



Общероссийский математический портал

К. К. Гасанов, Х. Т. Гусейнова, Виброкорректные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка с обобщенными воздействиями,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 551–552

<https://www.mathnet.ru/de11266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

21 апреля 2025 г., 03:56:33



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.957

ВИБРОКОРРЕКТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ*

© 2005 г. К. К. Гасанов, Х. Т. Гусейнова

В работе введено понятие виброкорректности и получены условия, при выполнении которых система уравнений в частных производных первого порядка с обобщенными воздействиями является виброкорректной.

Пусть требуется найти решение системы

$$x_t = f_1(x, y, u, v, t, s) + \varphi_1(x, u, t, s)\dot{u}(t), \quad y_s = f_2(x, y, u, v, t, s) + \varphi_2(y, v, s, t)\dot{v}(s) \quad (1)$$

в прямоугольнике $G = [t_0, t_1] \times [s_0, s_1]$, удовлетворяющее условиям

$$x(t_0, s) = \psi_1(s), \quad s \in S = [s_0, s_1], \quad y(s_0, t) = \psi_2(t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

где производные понимаются в смысле теории обобщенных функций, f_i, ψ_i – n_i -мерные функции, φ_i – $n_i \times m_i$ -матрицы, $i = 1, 2$, $(u(t), v(s))$ – $(m_1 + m_2)$ -мерная функция ограниченной вариации, $(\dot{u}(t), \dot{v}(s))$ – распределения нулевого порядка [1, с. 203–208].

Для абсолютно непрерывной функции $(u(t), v(s)) \in AC_{m_1}(T) \times AC_{m_2}(S)$ функция $(x(t, s), y(s, t)) \in C(T, L^{n_1}(S)) \times C(S, L^{n_2}(T))$ называется решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет почти всюду в G системе интегральных уравнений

$$x(t, s) = \psi_1(s) + \int_{t_0}^t [f_1(x(\tau, s), y(s, \tau), u(\tau), v(s), \tau, s) + \varphi_1(x(\tau, s), u(\tau), \tau, s)\dot{u}(\tau)] d\tau,$$

$$y(s, t) = \psi_2(t) + \int_{s_0}^s [f_2(x(t, \sigma), y(\sigma, t), u(t), v(\sigma), t, \sigma) + \varphi_2(y(\sigma, t), v(\sigma), \sigma, t)\dot{v}(\sigma))] d\sigma,$$

где $C(T, L^n(S))$ – пространство непрерывных отображений $T \rightarrow L^n(S)$.

В случае, когда хотя бы одна из функций $u(t), v(s)$ является функцией ограниченной вариации, возникают трудности, связанные с доопределением операции умножения сингулярной обобщенной функции на разрывную функцию. Для этого случая определим решение следующим образом.

Пусть последовательности $(u_k(t), v_k(s)) \in AC_{m_1}(T) \times AC_{m_2}(S)$, $k = 1, 2, \dots$, в слабой топологии пространства $VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$ сходятся к функции $(u(t), v(s)) \in VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$. Обозначим через $(x_k(t, s), y_k(s, t)) \in C(T, L^{n_1}(S)) \times C(S, L^{n_2}(T))$ решение задачи (1), (2), соответствующее функциям $(u_k(t), v_k(s))$, $k = 1, 2, \dots$. Задача (1), (2) называется виброкорректной на входе ограниченной вариации, если последовательность $(x_k(t, s), y_k(s, t))$ в слабой топологии пространства $VB(T, L^{n_1}(S)) \times VB(S, L^{n_2}(T))$ сходится к некоторой вполне определенной функции $(x(t, s), y(s, t)) \in VB(T, L^{n_1}(S)) \times VB(S, L^{n_2}(T))$ и предел не зависит от выбора последовательности $(u_k(t), v_k(s))$, $k = 1, 2, \dots$. Предел $(x(t, s), y(s, t))$ называется виборешением задачи (1), (2), отвечающим входным функциям $(u(t), v(s)) \in VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$ [2, с. 36–57].

Пусть выполняются условия:

- а) $\psi_1(s) \in L^{n_1}(S)$, $\psi_2(t) \in L^{n_2}(T)$;
- б) вектор-функции $f_i(x, y, u, v, t, s)$, $i = 1, 2$, непрерывны по $(x, y, u, v) \in R^{n_1+n_2+m_1+m_2}$ для п.в. $(t, s) \in G$, измеримы по (t, s) для всех (x, y, u, v) ; кроме того, $\|f_i(x(t, s), y(s, t), u(t), v(s), t, s)\| \leq m_i(t, s)$, $i = 1, 2$, и

$$\|f_i(\tilde{x}(\tau, \sigma), \tilde{y}(\sigma, \tau), u(\tau), v(\sigma), \tau, \sigma) - f_i(x(\tau, \sigma), y(\sigma, \tau), u(\tau), v(\sigma), \tau, \sigma))\|_{L^{n_i}(G_{i,s})} \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^t \gamma_i(u(\tau), \tau) \|\tilde{x}(\tau, \cdot) - x(\tau, \cdot)\|_{L^{n_1}(s_0, s_1)} d\tau + \int_{s_0}^s \rho_i(v(\sigma), \sigma) \|\tilde{y}(\sigma, \cdot) - y(\sigma, \cdot)\|_{L^{n_2}(t_0, t)} d\sigma,$$

* Рукопись полностью депонирована в ВИНТИ 19.12.2003. № 2209-В2003.

где $(x(t, s), y(s, t)) \in S_R(G) = \{(x, y) \in C(T, L^{n_1}(S)) \times C(S, L^{n_2}(T)) : \|x - \psi_1(s)\|_{L^{n_1}(S)} \leq R, t \in T; \|y - \psi_2(t)\|_{L^{n_2}(T)} \leq R, s \in S, R > 0\}$, $m_i(t, s) \in L(G)$, $\gamma_i(u(t), t) \in L(T)$; $\rho_i(v(s), s) \in L(S)$, $i = 1, 2$;

с) функции $f_i(x, y, u, v, t, s)$, $i = 1, 2$, $\varphi_1(x, u, t, s)$, $\varphi_2(y, v, s, t)$ удовлетворяют по x, y условию роста

$$\|f_i(x, y, u, v, t, s)\| \leq M_{f_i}(u, t)\|x\| + N_{f_i}(v, s)\|y\| + C_{f_i}(u, v, t, s),$$

$$\|\varphi_1(x, u, t, s)\| \leq M_{\varphi_1}(u, t)\|x\| + C_{\varphi_1}(u, t, s), \quad \|\varphi_2(y, v, s, t)\| \leq M_{\varphi_2}(v, s)\|y\| + C_{\varphi_2}(v, s, t),$$

где для любых $(u(t), v(s)) \in AC_{m_1}(T) \times AC_{m_2}(S)$

$$M_{f_i}(u(t), t) \in L(T), \quad N_{f_i}(v(s), s) \in L(S), \quad M_{\varphi_1}(u(t), t) \in L_\infty(T),$$

$$M_{\varphi_2}(v(s), s) \in L_\infty(S), \quad C_{f_i}(u(t), v(s), t, s) \in L(G),$$

$$C_{\varphi_1}(u(t), t, s) \in L_\infty(T, L(S)), \quad C_{\varphi_2}(v(s), s, t) \in L_\infty(S, L(T));$$

d) функции $\varphi_1(x, u, t, s)$ и $\varphi_2(y, v, s, t)$ непрерывны вместе с частными производными φ_{1x} , φ_{1t} и φ_{2y} , φ_{2s} при $x \in R^{n_1}$, $y \in R^{n_2}$, $u \in R^{m_1}$, $v \in R^{m_2}$, $t \in T$, $s \in S$. Кроме того, функции $\varphi_1(x, u, t, s)$, $\varphi_{1x}(x, u, t, s)$, $\varphi_{1t}(x, u, t, s)$ и $\varphi_2(y, v, s, t)$, $\varphi_{2y}(y, v, s, t)$, $\varphi_{2s}(y, v, s, t)$ локально удовлетворяют условию Липшица по x и по y соответственно;

e) уравнения в полных дифференциалах

$$dk/dp = \varphi_1(k, p, \tau, \sigma), \quad k(u) = \xi, \quad dh/dq = \varphi_2(h, q, \sigma, \tau), \quad h(v) = \eta, \quad (3)$$

локально разрешимы для $\xi \in R^{n_1}$, $\eta \in R^{n_2}$, $p, u \in R^{m_1}$, $q, v \in R^{m_2}$, $\tau \in T$, $\sigma \in S$, где τ, s играют роль параметров.

По теореме о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений от начальных условий и параметров [3] решения задачи (3) $k(\xi, p, u, \tau, \sigma)$, $h(\eta, q, v, \sigma, \tau)$ и их производные k_ξ , k_τ , h_η , h_σ непрерывны по совокупности переменных и локально удовлетворяют условию Липшица по ξ и η соответственно.

Пусть $(x(t, s), y(s, t))$ – решение задачи (1), (2) при $(u(t), v(s)) \in AC_{m_1}(T) \times AC_{m_2}(S)$, тогда

$$z(t, s) = k(x(t, s), u^0, u(t), t, s), \quad \omega(s, t) = h(y(s, t), v^0, v(s), s, t)$$

являются решениями системы

$$z_t = \Psi_1(z, \omega, u, v, u^0, v^0, t, s), \quad \omega_s = \Psi_2(z, \omega, u, v, u^0, v^0, t, s) \quad (4)$$

и удовлетворяют условиям

$$z(t_0, s) = \psi_1(s), \quad s \in S, \quad \omega(s_0, t) = \psi_2(t), \quad t \in T, \quad (5)$$

где

$$u^0 = u(t_0), \quad v^0 = v(s_0),$$

$$\Psi_1(z, \omega, u, v, u^0, v^0, t, s) = k_\xi(k(z, u, u^0, t, s), u^0, u, t, s)f_1(k(z, u, u^0, t, s), h(\omega, v, v^0, s, t), u, v, t, s) + k_\tau(k(z, u, u^0, t, s), u^0, u, t, s),$$

$$\Psi_2(z, \omega, u, v, u^0, v^0, t, s) = h_\eta(h(\omega, v, v^0, s, t), v^0, v, s, t)f_2(k(z, u, u^0, t, s), h(\omega, v, v^0, s, t), u, v, t, s) + h_\sigma(h(\omega, v, v^0, s, t), v^0, v, s, t).$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Для произвольной функции $(u(t), v(s)) \in VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$ такой, что

$$\|u(t) - u^0\| \leq r, \quad t \in T, \quad \|v(s) - v^0\| \leq r, \quad s \in S,$$

существует локальное единственное решение $(z(t, s), \omega(s, t))$ задачи (4), (5).

Теорема 2. Пусть 1) системы (3) глобально разрешимы для всех $\xi \in R^{n_1}$, $\eta \in R^{n_2}$, $\rho, u \in R^{m_1}$, $q, v \in R^{m_2}$, $\tau \in T$, $\sigma \in S$; 2) задача (4), (5) имеет единственное решение $(z(t, s), \omega(s, t))$ для произвольной функции $(u(t), v(s)) \in VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$. Тогда задача (1), (2) виброкорректна на входах ограниченной вариации в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1978.
2. Орлов Ю.В. Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями. М., 1988.
3. Благодатских В.И. // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 12. С. 2136–2140.

Бакинский государственный университет

Поступила в редакцию
29.01.2002 г.