_1,\ y \in X_2$, то элементы x и y несравнимы.

Действительно, пусть $x \in X_1,\ y \in X_2$ и, например, $x < y$. Найдем отображение $\phi \in PO_X$ такое, что $\alpha_0\phi = \theta_y, \quad \beta_0\phi = \theta_x$. Возьмем элементы $u,\ v \in X$такие, что $u\alpha_0 = x, \quad v\beta_0 = y$. Имеем: $y = u\alpha_0\phi = x\phi, \quad x = v\beta_0\phi = y\phi$, откуда видно, что ϕ не является изотонным преобразованием — противоречие.

Достаточность. Пусть $X_1,\ X_2$ — подмножества, удовлетворяющие требуемым условиям и $\alpha_0 : X \to X_1$, $\beta_0 : X \to X_2$ — соответствующие изоморфизмы частично упорядоченных множеств. Докажем, что (α_0, β_0) — порождающая пара диагонального правого полигона $(PO_X \times PO_X)_{PO_X}$. Пусть α_1, β_1— произвольные элементы, $\alpha_1, \beta_1 \in PO_X$. Положим $A = \operatorname{dom}\alpha_1, \quad$ B $= \operatorname{dom}\beta_1$. Определим частичное отображение σ правилом:

$$x\sigma = \begin{cases} x\alpha_0^{-1}\alpha_1, & \text{если } x \in A\alpha_0, \\ x\beta_0^{-1}\beta_1, & \text{если } x \in B\beta_0, \\ \text{неопределено, если } x \notin A\alpha_0 \cup B\beta_0. \end{cases}$$

Так как $A\alpha_0 \subseteq X_1, \quad B\beta_0 \subseteq X_2$ и $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, то σ определено корректно. Ясно, что σ изотонное преобразование.

Пусть $x \in X$, тогда $x\alpha_0\sigma$ определено в том и только том случае, если $x\alpha_0 \in A\alpha_0$, т.е. $x \in A$. Таким образом, $\operatorname{dom}(\alpha_0\sigma) = $ A. Аналогично получаем, что $\operatorname{dom}(\beta_0\sigma) = $ B. Если $x \in A$, то $x\alpha_0\sigma = x\alpha_0\alpha_0^{-1}\alpha_1 = x\alpha_1$, а значит, $\alpha_0\sigma = \alpha_1$. Аналогично получаем, что $\beta_0\sigma = \beta_1$. Следовательно, $(\alpha_0, \beta_0)\sigma = (\alpha_1, \beta_1)$. $\square$

Теорема 4. *Пусть X — частично упорядоченное множество. Диагональный лравый полигон над полугруппой изотонных преобразований O_X является циклическим в том и только том случае, если множество X содержит два подмножества X_1, X_2 такие что:*

(i) $X_1 \cong X_2 \cong X$

(ii) для любых двух изотонных отображений $\phi : X_1 \to X$ и $\psi : X_2 \to X$ существует продолжение $\delta : X \to X$, т.е. такое изотонное отображение, что $\delta|_{X_1} = \phi, \quad \delta|_{X_2} = \psi$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $(O_X \times O_X)_{O_X}$ — циклический диагональный правый полигон и (α_0, β_0) — порождающая пара элементов из O_X. Найдем такое отображение $\gamma \in O_X$, что $\gamma\alpha_0 = \gamma\beta_0 = 1_X$. Также, как в Теореме 3, доказывается, что отображения $\alpha_0 : X \to X_1$ и $\beta_0 : X \to X_2$ являются изоморфизмами.

Положим $X_1 = X\alpha_0, \quad X_2 = X\beta_0$. Нами доказано, что $X_1, X_2 \cong X$, т.е. выполнено условие (i).

Пусть $\phi : X_1 \to X$ и $\psi : X_2 \to X$ — изотонные отображения. Тогда отображения $\alpha_0\phi, \ \beta_0\psi \in O_X$. Так как (α_0, β_0) — образующий элемент полигона $(O_X \times O_X)_{O_X}$, то существует отображение $\delta \in O_X$ такое, что $\alpha_0\delta = \alpha_0\phi, \quad \beta_0\delta = \beta_0\psi$. Если $x \in X_1$, то $x\delta = y\alpha_0\delta = y\alpha_0\phi = x\phi$. Следовательно, $\delta|_{X_1} = \phi$. Аналогично доказывается, что $\delta|_{X_2} = \psi$. Таким образом, выполнено условие (ii).

Достаточность. Пусть выполнены условия (i), (ii). Ввиду условия (i) существуют изоморфизмы $\alpha_0 : X \to X_1$ и $\beta_0 : X \to X_2$. Докажем, что (α_0, β_0) — порождающая пара диагонального правого полигона $(O_X \times O_X)_{O_X}$.

Пусть $\alpha_1, \beta_1 \in O_X$. Очевидно, что отображение $\alpha_0^{-1}\alpha_1$ является изотонным отображением X_1 в X, а $\beta_0^{-1}\beta_1$ — изотонным отображением X_2 в X, значит, $\alpha_0\sigma = \alpha_1$. Положим $\phi = \alpha_0^{-1}\alpha_1, \quad \psi = \beta_0^{-1}\beta_1$. Ввиду условия (ii) ϕ и ψ продолжаются до изотонного отображения $\delta : X \to X$. Пусть $x \in X$. Тогда $x\alpha_1 = x\alpha_0\alpha_0^{-1}\alpha_1 = x\alpha_0\phi = x\alpha_0\delta$. Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_0\delta$. Аналогично доказывается, что $\beta_1 = \beta_0\delta$. Таким образом, диагональный правый полигон $(O_X \times O_X)_{O_X}$ является циклическим. □

Следствие 1. *Пусть X — частично упорядоченное множество. Если диагональный правый полигон над полугруппой изотонных отображений $(O_X \times O_X)_{O_X}$ — циклический, то диагональный правый полигон над полугруппой частичных изотонных отображений $(PO_X \times PO_X)_{PO_X}$ также является циклическим.*

Доказательство. Достаточно доказать, что условия (i), (ii) Теоремы 4 влекут несравнимость элементов из X_1, X_2. Действительно, если $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$ и, допустим, что $z \in X_1 \cap X_2$, тогда пара отображений $\phi = \theta_u|_{X_1}, \quad \psi = \theta_v|_{X_2}$ при $u \neq v$ не может быть продолжена до изотонного отображения $\delta : X \to X$

(иначе $z\delta = u = v$), а если, скажем, элементы из X_1, X_2. были бы сравнимы и $x < y$ при $x \in X_1, y \in X_2$, то не имеет продолжения δ пара $\phi = \theta_y|_{X_1}$, $\psi = \theta_x|_{X_2}$ (так как в противном случае $x\delta = y$, $y\delta = x$ — противоречие с изотонностью отображения δ). □

Пусть теперь X – топологическое пространство. Все непрерывные отображения $\alpha : X \to X$ образуют полугруппу, которую мы обозначим через C_X. Полугруппа C_X интенсивно изучалась многими авторами – см. обзор Магилла [3]. Рассмотрим свойства диагональных полигонов над этой полугруппой в случае, когда $X = [0,1]$ – отрезок числовой прямой. Мы докажем, что диагональный правый полигон $(C_X \times C_X)_{C_X}$ является циклическим, а диагональный левый полигон ${}_{C_X}(C_X \times C_X)$ – нет.

Теорема 5. *Диагональный правый полигон $(C_X \times C_X)_{C_X}$ над полугруппой C_X непрерывных преобразований отрезка X является циклическим.*

Доказательство. Пусть $\alpha_0 : X \to X_1$ и $\beta_0 : X \to X_2$ — непрерывные и взаимно однозначные отображения отрезка $[0,1]$ на отрезки X_1 и X_2 соответственно, причем $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Докажем, что (α_0, β_0) — порождающая пара диагонального правого полигона $(C_X \times C_X)_{C_X}$. Пусть (α_1, β_1) — произвольная пара непрерывных отображений. Определим отображение $\delta : X_1 \cup X_2 \to X$, полагая:

$$x\delta = \begin{cases} x\alpha_0^{-1}\alpha_1, & \text{если } x \in X_1, \\ x\beta_0^{-1}\beta_1, & \text{если } x \in X_2. \end{cases}$$

Заметим, что отображения α_0 и β_0 имеют непрерывные обратные отображения, так как они взаимно однозначны и X — компакт.

Отображение δ непрерывно. Несложно доказать, что отображение δ продолжается до непрерывного отображения $X \to X$, которое мы также будем обозначать δ. При любом $x \in X$ имеет место включение $x\alpha_0 \in X_1$. Следовательно, $x\alpha_0\delta = x\alpha_0\alpha_0^{-1}\alpha_1 = x\alpha_1$, откуда получаем, что $\alpha_0\delta = \alpha_1$. Аналогично доказывается, что $\beta_0\delta = \beta_1$. Таким образом, $(\alpha_0, \beta_0)\delta = (\alpha_1, \beta_1)$. □

Теорема 6. *Диагональный левый полигон ${}_{C_X}(C_X \times C_X)$ над полугруппой C_X непрерывных отображений отрезка X — не циклический.*

Доказательство. Предположим, что этот полигон циклический. Тогда существует порождающая пара, скажем, (α_0, β_0). Для каждого $a \in (0,1)$ найдем непрерывное отображение γ_a такое, что $\gamma_a\alpha_0 = 1_X$, $\gamma_a\beta_0 = \theta_a$. Пусть $I_a = \operatorname{im}\gamma_a$. Так как $\gamma_a\alpha_0 = 1_X$, то γ_a является непрерывным взаимно однозначным отображением X на I_a. Следовательно, I_a является отрезком и $\gamma_a : X \to I_a$ — гомеоморфизм. В то же время $x\gamma_a\beta_0 = a$ при всех $x \in X$, следовательно, $I_a\beta_0 = \{a\}$. Обозначим через $\overset{\circ}{I}_a$ внутренность отрезка I_a. Заметим, что $I_a \cap I_b = \varnothing$ при $a \neq b$ — это следует из того, что $I_a\beta_0 = \{a\}$, а $I_b\beta_0 = \{b\}$. Это влечет, что $\overset{\circ}{I}_a \cap \overset{\circ}{I}_b = \varnothing$ при $a \neq b$. Таких непересекающихся интервалов на отрезке $[0,1]$ может быть лишь счетное число. Но по построению множество интервалов $\overset{\circ}{I}_a$

имеет мощность континуума. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories. // Berlin — New York: W. de Gruyter, 2000.

[2] Gallagher P., Ruškuc N. Generation of diagonal acts of some semigroups of transformations and relations // Bull. Austral. Math. Soc. 2005. V.72. P. 139-146.

[3] Magill K.D.Jr. A survey of semigroups of continuous selfmaps. Semigroup Forum. 1975/1976. V. 11. P. 189-282.

[4] Ярошевич В.А. О свойствах полугрупп частичных изотонных преобразований квазиупорядоченных множеств // Вестник МГАДА. 2011. Вып. 3(9). С. 139–144.

НИУ "МИЭТ"
Поступило 12.05.2011