

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Lanin, Comparison Kirchhoff's method and the method of parabolic equation in the whispering gallery waves problem in a vicinity of flex point: of the boundary, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 139–145

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

January 14, 2025, 18:23:31



СРАВНЕНИЕ ПОЛЯ ВОЛНЫ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ, ВЫЧИСЛЕННОГО  
 ПО МЕТОДУ КИРХГОФА И МЕТОДУ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО  
 УРАВНЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ НУЛЯ КРИВИЗНЫ ГРАНИЦЫ.

В работе проводится сопоставление численных данных, полученных в результате применения метода Кирхгофа и метода параболического уравнения при решении задачи о поле волны шепчущей галереи, распространяющейся над вогнуто-выпуклой границей  $S$ , имеющей точку перегиба. Изучению поведения поля в окрестности этой точки посвящены работы [1], [2], в которых даны математическая постановка задачи и проводятся подробные исследования. Физическое описание изучаемого волнового процесса кратко сводится к тому, что над вогнутой частью границы  $S$  распространяется волна шепчущей галереи  $U_p(s, n)$  ( $s$  - длина дуги, отсчитываемая от точки перегиба границы  $s=0$ ,  $n$  - нормаль к кривой,  $p$  - номер волны шепчущей галереи), набегавшая на точку перегиба со стороны  $s < 0$ . Как следствие дифракции этой волны в окружающее пространство над выпуклой частью границы формируются волны соскальзывания. Формулы, описывающие волны шепчущей галереи при  $s < 0$  могут быть аналитически продолжены и в результате при  $s > 0$  получаются выражения для волн соскальзывания. В окрестности же точки  $s=0$  поведение поля требует специального рассмотрения. В работах [1], [2] для решения задачи применяются два различных подхода: аналитический метод, использующий интеграл Кирхгофа [1], и метод параболического уравнения, решение которого проводится при помощи конечных разностей [2]. В методе Кирхгофа поле  $U_p(s, n)$  вне границы ищется в виде интеграла по  $S$ , в подынтегральную функцию которого входит нормальная производная волны шепчущей галереи  $\partial U_p(s, n) / \partial n |_{n=0}$ , которая лишь приближенно описывает поведение поля на  $S$  в окрестности точки перегиба границы  $s=0$ . Поэтому результаты аналитических исследований интеграла Кирхгофа в [1], полученные при  $k \rightarrow \infty$  ( $k$  - волновое число) в виде асимптотических формул, содержащих специальные функции  $Z_p(v)$  и  $J_p(s, n)$ , оказываются также приближенными. Эти формулы описывают поле волны шепчущей галереи в окрестности касательной  $V=0$ , проведенной к границе в точке перегиба, (см.(2.5) в [1]) и в окрестности самой точки  $s=0$  (см.(2.II) в [1]). Для практического использования полученных в [1] формул необходимо выяснить с какой степенью точности эти формулы описывают поле излучения волны шепчущей галереи. Этот вопрос не может быть решен путем проведения более

тщательных оценок внутри самого метода Кирхгофа. Однако, можно сравнить полученные в [1] результаты с вычислениями волнового поля, проведенными на основе параболического уравнения и метода сеток [2]\*). Примененный в [2] при решении параболического уравнения метод конечных разностей (явная схема) представляется менее удобным с вычислительной и прикладной точки зрения по сравнению с методом Кирхгофа (большой объем машинного времени, отсутствие аналитических формул). Однако, этот метод дает (за счет выбора шага) достаточно высокую точность при проведении соответствующих вычислений. Поэтому результаты, представленные в [2], могут быть использованы для оценки точности результатов, полученных по методу Кирхгофа в [1].

Введем безразмерные криволинейные координаты  $t, x$ , полагая  $t = k^{1/5} \beta^{2/5} z$  и  $x = k^{3/5} \beta^{1/5} n$ , где  $\beta$  - некоторая постоянная ( $\beta > 0$ ). Тогда формулы (2.5) и (2.II) в [1], согласующиеся при  $t \rightarrow -\infty$  с краевыми условиями задачи в [2], запишутся в виде

$$U_p(t, x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{i[k^{4/5}\beta^{2/5}t + \frac{1}{2}tv^2]} Z_p(v), \quad \begin{array}{l} \text{(окрестность} \\ \text{касательного луча)} \end{array} \quad (I.a)$$

$$U_p(t, x) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{v}} e^{ik^{4/5}\beta^{2/5}t} J_p(x, t), \quad \begin{array}{l} \text{(окрестность} \\ \beta = 0) \end{array} \quad (I.6)$$

где  $Z_p(v)$  и  $J_p(x, t)$  - специальные функции [1], протабулированные на ЭВМ. Угловой параметр  $v$  в (I.a) в первом приближении может быть выражен посредством переменных  $x, t$  по формуле

$$v = \frac{x - \frac{1}{6}t^3}{t}$$

Для сравнения поля волны шепчущей галереей, вычисленного по методу Кирхгофа и методу параболического уравнения в окрестности касательного луча  $v=0$ , были проведены расчеты в заметке [3]. Поле вычислялось по формуле (I.a) при  $\rho=1$ , параметр  $v$  в вычислениях менялся в пределах  $0.3 < v < 1.4$  при фиксированных значениях  $t = 1.8; 2; 2.2$ . На рис. I-2 представлены графики, построенные на основании таблицы в [3], содержащей значения волнового поля, вычисленного по методу сеток (сплошные линии) и по методу Кирхгофа (пунктирные линии).

\* В [2] представлены теневые рисунки, построенные на основании имеющихся таблиц значений волнового поля. Эти рисунки иллюстрируют качественный характер поведения поля излучения волны шепчущей галереей.

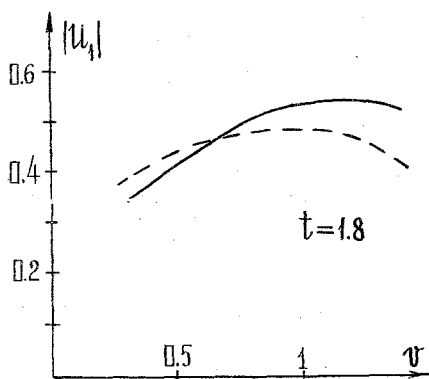


Рис. I

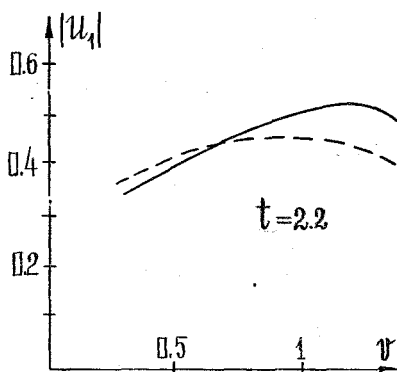


Рис. 2

Рисунки I-2 показывают хорошее совпадение результатов вычислений волнового поля, относительное отличие этих результатов колеблется от 5% до 20%.

Особый интерес представляет сравнение поля в окрестности перегиба кривизны границы (окрестность точки  $\beta=0$ ). В этой области поле рассчитывалось по формуле (I.6) для первой ( $p=1$ ) и второй  $p=2$  волны шепчущей галереи. Переменная  $x$  менялась в пределах  $0 < x \leq 10$  с шагом  $\Delta x = 0.3$  при фиксированных значениях координаты  $t$ . Результаты сравнений поля излучения волны шепчущей галереи даны в виде рисунков 3-II, на которых изображены кривые, описывающие модули волнового поля  $u_p(x, t)$ , вычисленного по методу Кирхгофа (пунктирные кривые) и по методу параболического уравнения (сплошные кривые).

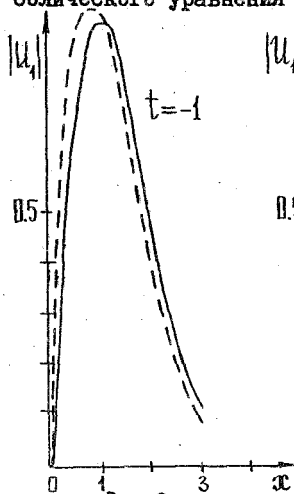


Рис. 3

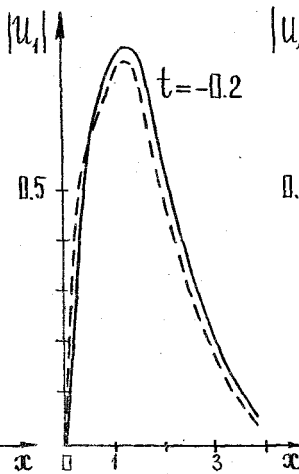


Рис. 4

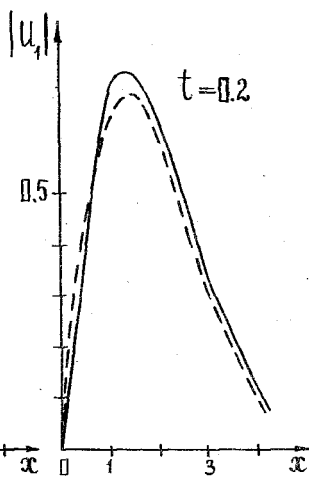


Рис. 5

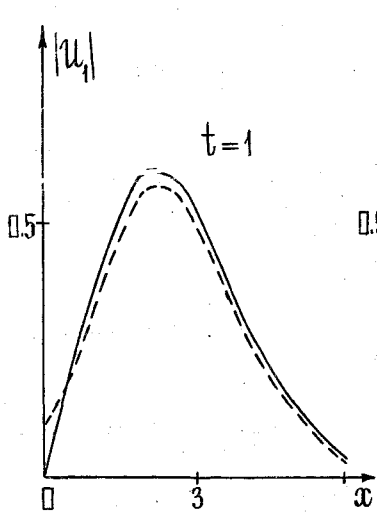


Рис. 6

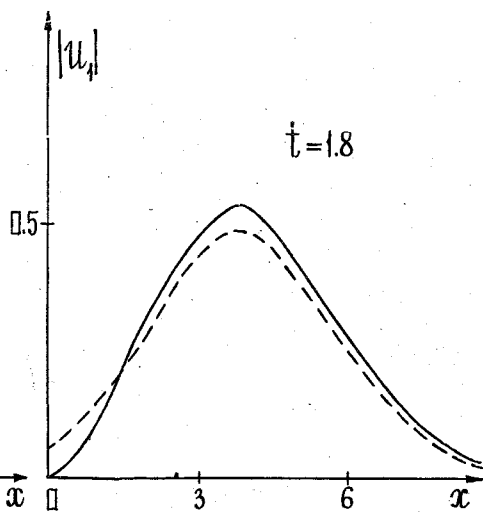


Рис. 7

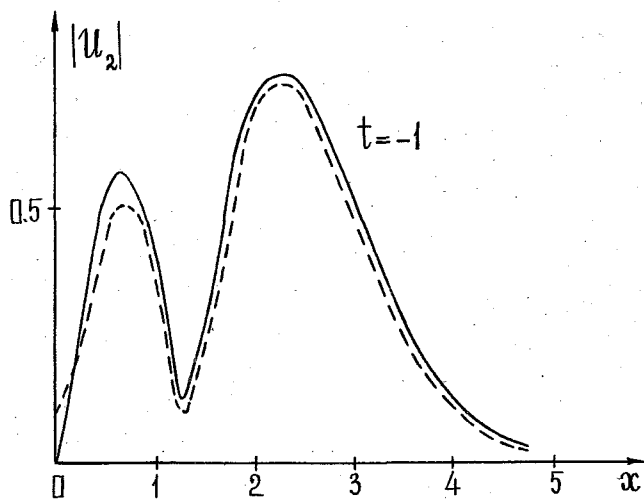


Рис. 8

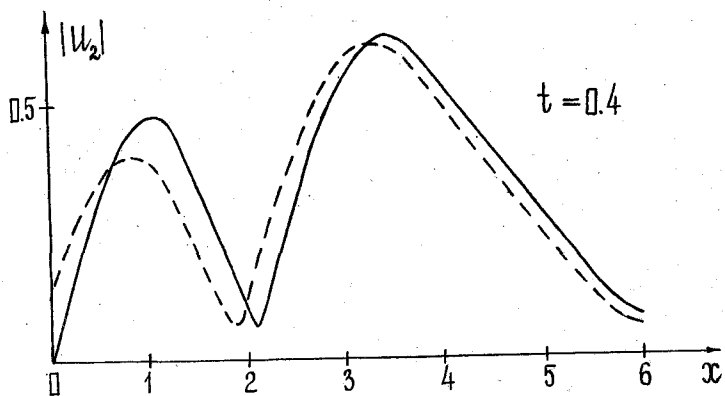


Рис. 9

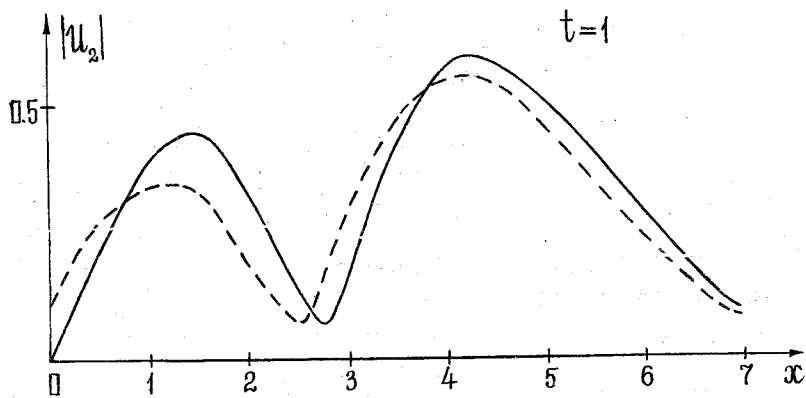


Рис. 10

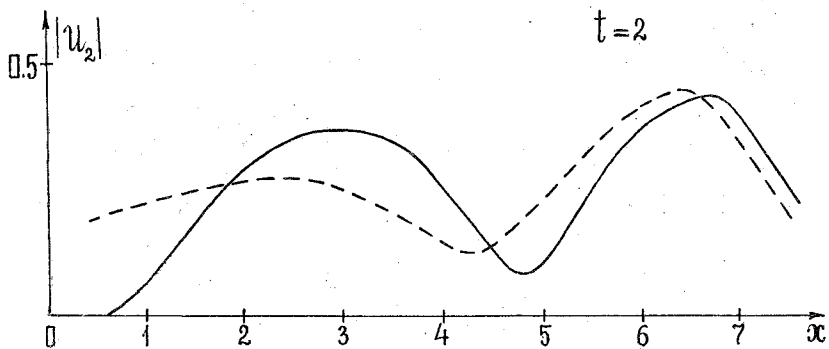


Рис. 11

Проанализируем полученные кривые. Волна шепчущей галереи набегаает на точку перегиба границы  $z - t = 0$  со стороны больших отрицательных  $t < 0$ . В этой области волна описывается асимптотической формулой, которая была использована в вычислениях как в методе Кирхгофа, так и в качестве краевого условия в методе сеток. Асимптотическая формула достаточно точно описывает поведение поля при отрицательных  $t$ , что нашло свое отражение в фактическом совпадении сплошной и пунктирной кривых как для первой, так и для второй волны шепчущей галереи (рис.3-4 и рис.8). На рис.4 это совпадение имеет место при  $t = -0.2$ . Аналогично можно показать, что интеграл Кирхгофа дает хорошее приближение к результатам, полученным методом сеток, вплоть до малых отрицательных значений  $t \approx -0.1$ . Обратимся теперь к рис.5-7 и рис.9-II, где показаны результаты сравнений метода Кирхгофа и метода сеток как для малых ( $t \approx 0.1 - 0.2$ ), так и для больших положительных значений  $t$ , т.е. в области где формируются волны соскальзывания. На этих рисунках сплошные и пунктирные кривые, в основном, качественно повторяются. Что касается количественного совпадения, то относительная величина различия в значении волнового поля, вычисленного двумя методами, колеблется от 1% до 20%.

Таким образом, проведенные расчеты и сравнения показывают, что метод Кирхгофа и метод параболического уравнения дают хорошо согласующиеся между собой результаты вычислений поля волны шепчущей галереи практически над всей вогнуто-выпуклой границей. На самой границе метод параболического уравнения дает нулевое значение для волнового поля. Значение поля, вычисленного на границе по методу Кирхгофа, также близко к нулю (см.рис.7 в [I]). Так вне окрестности точки перегиба границы  $t = 0$ , т.е. при  $|t| \geq 0.1$ , значение поля на границе колеблется в пределах от 0.01 до 0.13.

#### Литература

1. Булдырев В.С., Ланин А.И. Поле изучения волны шепчущей галереи над вогнуто-выпуклой границей. Наст. сборн., с.49-65.
2. Попов М.М., Пшенчик И. Численное решение задачи о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы. - Зап. научн.семина.ЛОМИ. т.62, 1976, с.207-219.
3. Ланин А.И., Попов М.М. Сравнение метода Кирхгофа и параболического уравнения в задаче о волнах шепчущей галереи около точки перегиба. - В кн.: Краткие тезисы докл. УП

Lanin A.I. Comparison Kirchhoff's method and the method of parabolic equation in the whispering gallery waves problem in a vicinity of flex point of the boundary.

The whispering gallery waves problem in a neighbourhood of a boundary flex point is considered. The author uses Kirchhoff's method and compares the results with the ones obtained by the method of parabolic equation [1]. The results of the comparison are discussed and diagrams are presented.