



Общероссийский математический портал

О. М. Белоцерковский, А. В. Конюхов, А. М. Опарин, О. В. Трошкин, С. В. Фортова, О структурировании хаоса,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, том 51, номер 2, 237–250

<https://www.mathnet.ru/zvmmf8059>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

22 апреля 2025 г., 23:08:18



УДК 519.634

О СТРУКТУРИРОВАНИИ ХАОСА¹⁾

© 2011 г. О. М. Белоцерковский, А. В. Конюхов, **А. М. Опарин**,
О. В. Трошкин, С. В. Фортова

(123056 Москва, ул. 2-я Брестская, 19/18, ИАП РАН)

e-mail: obelo@icad.org.ru; konyukhov_av@mail.ru; troshkin@icad.org.ru; fortova@mail.ru

Поступила в редакцию 06.09.2010 г.

Исследуются вихревые каскады неустойчивостей, формирующие ядро, описываются крупномасштабные линейные волны пульсирующей среды. Библ. 38. Фиг. 7.

Ключевые слова: гидродинамические неустойчивости сдвиговых течений, вихревые каскады, крупномасштабные турбулентные волны.

1. РАЦИОНАЛЬНЫЙ КОНСТРУКТИВИЗМ

Предлагается рациональный подход к конструктивному моделированию турбулентности. В его основу положен прямой расчет законов сохранения массы, импульса и энергии в сплошной среде. Подход предполагает формирование пульсирующей среды в результате развития гидродинамических неустойчивостей через вихревые каскады в областях с большими градиентами скоростей.

Предлагаемый подход был намечен первым из авторов в Кармановской лекции 1976 г. (см. [1]), изложен им в [2] и детализирован в последней монографии [3]. Ниже он дополняется, во-первых, анализом каскадов сдвиговых неустойчивостей, приводящих к измельчению структуры течения и формированию турбулентного ядра (см. [4], [5]), и, во-вторых, описанием крупномасштабных волн в турбулентном ядре (см. [6]–[8]).

Как известно, обнаруженный Колмогоровым и Обуховым (см. [9]) инерционный участок может быть выведен независимо либо из гипотезы об относительной локальной однородности и изотропности пульсаций (на распределение малого приращения скорости в произвольной фиксированной точке турбулентного ядра не влияют ни положение точки, ни регистрируемая в ней мгновенная скорость, ни время, ни вращения и зеркальные отображения координат), либо из уравнения спектрального баланса (см. [10]). Восходящая к идее Ричардсона об измельчении вихревой структуры турбулентности до масштабов теплового движения (см. [11]) концепция энергетического каскада, опирающаяся на упомянутую гипотезу и строго определенная в [9], удивительно точно согласуется с недавними оценками “локального” числа Рейнольдса, выполненными в [12].

Для нас будет интересен сам процесс формирования ядра и взаимодействие его больших объемов на расстоянии.

По поводу последнего хотелось бы отметить следующее.

Движение конечных объемов мелко пульсирующей среды начинает сказываться на измеряемых средних уже там, где, казалось бы, этим движением вполне можно пренебречь, а именно — на дальнем участке следа затопленной турбулентной струи. Яницким (см. [13]) было обнаружено, что только за счет такого крупномасштабного процесса, как перемежаемость, и можно получить характерный “хвост” экспериментального профиля скорости, который не давали “подточные” модели турбулентности, не учитывающие этого эффекта. Другой пример крупных вихрей видимого хаоса дают когерентные структуры (след севшего на мель танкера, удар

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” 2009–2013 гг., направление “Математика”, мероприятие 1.2.1, Государственный контракт № П939, НГР-1037739362550, Программ Президиума РАН № 2 и № 12 (Постановление Президиума РАН от 25 ноября 2008 г. № 611) и грантов РФФИ (коды проектов 09-01-00451_а, 09-01-92102-ЯФ_а и 09-08-12033-офи_м).

турбулентной струи о стенку, и т.п.). Их дополняют сложные процессы взаимопроникновения и слияния вихрей, укрупнения их структуры и т.д.

Однако во всех отмеченных явлениях усматривается преобладание нелинейных взаимодействий. Нас же будут интересовать линейные волновые процессы в осредненной среде. Признавая тот факт, что при обычной доле турбулентной энергии в несколько процентов их влияние ничтожно, мы все же приводим необходимые расчеты по валидации волн в ближнем участке плоской затопленной турбулентной струи. Здесь эффекты конвективного перемешивания и турбулентной диффузии еще незначительны и возмущения осредненных полей должны распространяться по характеристикам отыскиваемых волн.

2. СРЕДНИЕ И ПУЛЬСАЦИИ

Первые разложения компонент скорости и давления на средние и пульсации, отождествление корреляций пульсаций с физическими силами (напряжениями пульсаций) и связь корреляций и средней скорости в уравнениях баланса импульса без учета вязкости (осреднение уравнений Эйлера) были предложены в [14]. И хотя там рассматривались одномерные средние течения, но уже наметились уравнения нового динамического состояния среды, которое теперь называют турбулентным. В [15] с учетом вязкости (осреднение уравнений Навье–Стокса) получены общие (трехмерные) уравнения, связывающие корреляции и средние и определено свое число, увеличение которого приводит к возникновению самих пульсаций.

В этих работах пульсациями служат теперь уже привычные аддитивные возмущения v' точных величин $v = \langle v \rangle + v'$ с нулевыми средними: $\langle v' \rangle = 0$. При этом от операции осреднения $\langle \cdot \rangle$ требуется лишь быть математическим проектором, т.е. линейным оператором ($\langle u + v \rangle = \langle u \rangle + \langle v \rangle$ и $\langle \alpha v \rangle = \alpha \langle v \rangle$, $\alpha = \text{const}$), повторное действие которого не меняет первого ($\langle \langle v \rangle \rangle = \langle v \rangle$). Конкретно, в [14] рассматривались пространственно-периодические возмущения и усреднение по двумерному периоду (по-существу, там впервые введен в гидродинамику спектральный метод, ограниченный одноточечными корреляциями, что сузило класс средних течений до одномерных полей). В [15] усреднение велось по массе выделенного объема.

Впоследствии точные значения стали трактовать как случайные, корреляции — как моменты осреднения, а само осреднение проводить на многообразии реализаций случайных величин (осреднение по статистическому ансамблю), отождествляя его при этом с осреднением по неограниченному интервалу времени (эргодическая гипотеза) (см. [16]).

3. КОРОТКОВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

В 1961 г. число Рейнольдса неожиданно теряет свой статус главного параметра: привлекая цепные дроби, Мешалкин и Синай показывают глобальную устойчивость течения Колмогорова (см. [17]) по отношению ко всем (нелинейным) коротковолновым возмущениям. Ими обнаружено (см. [18]), что поддерживаемое на плоской периодической решетке одномерным стационарным полем внешних массовых сил, определяемое модой Фурье на одном из периодов решетки b , это стационарное течение единственно и устойчиво при любых числах Рейнольдса, если другой период a не длиннее первого: $a \leq b$. При заданном периоде внешней силы b последнее условие и оказывается ограничением на длину волны возмущений, “блокирующим” развитие их при любом сколь угодно большом числе Рейнольдса. При этом отношение a/b часто называют главным фактором (aspect ratio) канала, а условие Мешалкина–Синай формулируют так: течение Колмогорова глобально устойчиво в коротком канале ($a/b \leq 1$).

В 1988 г. участь числа Рейнольдса постигают и условия прилипания: в неограниченном периодическом канале ширины b с периодом $a \leq 2b/\sqrt{3} = 1.1547b$, течение Колмогорова остается тем же глобально единственным и устойчивым стационарным течением вязкой несжимаемой среды, но теперь уже прилипающей к неподвижным стенкам канала (см. [19]). Спустя 6 лет при сохранении основной схемы рассуждений (теория бесконечномерного диссипативного волчка (см. [8, гл. 4]) получение этой оценки было упрощено тем же условием Мешалкина–Синай $a \leq b$, оказавшимся справедливым и для условия прилипания (см. [20]).

Достаточно полные исследования структуры устойчивых и неустойчивых стационарных и нестационарных режимов течений в задаче Колмогорова приводятся в [21]–[23].

4. КРИВАЯ ОТКЛИКА

Но еще в 1964 г. числу Рейнольдса и условиям прилипания возвращают утраченные привилегии: в реальных условиях линейного падения давления p при постоянной плотности ρ вдоль бесконечного периодического канала $-\infty < x < \infty$, $-h < y < h$ постоянной ширины $b = 2h$ в [24] установлена неустойчивость порождаемого ими течения Хагена–Пуазейля при больших числах Рейнольдса.

Однако и этот результат, и многие другие факты из полученных теорем, проведенных измерений и выполненных расчетов, относящихся к потере устойчивости основного течения и возникновению нового поля скоростей при увеличении числа Рейнольдса и переходе его через критическое значение, способны дать лишь первые, крупномасштабные, вторичные течения, так называемые предтурбулентные режимы, приближаемые, как правило, одной или несколькими модами Фурье. Между тем наличие такой интегральной характеристики плоского канала, как кривая отклика (или кривая сопротивления), свидетельствует об обратном: турбулентным течением устанавливается одновременно если и не на всех модах Фурье, то на их достаточно большом числе, необходимом для набора необходимой статистики.

Последнее подтверждают как прямое численное моделирование течения в канале спектральным методом (см. [25]), так и следующая простая бифуркационная модель турбулентного течения в канале, предсказанная Яницким (в личном сообщении). Она выводится непосредственно из турбулентных схем замыкания второго порядка для одноточечной корреляции продольных и поперечных пульсаций скорости u' и v' , а именно

$$\frac{\langle u'v' \rangle}{u_*^2} = \tau(\bar{y}) = -\tau(-\bar{y}), \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad u_* = \sqrt{-\frac{h\partial p}{\rho\partial x}}, \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} > 0,$$

в виде одного уравнения из [26]:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\tau}{dz^2} + \alpha\eta\tau &= \frac{c\eta|\tau|}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{\tau}{\zeta}\right), \quad 0 < z = \frac{f(\bar{y})}{f(1)} < 1, \\ \eta &= \eta(\bar{y}) = f^2(1)(1 + \kappa(\bar{y})), \quad \zeta = \zeta(\bar{y}) = \frac{\bar{y}\kappa(\bar{y})}{1 + \kappa(\bar{y})}, \\ f(\bar{y}) &= \int_0^{\bar{y}} \frac{d\tilde{y}}{1 + \kappa(\tilde{y})}, \quad \kappa(\bar{y}) = \frac{\gamma_0}{\varepsilon} (1 - \bar{y}^2), \quad \varepsilon = \frac{\mu}{\rho u_* h}, \\ \alpha &= 2000, \quad c = 1, \quad \gamma_0 = 0.105, \quad \tau(0) = \tau(1) = 0. \end{aligned}$$

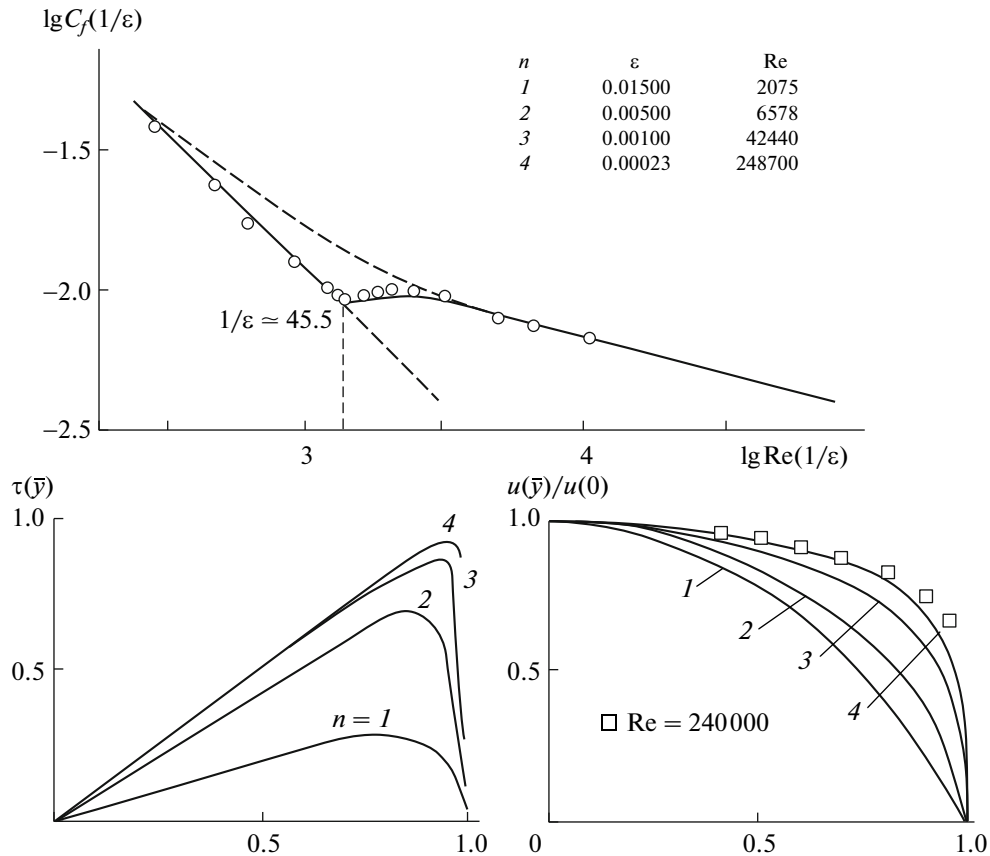
Модель содержит варьируемый параметр $\varepsilon > 0$ – обратную величину динамического числа Рейнольдса $\text{Re}_* = \rho u_* h / \mu = 1/\varepsilon$, определяемого характерной скоростью течения u_* и постоянным коэффициентом динамической вязкости среды μ . После нахождения (для различных чисел ε) корреляции $\langle u'v' \rangle$ вычисления порождаемых ими профилей средней скорости $\langle u \rangle$ по точной формуле

$$\langle u \rangle = u_* \bar{u}(\bar{y}), \quad \bar{u}(-\bar{y}) = \bar{u}(\bar{y}) = \frac{1 - \bar{y}^2}{2\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\bar{y}}^1 \tau(\tilde{y}) d\tilde{y}, \quad 0 \leq \bar{y} \leq 1$$

(вытекающей из уравнений Рейнольдса) и определения зависимостей от увеличиваемого параметра $1/\varepsilon$ коэффициента сопротивления C_f и числа Рейнольдса Re по среднемассовому расходу $[u]$, а именно

$$\begin{aligned} C_f \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) &= -h \frac{\partial p}{\partial x} / \left(\frac{1}{2} \rho [u]^2\right)^{-1} = \frac{2}{[[\bar{u}]]^2}, \quad \text{Re} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\rho [u] 2h}{\mu} = \frac{2[[\bar{u}]]}{\varepsilon}, \\ [u] &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \langle u \rangle(y) dy = u_* [[\bar{u}]], \quad [[\bar{u}]] = \int_0^1 \bar{u} d\bar{y}, \end{aligned}$$

модель полностью описывает обе ветви кривой сопротивления – ламинарную и турбулентную, вместе с точкой ветвления. На фиг. 1 представлены графики сопротивления, корреляции и сред-



Фиг. 1.

ней скорости плоского канала. Кружками и квадратиками отмечены измерения из [27], [28] и [29] соответственно, цифрами – расчеты [30] простой бифуркационной модели из [26].

Уравнение модели получается минимизацией интеграла энергии

$$H(\tau) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 + \frac{\xi}{2} \tau^2 - \frac{\eta}{2} \tau |\tau| + \frac{b|\tau|^3}{3\zeta} \right) dz \rightarrow \min.$$

Последний напоминает функционал Ландау в теории фазовых переходов. Поэтому кривую отклика можно рассматривать как свидетельство аналогии, существующей между неравновесными фазовыми переходами и возникновением турбулентности (см. [31]).

5. ВИХРЕВЫЕ КАСКАДЫ

В действительности, как показывают многочисленные натурные и численные эксперименты, роль “пристеночного” числа Рейнольдса и условий прилипания заключается в организации непосредственно прилегающего к твердой поверхности (тонкой пленкой) ламинарного подслоя с большим линейным градиентом продольной составляющей скорости \mathbf{u} . Одновременно над ним формируется слой, где слабеет влияние вязкости и стенок и начинает “работать” нелинейный механизм конвективного перемешивания под “управлением” ускорения Эйлера $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Возникающие здесь крупные и мелкие вихри в виде колец, подков, жгутов, протуберанцев, а также пятна и “пробки” из мелкомасштабно пульсирующей среды, перемежающейся с ламинарным потоком, – вместе уже способно сформировать те новые силы, которыми являются турбулентные на-

пряжения и благодаря которым в слое перемешивания действует логарифмический закон для профиля продольной составляющей скорости

$$\tau(\bar{y}) \approx \zeta(\bar{y}) = \bar{y} - \frac{\varepsilon/\gamma_0}{1 + \varepsilon/\gamma_0 - \bar{y}^2}$$

$$\text{и } \bar{u}(\bar{y}) \approx \frac{1}{2\gamma_0} \ln \left(1 + \frac{\gamma_0}{\varepsilon} (1 - \bar{y}^2) \right) \quad \text{при } -1 \leq \bar{y} \leq 1 \quad \text{и } \varepsilon \ll 1,$$

$$\bar{u}(\bar{y}) \approx \frac{1}{2\gamma_0} \ln(1 - \bar{y}) + \text{const} \quad \text{при } 1 - \bar{y} \ll 1$$

(с постоянной Кармана $1/(2\gamma_0)$, примерно равной в модели числу 4.8, соответствующему $\gamma_0 = 0.105$, но в действительности равной полученному значению 6.2, см. [29], что соответствовало бы $\gamma_0 = 0.081$).

При этом меняется механика задач об устойчивости. Как более естественные для перемешивания (прежде всего возможностью следить за развитием неустойчивостей), вместо условий задачи Пуазейля рассматриваются сдвиговая неустойчивость с разрывом тангенциальной компоненты скорости, “сглаживаемым” линейным профилем скорости Куэтта (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца), неустойчивость границы раздела тяжелой и легкой сред (неустойчивость Рэлея–Тейлора) и “ортогональная” первой неустойчивость Рихтмайера–Мешкова с разрывом нормальной компоненты скорости, вызванным прохождением через границу раздела ударной волны. Здесь уже вязкость несущественна, а влияние стенок ничтожно (см. [32]).

Однако по мере удаления от слоя перемешивания в область турбулентного ядра вместе с вязкостью и влиянием стенок теряет силу и закон логарифма. Он уступает место теории Колмогорова–Обухова об инерционном участке спектра (энергии пульсаций) (см. [9], [10]). Но как “увидеть” рождение этого участка? Как смоделировать его формирование в режиме реального времени? Единственное, что поддерживает его теперь, – это равновесие сил ускорения Эйлера и давления Паскаля. Получается, что к нему должно приводить моделирование уравнений Эйлера.

Сценарий формирования турбулентного ядра “подсказывает” гипотеза Ричардсона об энергетическом каскаде (см. [11]): турбулизация потока происходит путем измельчения вихрей и передачи энергии от больших из них к меньшим. Таким образом, необходимым условием энергетического каскада служит наличие каскада вихревого. Теперь уже можно сформулировать задачу: получить вихревой каскад из уравнений Эйлера.

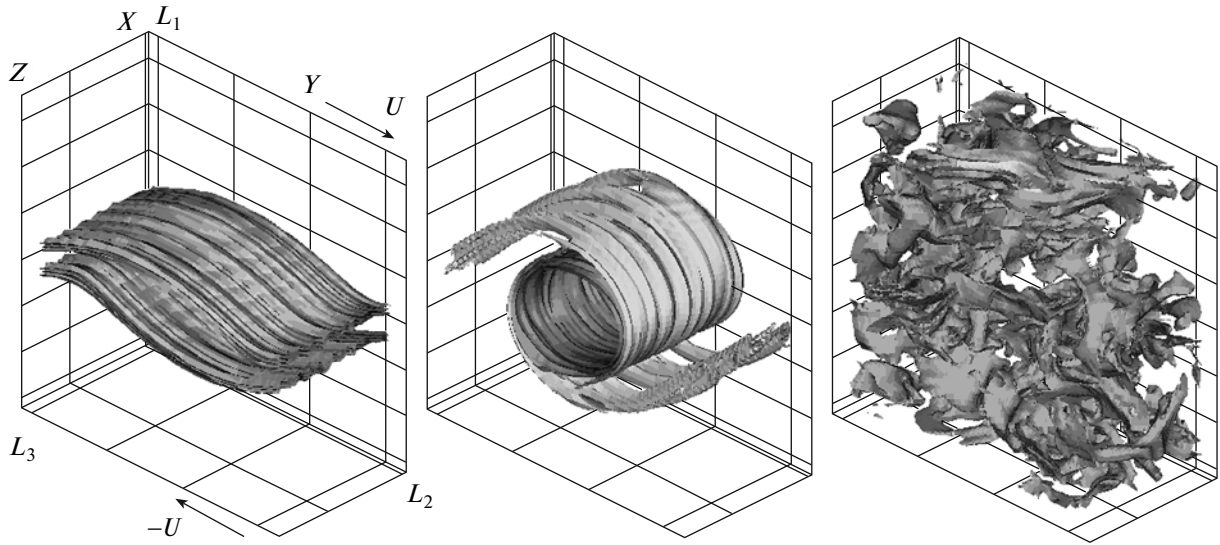
Три варианта этой задачи были реализованы к 2005 г. независимо при помощи явной TVD-схемы второго порядка аппроксимации и альтернативной схемы высокого порядка разрешения WENO-5RK2. Результатами оказались следующие каскады сдвиговой неустойчивости для нормального идеального газа при малых числах Маха.

Задача 1 (вихревой каскад Опарина). В начальный момент рассматривается течение Куэтта, которое возмущается случайным полем скоростей, локализованным в центральной узкой полосе, параллельной сдвиговым граничным плоскостям. В последующие моменты времени на горизонтальных гранях расчетного гексаэдра поддерживаются условия непротекания, на парах противоположенных вертикальных граней – условия периодичности. Исследуется развитие вторичной неустойчивости – вихревой трубки в виде рулона, в который сворачивается течение Куэтта при большом градиенте основной (невозмущенной) скорости.

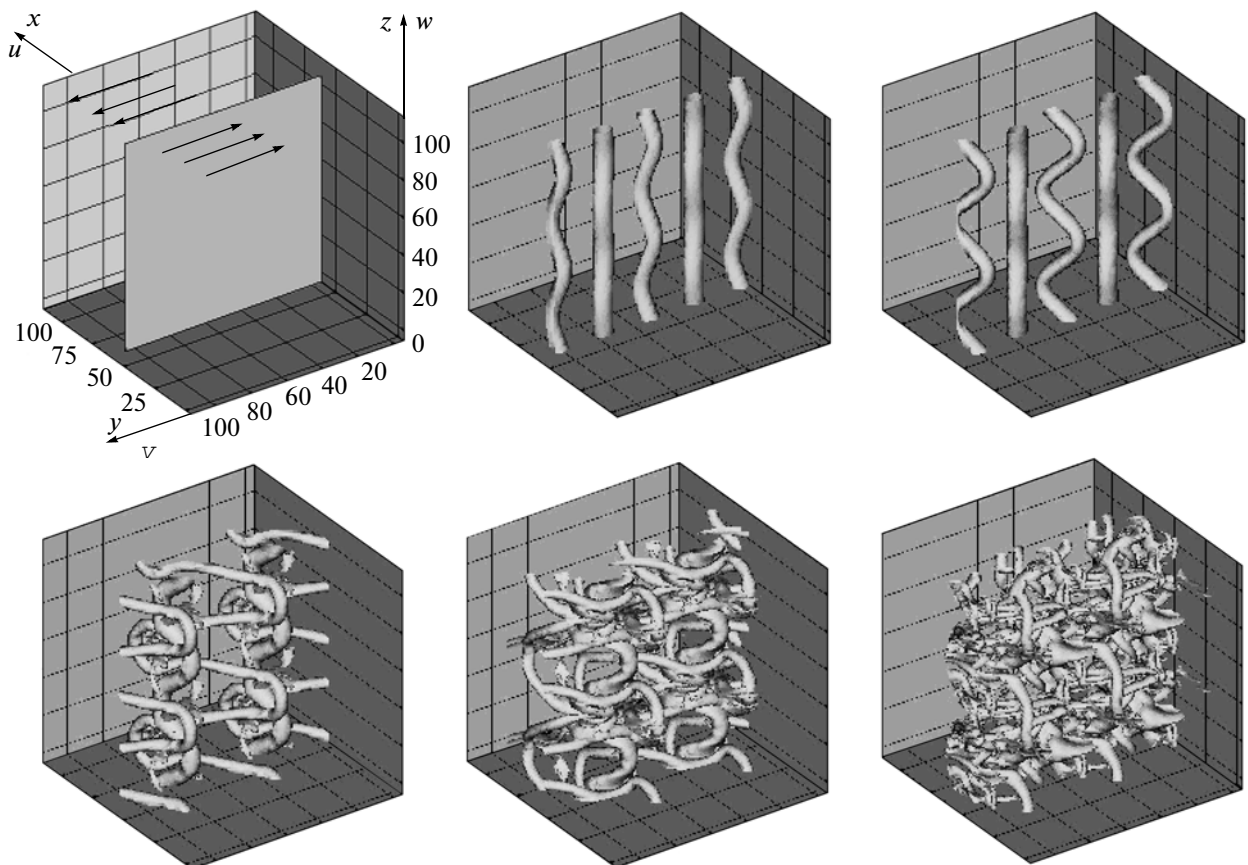
Задача 2 (вихревой каскад Фортовой). Случайное поле скоростей первой задачи в узкой полосе возмущений заменяется на одну моду Фурье. Такая постановка “очищает” задачу от хаотичности: если турбулентности и суждено возникнуть, то не от случайных возмущений (фиг. 2).

Задача 3 (вихревой каскад Конохова). В первой задаче течение Куэтта заменяется на сдвиговый слой с контактными разрывом: на одной половине гексаэдра среда течет вдоль ребра с постоянной скоростью в одну сторону, на второй половине – в другую. Поле скоростей возмущается одной модой Фурье в целом в области течения. Исследуется взаимодействие вихревых трубок вторичной неустойчивости (фиг. 3).

В задачах 1 и 3 ожидаемая турбулизация картины течения происходила всегда, в задаче 2 – только на определенной моде возмущений. В других случаях наблюдались последующие коллапс вторичного вихря и “ламинаризация” потока. Это же случалось и при достаточно малой ширине области течения (пространственный аналог условия Мешалкина–Синая). Как уже отмечалось,

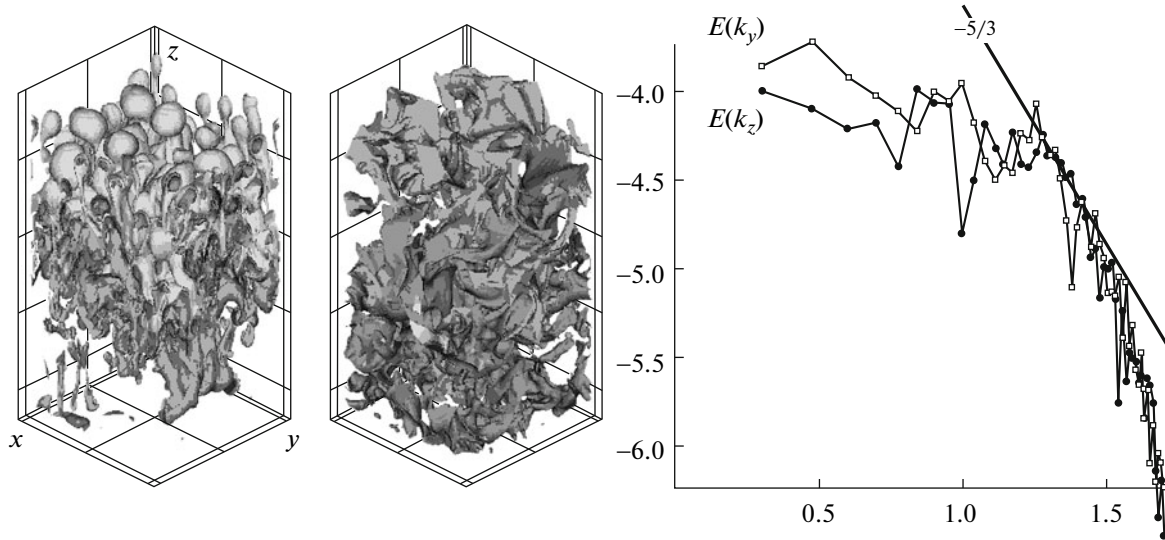


Фиг. 2.



Фиг. 3.

появление самого вторичного вихря в двух первых задачах наблюдалось при достаточно крутом наклоне профиля сдвиговой скорости. В задаче 3 реализовался предельный случай бесконечного градиента профиля скорости, поэтому здесь была проблема подбора начального возмущения, “запускающего” вихревой каскад.



Фиг. 4.

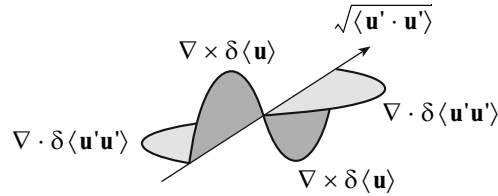
Все три задачи не имели энергетической “подпитки” в виде внешнего перемешивания или передачи импульса от смещаемой стенки за счет прилипания и вязкости. Поэтому возникавшие картины турбулентности постепенно “стирались” схемной вязкостью. Но отпущенного ею времени хватало, чтобы проследить весь процесс формирования некоторого устойчивого участка спектра. Последний наиболее заметен в численно промоделированном вихревом каскаде неустойчивости Рэля–Тейлора (тяжелой среды над легкой), исследуемом при тех же условиях, что и выше, но без сдвиговой скорости. В последнем случае компоненты скоростей являются пульсациями. Распределение их энергии по волновым числам обнаруживает указанный участок на длинах волн порядка 0.05 периода решетки. На фиг. 4 представлен вихревой каскад неустойчивости Рэля–Тейлора в приближении невязкой среды, а также распределение энергии пульсаций $E = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle) / 2$ по волновым числам продольных и поперечных пульсаций k_y и k_z соответственно с наклоном $-59^\circ = \arctg(-5/3)$ на инерционном участке спектра.

Рассмотренная динамика формирования ядра пульсаций без влияния вязкости и стенок обнаруживает следующие детали этого механического процесса, проявляемые наиболее отчетливо в трех первых задачах: при турбулизации одной трубки (в задачах 1 и 2) очередные вихревые жгуты неустойчивостей “обволакивают” собой предыдущие (как при неустойчивости Тейлора между вращающимися цилиндрами (см. [33]); при турбулизации нескольких трубок (в задаче 3) новые вихревые трубки возникают трансверсально предыдущим, заполняя собою пространство между первыми. В любом случае возникновение турбулентности носит характер сложного, но детерминированного явления, требующего трех пространственных измерений.

Отметим, что турбулизация течения Куэтта сопровождается отсутствием зависимости от стенок и числа Рейнольдса и в “ортогональной” постановке, а именно для случая вязкой несжимаемой среды (см. [34]). Изложенные выше конструкции, помимо отмеченных деталей этого процесса, предполагали полное “очищение” турбулентности от влияния вязкости и стенок.

6. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ВОЛНЫ

Итак, удаляясь от “пленки” ламинарного подслоя с линейным ростом скорости (тем большим, чем выше число Re_*), мы попадаем в слой перемешивания с каскадами гидродинамических неустойчивостей, вызванными взаимодействием разнообразных и разнокалиберных вихрей. Регистрируемые при этом как пульсации возмущения скорости производят новые силы — три нормальных и три касательные силы напряжения среды, измеряемые корреляциями пульсаций $\langle u'u' \rangle$, $\langle v'v' \rangle$, $\langle w'w' \rangle$ и $\langle u'v' \rangle$, $\langle v'w' \rangle$, $\langle w'u' \rangle$ соответственно.



Фиг. 5.

Согласно теории Колмогорова–Обухова (см. [9], [10]), нормальные напряжения от близких пульсаций в двухточечных корреляциях затухают со степенью $-2/3$ расстояния между ними, что равносильно степени $-3/5$ по волновому числу (см. [35, гл. 3]). Кроме степени $-3/5$, затухания возмущений по волновому числу на основном (инерционном) участке спектра, этот закон дает уверенность, что турбулентная среда способна “чувствовать” себя на близком расстоянии.

О том, что пульсирующая среда “чувствует” стенку в пограничном слое, размеры которого значительно превосходят колмогоровские масштабы, говорит закон логарифма. Он – прямое следствие точного линейного взаимодействия одноточечных касательных напряжений со средней скоростью, обнаруживаемого осредненными уравнениями Навье для несжимаемой среды. Но по мере “углубления” в турбулентное ядро теряется и связь с границей. Как могут при этом “ощущать” друг друга его удаленные участки?

Необходимые точные слагаемые такого дальнего действия – так называемые члены генерации $2\langle u' \mathbf{u}' \rangle \nabla \langle u \rangle$, $\langle u' \mathbf{u}' \rangle \nabla \langle v \rangle + \langle v' \mathbf{u}' \rangle \nabla \langle u \rangle$, и т.д. – получаются из эволюции напряжений, описываемой цепочкой уравнений Рейнольдса–Фридмана–Келлера и замыкаемой на повторных моментах осреднения обычными процессами диффузии и релаксации к равновесию. Эти же члены описывают взаимодействие турбулентных напряжений $\langle u' \mathbf{u}' \rangle$, $\langle u' v' \rangle$, ... с осредненным потоком, представленным своей скоростью $\langle \mathbf{u} \rangle$, как необходимое слагаемое скорости изменения самих напряжений.

Для поиска свидетельств взаимодействия удаленных объемов турбулентной среды естественно пренебречь двухточечностью корреляций в их эволюционных уравнениях, а также молекулярной и турбулентной диффузией и релаксацией к равновесию. Чтобы исключить акустику, пренебрежем и сжимаемостью среды. Вязкость в точных осредненных уравнениях Навье при этом оставим просто для того, чтобы сохранить точность первых уравнений цепочки Рейнольдса. В результате приходим к следующей системе из 10 квазилинейных уравнений с членами генерации (см. [6]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \langle u \rangle \\ \langle v \rangle \\ \langle w \rangle \end{pmatrix} - \nu \Delta \begin{pmatrix} \langle u \rangle \\ \langle v \rangle \\ \langle w \rangle \end{pmatrix} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \begin{pmatrix} \langle u \rangle \\ \langle v \rangle \\ \langle w \rangle \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \langle u' \mathbf{u}' \rangle \\ \langle v' \mathbf{u}' \rangle \\ \langle w' \mathbf{u}' \rangle \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \langle p_x \rangle \\ \langle p_y \rangle \\ \langle p_z \rangle \end{pmatrix} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \langle u' v' \rangle \\ \langle v' w' \rangle \\ \langle w' u' \rangle \end{pmatrix} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \begin{pmatrix} \langle u' v' \rangle \\ \langle v' w' \rangle \\ \langle w' u' \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle u' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \langle v \rangle + \langle v' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \langle u \rangle \\ \langle v' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \langle w \rangle + \langle w' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \langle v \rangle \\ \langle w' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \langle u \rangle + \langle u' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \langle w \rangle \end{pmatrix} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \langle u' u' \rangle \\ \langle v' v' \rangle \\ \langle w' w' \rangle \end{pmatrix} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \begin{pmatrix} \langle u' u' \rangle \\ \langle v' v' \rangle \\ \langle w' w' \rangle \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \langle u' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \langle u \rangle \\ \langle v' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \langle v \rangle \\ \langle w' \mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \langle w \rangle \end{pmatrix} &= 0, \\ \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle &= 0, \quad \nu = \mu/\rho, \quad \mu, \rho, q = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Одно из них вместе с уравнением для продольно-поперечной корреляции $\langle u' v' \rangle$, впервые появился в упомянутой работе [14]. Там же был обнаружен неожиданный эффект взаимодействия турбулентных напряжений с осредненным потоком – поперечные крупномасштабные линейные волны, при помощи которых должны распространяться малые возмущения больших объемов в турбулентной среде. Чтобы подчеркнуть крупномасштабность этих волн, их назвали “ла-

минарными". Скорость распространения этих волн определялась в [14] квадратным корнем удельной энергии пульсаций, которая обычно оценивается процентом от общей энергии движения.

Как выяснилось впоследствии (см. [6], [7]), линейные турбулентные волны обладают тонкой структурой, полностью совпадающей с доставляемой электромагнитным полем. Конкретно: если обратиться к флуктуациям (возмущениям) $\delta\langle \mathbf{u} \rangle$ и $\delta\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$ осредненного состояния турбулентной среды с заданными полями скорости $\langle \mathbf{u} \rangle$ и напряжений $\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$, а именно

$$\langle \mathbf{u} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{u} \rangle + \delta\langle \mathbf{u} \rangle, \quad \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle \rightarrow \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle + \delta\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle,$$

и предположить эти флуктуации малыми, т.е.

$$\begin{aligned} (\delta\langle u \rangle)(\delta\langle u \rangle), \quad (\delta\langle u \rangle)(\delta\langle v \rangle), \quad \dots &\rightarrow 0, \\ (\delta\langle u \rangle)(\delta\langle u' u' \rangle), \quad (\delta\langle u \rangle)(\delta\langle u' v' \rangle), \quad \dots &\rightarrow 0 \\ (\delta\langle u' u' \rangle)(\delta\langle u' u' \rangle), \quad (\delta\langle u' v' \rangle)(\delta\langle v' w' \rangle), \quad \dots &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

(а значит, пренебречь квадратами флуктуаций и их производных, включая аналогичные возмущения для поля давления), то в случае покоящейся (в среднем) невязкой среды ($\nu \rightarrow 0$) с постоянными и изотропными напряжениями пульсаций получим систему линейных уравнений, эквивалентную электромагнитным уравнениям Максвелла, где в роли магнитной и электрической компонент выступают, соответственно, завихренность средней скорости и поток турбулентных напряжений (см. [6], [7]):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \nabla \times \delta\langle \mathbf{u} \rangle \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = \nabla \delta\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle \\ (E^x &= \nabla \langle u' u' \rangle, \quad E^y = \nabla \langle v' u' \rangle, \quad E^z = \nabla \langle w' u' \rangle). \end{aligned}$$

Скорость распространения волн в однородно и изотропно пульсирующей среде, покоящейся в среднем, определяется квадратным корнем удельной энергии пульсаций $\sqrt{\langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle}$ ее невозмущенного состояния (см. характеристическое уравнение для фаз $\varphi(t, x, y, z)$ крупномасштабных колебаний полей завихренности и потока напряжений, [6], [7]):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \langle w \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 &= \langle u'^2 \rangle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \langle v'^2 \rangle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \langle w'^2 \rangle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \\ &+ 2 \langle u' v' \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2 \langle v' w' \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2 \langle w' u' \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \nu &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

распространяющихся с некоторой переменной (но конечной) скоростью в осредненной неоднородной и неізотропной турбулентной среде.

7. БЛИЖНИЙ СЛЕД

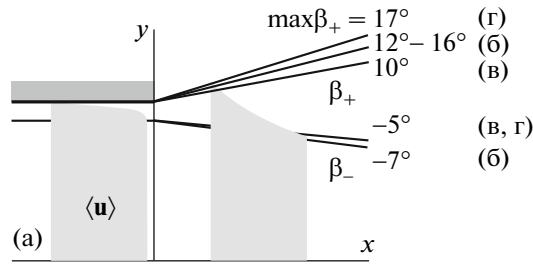
Малая доля энергии пульсаций в общей энергии движения и тонкая структура линейных волн крупномасштабных флуктуаций затрудняют их регистрацию. И все же можно попытаться провести их валидацию по результатам измерений из [29], [36] и [37].

Так, в случае плоской стационарной затопленной турбулентной струи с помощью характеристического уравнения линейных возмущений

$$\left(\langle u \rangle^2 - \langle u'^2 \rangle \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - 2 \langle u' v' \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \langle v'^2 \rangle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 0$$

находим наклон прямой

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k = - \frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y} (x_0, y_0), \quad \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0),$$



Фиг. 6.

касающейся плоской характеристики (как линии постоянной фазы $\varphi(x_0, y_0)$) в выбранной точке (x_0, y_0) и приближающей характеристику в окрестности указанной точки:

$$k = k_{\mp} = \frac{-\tau_{12} \mp \sqrt{\tau_{12}^2 + (1 - \tau_{11})\tau_{22}}}{1 - \tau_{11}}, \quad \tau_{11} = \frac{\langle u'^2 \rangle}{\langle u \rangle^2},$$

$$\tau_{12} = \frac{\langle u'v' \rangle}{\langle u \rangle^2}, \quad \tau_{22} = \frac{\langle v'^2 \rangle}{\langle u \rangle^2} \quad \text{при } x = x_0 = 0 \quad \text{и} \quad y = y_0.$$

По результатам измерений внутри канала (см. [29]) на его выходном сечении $x = 0$ должен установиться стационарный турбулентный поток с четко различимой границей $y = y_*$, определяемой близкими положениями максимумов корреляций τ_{11} , τ_{12} и τ_{22} , при выполненных для них соотношениях вида

$$144\tau_{11} = 2.5, \quad 144\tau_{22} = 1 \quad \text{и} \quad 144\tau_{12} = 0.4\sqrt{\tau_{11}}\sqrt{\tau_{22}} = 1 \quad \text{при } y_0 = y_*,$$

$$\tau_{11}(y_*) = \max_{0 \leq y \leq 1} \tau_{11}, \quad \tau_{12}(y_*) = \max_{0 \leq y \leq 1} \tau_{12}, \quad \tau_{22}(y_*) = \max_{0 \leq y \leq 1} \tau_{22}.$$

Вблизи стенки определяются другие величины (см. [29]):

$$\tau_{12} \rightarrow 0, \quad \sqrt{\tau_{11}} \rightarrow 0.3, \quad \frac{\sqrt{\tau_{22}}}{\sqrt{\tau_{11}}} \rightarrow \gamma \leq \gamma_{\max} = 1,$$

$$\gamma > 0,$$

в которых буквой γ обозначено не измеренное у поверхности отношение скоростей поперечных пульсаций, допускающее тем не менее указанную оценку из полученных графиков корреляций.

Теперь, предположив, что возмущения осредненного потока на выходе струи должны распространяться по характеристикам турбулентных волн, отождествим с ними линии расхождения углов трапециевидного профиля ближнего следа и приблизим их касательными, исходящими из точек внутренней и внешней границ турбулентного пограничного слоя. В результате приходим к следующим величинам нижнего и верхнего углов наклона прямых расхождения, сравниваемых с измеренными:

$$\beta_- = \arctg\left(k_- = -\left(\frac{1 + \sqrt{145 - 2.5}}{144 - 2.5} \approx 0.088\right)\right) \approx -5^\circ \quad \text{при } y_0 = y_* \quad (\text{см. [6]}),$$

$$\beta_- \approx -7^\circ \quad (\text{см. [36]}) \quad \text{и} \quad \beta_- = \arctg\left(-\frac{0.981}{11.8} \approx 0.083\right) \approx -5^\circ \quad (\text{см. [37]});$$

$$k_+ = 0.3\sqrt{\frac{\gamma}{0.91}} \leq \max k_+ = \frac{0.3}{\sqrt{0.91}} \approx 0.315,$$

$$\beta_+ = \arctg(k_+) \leq \max \beta_+ \approx 17^\circ \quad (\text{см. [6]}),$$

$$12^\circ \leq \beta_+ \leq 16^\circ \quad (\text{см. [36]}) \quad \text{и} \quad \beta_+ = \arctg\left(\frac{2.04}{11.8} \approx 0.173\right) \approx 10^\circ \quad (\text{см. [37]}).$$

С учетом большой разницы ($\approx 12^\circ$) абсолютных значений вычисленных углов их вычисленные величины можно считать сравнимыми с измеренными величинами. На фиг. 6 изображены измеренные углы расхождения трапециевидного профиля скорости на начальном участке плоской затопленной турбулентной струи: (б) – см. [36] и (в) – см. [37]; углы, вычисленные по волновым характеристикам: (г) – см. [6]; турбулентного пограничного слоя в канале на (а) – см. [29].

8. СЛАБАЯ ДИФРАКЦИЯ

Обратимся теперь к совместной системе скоростей и корреляций, где ограничимся простыми одномерными полями при заданном постоянном падении давления:

$$\begin{aligned}\langle u \rangle_{z,x} = \langle v \rangle = \langle w \rangle = \langle p_y \rangle = \langle p_z \rangle = \langle w'u' \rangle = \langle w'v' \rangle &= 0, \\ \langle u'u' \rangle_{z,x} = \langle v'u' \rangle_{z,x} = \langle w'u' \rangle_{z,x} &= 0, \\ -\langle p_x \rangle = -\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} > 0, \quad \sqrt{\langle v'^2 \rangle} = u_*^2 \tau_{22}, \quad \tau_{22} = \text{const} > 0.\end{aligned}$$

В сделанных упрощениях система сводится к четырем уравнениям, из которых решения двух первых уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w'^2 \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle u'^2 \rangle = -2 \langle u'v' \rangle \langle u \rangle_y$$

определяются решениями двух других

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial t} + u_*^2 \tau_{22} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = 0.$$

Теперь приблизим установившиеся профили скорости и корреляции на выходном сечении простыми, но близкими к измеряемым зависимостям, а именно постоянной и линейной функциями соответственно, без учета пограничного слоя, размеры которого считаем несоизмеримыми с областью течения вне канала $x > 0$, где и отыскиваются крупномасштабные движения:

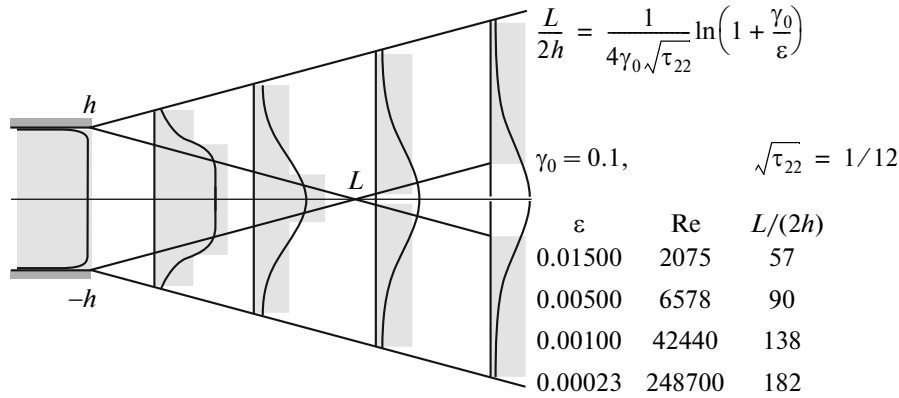
$$\begin{aligned}\langle u \rangle = u_* \bar{u}(\bar{t}, \bar{y}), \quad \langle u'v' \rangle = u_*^2 \tau(\bar{t}, \bar{y}), \quad \bar{t} = \frac{u_*}{h} t, \\ \tau(0, \bar{y}) = \bar{y} \quad \text{и} \quad \bar{u}(0, \bar{y}) = \bar{u}_0 = \frac{1}{2\gamma_0} \ln \left(1 + \frac{\gamma_0}{\varepsilon} \right) \quad \text{при} \quad |\bar{y}| \leq 1, \\ \tau(0, \bar{y}) = \bar{u}(0, \bar{y}) = 0 \quad \text{при} \quad |\bar{y}| > 1.\end{aligned}$$

Заметим, что безразмерные начальные профили скорости и корреляции являются кусочно-непрерывными стационарными решениями последней пары уравнений

$$\begin{aligned}\langle u \rangle = u_* \bar{u}(\bar{t}, \bar{y}), \quad \langle u'v' \rangle = u_*^2 \tau(\bar{t}, \bar{y}), \quad \bar{t} = \frac{u_*}{h} t, \\ \tau(0, \bar{y}) = \bar{y} \quad \text{и} \quad \bar{u}(0, \bar{y}) = \bar{u}_0 = \frac{1}{2\gamma_0} \ln \left(1 + \frac{\gamma_0}{\varepsilon} \right) \quad \text{при} \quad |\bar{y}| \leq 1, \\ \tau(0, \bar{y}) = \bar{u}(0, \bar{y}) = 0 \quad \text{при} \quad |\bar{y}| > 1; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} - \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \tau}{\partial \bar{y}} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau}{\partial \bar{t}} + \tau_{22} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0,\end{aligned}$$

что в пренебрежении вязкостью ($\varepsilon \rightarrow 0$) и при заданной постоянной интенсивности поперечных пульсаций τ_{22} дает искомую задачу Коши для профиля скорости начального участка турбулентной струи:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \quad \bar{x} = \bar{t} \sqrt{\tau_{22}} > 0, \quad -\infty < \bar{y} < \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$



Фиг. 7.

$$\bar{u}(0, \bar{y}) = \begin{cases} \bar{u}_0, & |\bar{y}| \leq 1 \\ 0, & |\bar{y}| > 1 \end{cases}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}(0, \bar{y}) = 0, \quad \bar{u}_0, \tau_{22} = \text{const} > 0.$$

Единственным кусочно-непрерывным решением задачи будет движение вдоль оси канала $\bar{x} > 0$ за его пределами со скоростью $\sqrt{\tau_{22}}$ и распад симметричного профиля $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = -\bar{u}(\bar{x}, -\bar{y})$. На близком расстоянии $\bar{x} \leq 1$ от выходного сечения $\bar{x} = 0$ профиль имеет вид трех ступенек — сужающейся центральной $-1 + \bar{x} \leq \bar{y} \leq 1 + \bar{x}$ высоты \bar{u}_0 и двух расширяющихся боковых $-1 - \bar{x} \leq \bar{y} \leq -1 + \bar{x}$ и $1 - \bar{x} \leq \bar{y} \leq 1 + \bar{x}$ вдвое меньшей высоты. На дальнем расстоянии $\bar{x} > 1$ этот профиль распадается на две ступени ширины канала $-1 - \bar{x} \leq \bar{y} \leq 1 - \bar{x}$ и $-1 + \bar{x} \leq \bar{y} \leq 1 + \bar{x}$ с той же малой высотой $\bar{u}_0/2$, которые продолжают смещение вдоль оси канала с прежней скоростью $\sqrt{\tau_{22}}$, одновременно удаляясь друг от друга по вертикали с удвоенной скоростью смещения $2\sqrt{\tau_{22}}$ в безразмерных переменных. На фиг. 7 представлен профиль средней скорости ближнего участка плоской затопленной турбулентной струи (вертикальная кривая) с начальным сужением его центральной плоской части по характеристикам с последующим ее “размыванием”, перемешиванием и перемежаемостью в слоях смешения и вырождением в профиль Наудашера на дальнем участке следа [13]. Полутоном окрашено решение волнового уравнения для профиля скорости “идеальной” турбулентной среды (без молекулярной и турбулентной диффузий), где след распался бы на два (слабая дифракция следа).

Раздвоение турбулентной среды должно произойти на расстоянии

$$L = u_* \bar{u}_0 \bar{t} = \bar{u}_0 \bar{t} = \frac{\bar{u}_0 h}{\sqrt{\tau_{22}}} = \frac{h}{2\gamma_0 \sqrt{\tau_{22}}} \ln\left(1 + \frac{\gamma_0}{\varepsilon}\right) = 60h \ln \frac{1}{10\varepsilon}$$

при $\gamma_0 = 0.1$ и $\sqrt{\tau_{22}} = 1/12$.

9. ВОЗВРАЩЕНИЕ К МЕХАНИКЕ

Для всего изложенного выше естественен вопрос: так ли уж хаотична турбулентность? Вероятно, Томсон ответил бы на него отрицательно: для него бурлящая среда всегда была упорядоченным движением большой совокупности вихрей как элементов наблюдаемого беспорядка. Между тем интересовавшие его условия их возникновения, взаимодействия, индивидуальной и коллективной устойчивости до сих пор остаются малоизученными.

Перейти на язык механики означало бы отойти от сложившихся стереотипов. Но при этом возникает естественный вопрос: почему при потере устойчивости ламинарному потоку “выгоднее” свернуться в рулон? И если только сохранение массы и равновесие внутреннего импульса среды обеспечивают локальное падение давления к центру вращения (см. [8, § 1]), то что можно сказать о распределении поля температуры внутри вихря или о внешней теплоотдаче на его поверхности? Ведь хорошо известно, что нагреванием воды в теплоизолированном сосуде исключительно при помощи ее мелкомасштабного перемешивания (системой внутренних решеток на общей оси, раскручиваемой ниткой, привязанной к падающему грузу) Джоулю и удалось изме-

рять свой механический эквивалент тепла (теплоемкость при постоянном объеме) (см. [38]). Но как среда “греет” себя каждым вихрем в отдельности?

Список подобных вопросов может быть продолжен. Ограничимся краткими выводами.

1. Турбулентность обнаруживает себя новыми физическими силами — напряжениями пульсаций.
2. Она возникает как результат развития гидродинамических неустойчивостей и является вихревыми каскадами в областях с большими градиентами скоростей.
3. Ее пульсациями служат возмущения, вызванные потерей устойчивости очередного основного течения и возникновением нового поля скоростей.
4. Возмущениями служат вихри различных форм и размеров.
5. Правоммерно любое физически оправданное осреднение турбулентной среды.
6. Возникновение турбулентности происходит за короткое время и реализуется на большом числе мод Фурье.
7. Удаленные объемы осредненной турбулентной среды могут взаимодействовать с помощью линейных волн малых возмущений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belotserkovskii O.M.* Computational experiment: direct numerical simulations of complex gas-dynamics flows on the basis of Euler, Navier-Stokes and Boltzmann models // *Karman's Lect., von Karman Inst. Fluid Dynamics*. March 15–19, 1976. Brussel. *Numer. Methods in Fluid Dynamics*. Washington–London: Hemisphere, 1978. P. 339–387.
2. *Белоцерковский О.М.* Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1985. Т. 25. № 12. С. 1856–1882.
3. *Belotserkovskii O.M.* Constructive modeling of structural turbulence and hydrodynamic instabilities. Singapore: World Scient. Publ. Co., 2009.
4. *Fortova S.V.* Numerical simulation of cascade development of instability in the shear layer // *Phys. Extreme States Matter*. Chernogolovka: IPCP RAS, 2009. P. 117–120.
5. *Белоцерковский О.М., Фортова С.В.* Макропараметры пространственных течений в свободной сдвиговой турбулентности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50. № 6. С. 1126–1139.
6. *Трошкин О.В.* О распространении малых возмущений в идеальной турбулентной среде // *Докл. АН СССР*. 1989. Т. 307. № 5. С. 1072–1076.
7. *Трошкин О.В.* Волны возмущений турбулентных сред // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1993. Т. 33. № 12. С. 1844–1863.
8. *Troshkin O.V.* Nontraditional methods in mathematical hydrodynamics // (Trans. Math. Monographs. AMS). Providence, RI, USA, 1995. V. 144.
9. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Докл. АН СССР*. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303.
10. *Обухов А.М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.* 1941. Т. 5. № 4. С. 453–466.
11. *Richardson L.F.* The supply of energy from and to atmospheric eddies // *Proc. Roy. Soc. London*. 1920. V. 97A. P. 354–373.
12. *Canuto V.M.* Turbulence and laminar structures: can they co-exist? // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2000. V. 317. P. 985–988.
13. *Трошкин О.В., Яницкий В.Е.* Перемежаемость в одной задаче свободной турбулентности. М.: ВЦ АН СССР, 1988.
14. *Thomson W.* On the propagation of laminar motion through a turbulency moving inviscid liquid // *Philos. Mag. Ser. 5*. 1887. V. 24. Iss. 149. P. 342–353.
15. *Reynolds O.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. A*. 1895. V. 186. P. 123–164.
16. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965.
17. *Арнольд В.И., Мешалкин А.Д.* Семинар А.Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958–1959) // *Успехи матем. наук*. 1960. Т. 15. № 1. С. 247–250.
18. *Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // *Прикл. матем. и механ.* 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1140–1143.
19. *Трошкин О.В.* Алгебраическая структура двумерных стационарных уравнений Навье–Стокса и нелокальные теоремы единственности // *Докл. АН СССР*. 1988. Т. 298. № 6. С. 1372–1376.

20. *Опарина Е.И., Трошкин О.В.* Устойчивость течения Колмогорова в канале с твердыми стенками // Докл. РАН. 2004. Т. 398. № 4. С. 487–491.
21. *Юдович В.И.* Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1973. № 1. С. 32–35.
22. *Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М.* Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981.
23. *Белоцерковский С.О.* Моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости на основе уравнений Навье–Стокса. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МФТИ, 1979.
24. *Крылов А.Л.* Об устойчивости течения Пуазейля в плоском канале // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. № 5. С. 978–981.
25. *Рождественский Б.Л., Симакин И.Н.* Моделирование турбулентных течений в плоском канале // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 1. С. 96–121.
26. *Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Трошкин О.В.* Бифуркационная модель турбулентного течения в канале // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 2. С. 313–317.
27. *Patel V.C., Head M.R.* Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. Pt. 1. P. 181–201.
28. *Beavers G.S., Sparrow E.M.* Low Reynolds number turbulent flow in large aspect ratio rectangular ducts // J. Basic Engng. 1971. V. 93. P. 296–299.
29. *Конт-Белло Ж.* Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М.: Мир, 1968.
30. *Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Трошкин О.В., Даниленко А.Ю.* Бифуркационная модель простых турбулентных течений. М.: МИАН СССР, 1988.
31. *Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Трошкин О.В.* Турбулентность как неравновесный фазовый переход // Теор. и матем. физ. 1992. Т. 92. № 2. С. 293–311.
32. *Белоцерковский О.М., Опарин А.М.* Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. М.: Наука, 2000.
33. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
34. *Hoffman J., Johnson C.* Computational turbulent incompressible flow. Berlin etc.: Springer, 2007.
35. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
36. *Абрамович Г.Н.* Теория свободной струи и ее приложения. М.: ЦАГИ, 1936. Вып. 293.
37. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкостей и газов. М.: Дрофа, 2003.
38. *Joule J.P.* On the mechanical equivalent of heat // Philos. Trans. 1850. V. 140. Pt. 1. P. 61–82.