

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Дроботухина, Классификация проектных зацеплений Монтеиноса, *Алгебра и анализ*, 1991, том 3, выпуск 1, 118–130

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

15 марта 2025 г., 14:26:57



© 1991 г.

## КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ МОНТЕСИНОСА

Ю. В. ДРОБОТУХИНА

Зацепления в трехмерном проективном пространстве, аналогичные зацеплениям Монтесиноса в трехмерной сфере, классифицируются с точностью до изотопии и до гомеоморфизмов.

### §1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1 Проективные зацепления Монтесиноса.** Задача классификации зацеплений в трехмерной сфере эффективно решена лишь для некоторых специальных классов зацеплений. Одним из таких классов является класс зацеплений Монтесиноса (который включает в себя зацепления с двумя мостами или, иначе, четырехсплетения). В настоящей работе вводится аналогичный класс зацеплений в проективном пространстве  $\mathbb{R}P^3$ , и для этого класса решаются задачи классификации с точностью до изотопии и до гомеоморфизма. Формулировке основных результатов предшествовало несколько определений.

*Тенглом* называется одномерное компактное гладкое подмногообразие  $t$  стандартного шара  $D^3$  с границей  $\partial t$ , состоящей из четырех различных точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$  на  $\partial D^3$ . Два тенгла *изотопны*, если они переводятся друг в друга изотопией шара, тождественной на  $\partial D^3$ . В дальнейшем мы будем рассматривать только такие тенглы, граница которых состоит из двух пар центрально симметричных точек, лежащих на ортогональных диаметрах. Ясно, что два тенгла изотопны тогда и только тогда, когда их диаграммы можно соединить последовательностью преобразований Райдемайстера  $\Omega_1 - \Omega_3$  (см., например, [1, 2]).

*Произведением*  $(t_1 t_2)$  тенглов  $t_1$  и  $t_2$  называется тенгл, получающийся как объединение  $\Gamma \cup t'_1 \cup t'_2$ , где  $\Gamma$  - дуги в  $D^3 \setminus (\text{Int } D_1 \cup \text{Int } D_2)$ , показанные на рис.1,  $t'_2$  - образ тенгла  $t_2$  при очевидной гомотетии  $D^3 \rightarrow D_2$ ,  $t'_1$  - образ тенгла  $t_1$  при композиции симметрии относительно плоскости, ортогональной плоскости диаграммы и проходящей через точки  $p_1$  и  $p_3$ , и гомотетии  $D^3 \rightarrow D_1$ . Пример произведения показан на рис.2.

*Целочисленными тенглами*  $n, -n, (n \in \mathbb{N})$  и 0 называются тенглы, изображенные на рис. 3,  $a$ - $v$  соответственно. Тенгл, изображенный на рис. 3,  $z$ , обозначается символом  $\infty$

---

*Ключевые слова:* тенгл, проективное зацепление Монтесиноса, проективное четырехсплетение, призматические многообразия.

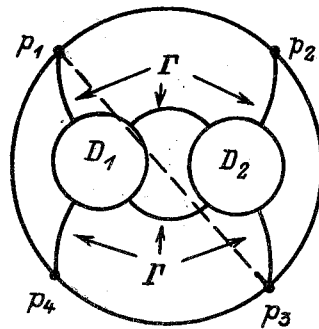


Рис. 1.

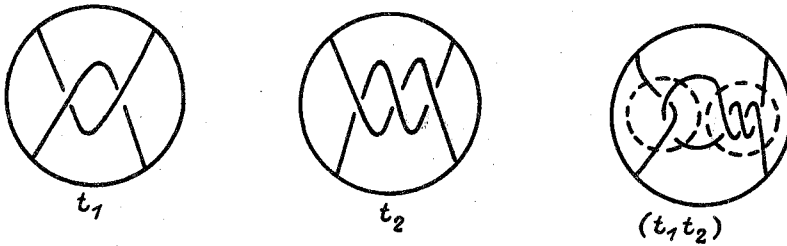


Рис. 2.

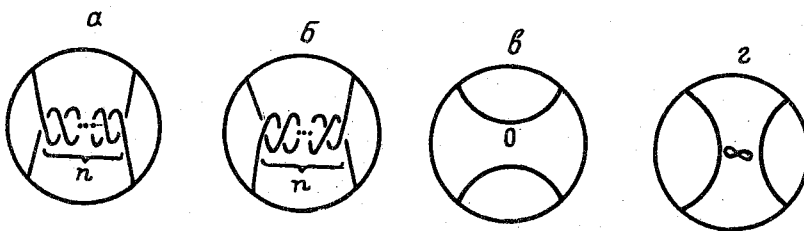


Рис. 3.

Рациональным тенглом  $i_1 \dots i_n$  называется произведение  $(\dots((i_1 i_2) i_3) \dots i_n)$  целочисленных тенглов  $i_1, \dots, i_n$ .

Конвей [3] показал, что два рациональных тенгла  $i_1 \dots i_n$  и  $j_1 \dots j_m$  изо-

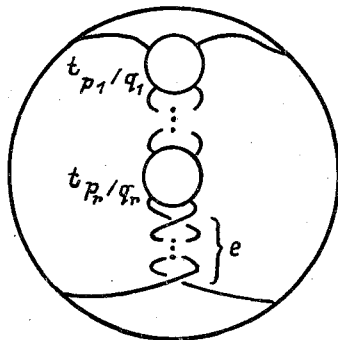


Рис. 4.

топны тогда и только тогда, когда соответствующие непрерывные дроби

$$i_n + 1/i_{n-1} + 1/i_{n-2} + \dots + 1/i_1$$

и

$$j_m + 1/j_{m-1} + 1/j_{m-2} + \dots + 1/j_1$$

равны (считаем, что  $1/0 = \infty$ ,  $1/\infty = 0$ ,  $\infty + k = \infty$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ). Поэтому любой рациональный тенгл, отличный от  $0$ ,  $\infty$ ,  $1$ ,  $-1$ , можно привести к стандартной форме  $i_1 \dots i_n$  либо  $i_1 \dots i_n 0$ , где  $|i_1| \geq 2$ , все числа  $i_1, \dots, i_n$  отличны от  $0$  и имеют одинаковые знаки. Рациональный тенгл  $i_1 \dots i_n$  с

$$i_n + 1/i_{n-1} + 1/i_{n-2} + \dots + 1/i_1 = p/q \in \mathbb{Q}$$

называется тенглом  $p/q$ . Рациональный тенгл  $p/q$  будем обозначать символом  $t_{p/q}$ .

При отождествлении диаметрально противоположных точек граничной сферы  $\partial D^3$  тенгл  $t \subset D^3$  превращается в зацепление  $L \subset \mathbb{R}P^3$ . Такие зацепления, полученные из рациональных тенглов, мы будем называть *проективными четырехсплетениями* (объяснение этого термина см. в Добавлении).

Проективным зацеплением *Монтесиноса типа*  $(e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r)$  называется зацепление, изображенное на рис.4, где  $e \in \mathbb{Z}$ ,  $t_{p_i/q_i}$  — рациональный тенгл типа  $p_i/q_i$ ,  $p_i \geq 2$  и  $p_i, q_i$  взаимно просты для всех  $i = 1, \dots, r$ .

## 1.2. Классификация проективных четырехсплетений.

**Теорема 1.** Два зацепления в вещественном проективном пространстве  $\mathbb{R}P^3$ , получающиеся из рациональных тенглов типов  $p/q$  и  $r/s$  (со взаимно простыми  $p, q$  и  $r, s$ ), изотопны тогда и только тогда, когда  $p/q = r/s$  или  $p/q = -s/r$ .

**Теорема 2.** Два зацепления в вещественном проективном пространстве  $\mathbb{R}P^3$ , получающиеся из рациональных тенглов типов  $p/q$  и  $r/s$  (со взаимно простыми  $p, q$  и  $r, s$ ), гомеоморфны тогда и только тогда, когда  $|p/q| = |r/s|$  или  $|p/q| = |s/r|$ .

**Доказательство теоремы 2.** Достаточность. Нетрудно видеть, что умножению дроби  $p/q$  на  $-1$  отвечает симметрия тенгла относительно плоскости

проекции, а обращению дроби  $p/q$  (т.е. перестановке чисел  $p$  и  $q$ ) отвечает симметрия относительно плоскости, ортогональной плоскости проекции и проходящей через точки  $p_1$  и  $p_3$  (рис. 1). Обе эти симметрии порождают автогомеоморфизм пространства  $\mathbb{R}P^3$ .

Необходимость вытекает из теоремы 3, которая будет доказана в § 2, и теоремы 4 о топологической классификации призматических многообразий.

**Теорема 3.** *Существуют в точности два двулистных накрывающих проективного пространства  $\mathbb{R}P^3$ , разветвленных над зацеплением, которое получается из рационального тенгла типа  $p/q$ . Они гомеоморфны призматическим многообразиям  $Q(|p|, |q|)$  и  $Q(|q|, |p|)$  (при условии, что  $p$  и  $q$  взаимно просты).*

**Теорема 4.** (см. [4,5]). *Многообразия  $Q(m_1, n_1)$  и  $Q(m_2, n_2)$  гомеоморфны тогда и только тогда, когда  $|m_1| = |m_2|$  и  $|n_1| = |n_2|$ .*

Теорема 1 выводится ниже в п.2.7 из теоремы 2 и известного факта несуществования обращающих ориентацию автогомеоморфизмов многообразий  $Q(m, n)$  при  $m \neq 1$  и  $n \neq 0$ .

### 1.3. Классификация проективных зацеплений Монтесиноса.

**Теорема 5.** *Два проективных зацепления Монтесиноса  $L$  и  $L'$  типов*

$$(e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r) \text{ и } (e', p'_1/q'_1, \dots, p'_{r'}/q'_{r'})$$

*с  $r, r' \geq 2$  изотопны тогда и только тогда, когда*

$$1) e - \sum_{i=1}^r p_i/q_i = e' - \sum_{i=1}^{r'} p'_i/q'_i;$$

2) *последовательности*

$$(p_1/q_1 \pmod{1}, \dots, p_r/q_r \pmod{1}) \text{ и } (p'_1/q'_1 \pmod{1}, \dots, p'_{r'}/q'_{r'} \pmod{1})$$

*получаются друг из друга в результате циклической перестановки и (или) обращения порядка.*

**Доказательство.** **Необходимость.** Построим прообраз проективного зацепления Монтесиноса  $L$  при накрытии  $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ . Для этого (см.[2]) поместим на плоскости диаграмму  $D$  зацепления  $L$ , рядом под ней поместим ее образ при скользящей симметрии относительно прямой, проходящей через центр круга диаграммы  $D$ ; в этом образе заменяем все проходы на переходы. Соединим простой дугой каждый лежащий на граничной окружности конец дуги диаграммы  $D$  с точкой, полученной из этого конца в результате последовательного применения симметрии относительно центра круга диаграммы  $D$  и скользящей симметрии. Соединяющие дуги выберем попарно непересекающимися. Нетрудно видеть, что при описанной скользящей симметрии и последующей замене проходов на переходы рациональный тенгл переходит сам в себя. Поэтому прообразом проективного зацепления Монтесиноса  $L$  типа  $(e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r)$  при накрытии  $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$  служит обычное зацепление Монтесиноса  $\tilde{L}$  типа

$$(2e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r),$$

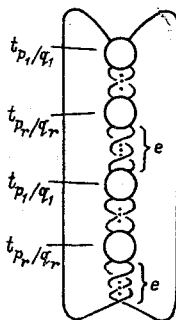


Рис. 5.

см. рис.5. Если зацепления  $L$  и  $L'$  изотопны, то изотопны и их прообразы  $\tilde{L}$  и  $\tilde{L}'$  в  $S^3$ . Из изотопической классификации зацеплений Монтесиноса в  $S^3$  (см., например, [6]) следует, что

$$2e - 2 \sum_{i=1}^r p_i/q_i = 2e' - 2 \sum_{i=1}^{r'} p'_i/q'_i$$

и что последовательности

$$(p_1/q_1 \bmod 1, \dots, p_r/q_r \bmod 1, p_1/q_1 \bmod 1, \dots, p_r/q_r \bmod 1)$$

и

$$(p'_1/q'_1 \bmod 1, \dots, p'_{r'}/q'_{r'} \bmod 1, p'_1/q'_1 \bmod 1, \dots, p'_{r'}/q'_{r'} \bmod 1)$$

получаются друг из друга в результате циклической перестановки и (или) обращения порядка. Значит, выполнены условия 1) и 2) теоремы.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2). Ясно, что изотопией зацепления  $L$ , порожденной циклической перестановкой тенглов и (или) обращением их порядка можно добиться выполнения условий  $p_i/q_i = p'_i/q'_i \bmod 1$  для всех  $i = 1, \dots, r$ . Очевидная изотопия (рис. 6, а) позволяет переместить часть из  $e$  скрещиваний в промежутки между тенглами. Сделаем это таким образом, чтобы между тенглами  $t_{p_i/q_i}$  и  $t_{p_{i+1}/q_{i+1}}$  было  $e_i = p_i/q_i - p'_i/q'_i$  скрещиваний (рис. 6, б). Присоединение  $e_i$  скрещиваний к тенглу  $t_{p_i/q_i}$  (рис. 6, б) дает тенгл  $t_{p'_i/q'_i}$ . Таким образом, мы получили зацепление Монтесиноса типа

$$(e - \sum_{i=1}^r (p_i/q_i - p'_i/q'_i), p'_1/q'_1, \dots, p'_r/q'_r),$$

т.е. зацепление  $L'$ .

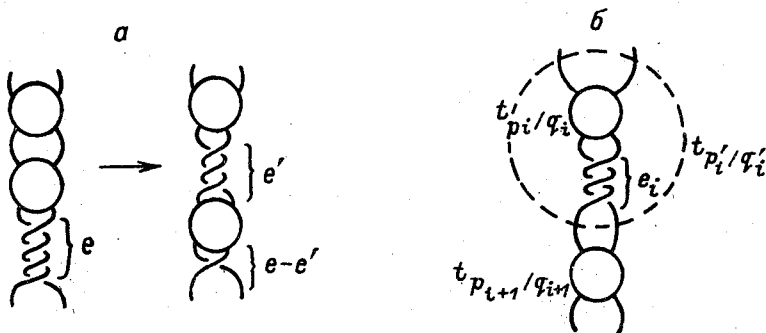


Рис. 6.

**Следствие.** Два проективных зацепления Монтезиноса  $L$  и  $L'$  типов

$$(e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r) \quad \text{и} \quad (e', p'_1/q'_1, \dots, p'_{r'}/q'_{r'})$$

с  $r, r' \geq 2$  гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует такое  $\epsilon$ , равное 1 или  $-1$ , что

- 1)  $e - \sum_{i=1}^r p_i/q_i = \epsilon(e' - \sum_{i=1}^{r'} p'_i/q'_i)$ ;
- 2) последовательности

$$(p_1/q_1 \bmod 1, \dots, p_r/q_r \bmod 1) \quad \text{и} \quad (\epsilon p'_1/q'_1 \bmod 1, \dots, \epsilon p'_{r'}/q'_{r'} \bmod 1)$$

получаются друг из друга в результате циклической перестановки и (или) обращения порядка.

**Доказательство.** Поскольку всякий гомеоморфизм  $\mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$  изотопен либо тождественному гомеоморфизму, либо симметрии относительно некоторой плоскости, достаточно заметить, что все члены последовательности  $(e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r)$  при симметрии зацепления относительно плоскости проекции умножаются на  $-1$ . •

## § 2. ДВУЛИСТНЫЕ НАКРЫВАЮЩИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}P^3$ С ВЕТВЛЕНИЕМ НАД ПРОЕКТИВНЫМ ЧЕТЫРЕХСПЛЕТЕНИЕМ

**2.1. Число двулистных разветвленных накрытий.** Напомним общую теорему о классификации двулистных разветвленных накрытий.

**Теорема.** Пусть  $X$  есть  $r$ -мерное многообразие,  $A \subset X$  - его подмногообразие коразмерности 2 с  $\partial A \subset \partial X$ . Двулистное накрытие  $Y \rightarrow X$  с ветвлением над  $A$  существует тогда и только тогда, когда  $\text{in}_*[A] = 0 \in H_{r-2}(X, \partial X; \mathbb{Z}_2)$ , где  $\text{in}_* : H_{r-2}(A, \partial A; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{r-2}(X, \partial X; \mathbb{Z}_2)$  - гомоморфизм включения. Такие

накрытия (рассматриваемые с точностью до эквивалентности) находятся во взаимно однозначном соответствии с классами  $w \in H_{r-1}(X, A \cup \partial X; \mathbb{Z}_2)$ , для которых  $\partial w = [A]$ , где  $\partial$  — композиция  $H_{r-1}(X, A \cup \partial X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{r-2}(A \cup \partial X, \partial X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{r-2}(A, \partial A; \mathbb{Z}_2)$  граничного гомоморфизма последовательности тройки  $(X, A \cup \partial X, \partial X)$  и изоморфизма вырезания. Накрытие, отвечающее классу  $w$ , однозначно характеризуется тем, что оно тривиально над дополнением цикла, реализующего  $w$ . Таким образом, накрывающее можно получить в результате склеивания двух копий многообразия  $X$ , разрезанного вдоль такого цикла.

Из этой теоремы следует, что для любого проективного четырехсплетения  $L \subset \mathbb{R}P^3$  (и вообще для любого зацепления в  $\mathbb{R}P^3$ ) существуют ровно два (с точностью до эквивалентности) двулистных накрытия  $\tilde{k}_i : N_i \rightarrow \mathbb{R}P^3$ ,  $i = 1, 2$ , с ветвлением над  $L$ .

**2.2. Представление накрывающего в виде результата приклеивания полнотория к бутылке Клейна.** Пусть  $t \subset D^3$  — рациональный тенгл,  $L \subset \mathbb{R}P^3$  — соответствующее проективное четырехсплетение. Общая теорема о двулистных разветвленных накрытиях показывает, что существует единственное двулистное накрытие  $B \rightarrow D^3$  шара  $D^3$  с ветвлением над  $t$ . Как известно, рациональный тенгл  $t$  можно получить из тенгла  $t_0 \subset D^3$  типа 0, изображенного на рис. 7, при помощи гомеоморфизма  $\tilde{\beta} : D^3 \rightarrow D^3$  с  $\tilde{\beta}(t_0) = t$ . Накрывающее пространство  $B_0$  двулистного накрытия  $B_0 \rightarrow D^3$  с ветвлением над  $t_0$  получается в результате склеивания двух копий шара  $D^3$ , из которого вырезаны два диска, ограниченные тенглом  $t_0$  и дугами большой окружности, соединяющими граничные точки  $p_1, p_2, p_3, p_4$  тенгла  $t_0$  (рис. 7). Поэтому  $B_0$  гомеоморфно полноторию  $D^2 \times S^1$ . Отображение  $\tilde{\psi} : B_0 \rightarrow B$ , накрывающее  $\tilde{\beta}$ , доставляет гомеоморфизм  $B \cong D^2 \times S^1$ .

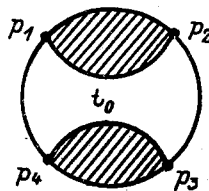


Рис. 7.

Пусть  $s$  — антиподальная инволюция сферы  $\partial D^3$ . Возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 B & \longrightarrow & N_i \\
 \downarrow & & \downarrow \tilde{k}_i \\
 t \subset D^3 & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathbb{R}P^3 \supset L
 \end{array}$$



Ясно, что многообразия  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ) получаются из  $B$  в результате факторизации его края  $T = \partial B$  по инволюциям, накрывающим  $c$ . Заметим, что таких инволюций две — они получаются друг из друга в результате композиции с нетождественным автоморфизмом накрытия  $\partial B \rightarrow \partial D^3$ . Как и инволюция  $c$ , накрывающие ее инволюции  $\tilde{c}_i$  ( $i = 1, 2$ ) действуют без неподвижных точек и обращают ориентацию. Значит, фактор-пространство  $X_i = T/\tilde{c}_i$  является замкнутым неориентируемым многообразием. Кроме того, в силу формулы Римана-Гурвица, эйлерова характеристика  $\chi(X_i) = \chi(\tilde{k}_i^{-1}(\tilde{\text{pr}}(\partial D^3))) = 0$ . Поэтому  $X_i$  гомеоморфно бутылке Клейна  $K_i$ . Итак, многообразие  $N_i$  получается в результате приклеивания полнотория  $B$  своим краем к бутылке Клейна  $K_i$ .

**2.3. Призматические многообразия  $Q(m, n)$ .** Пусть  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  - окружность,  $\sigma : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  - инволюция тора, задаваемая формулой  $\sigma(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, -z_2)$ , где  $(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1$ . Тогда факторпространство тора  $S^1 \times S^1$  по инволюции  $\sigma$  является бутылкой Клейна  $K$ . Пусть  $\pi : S^1 \times S^1 \rightarrow K$  - естественная проекция.

Пусть  $D^2 \times S^1$  - полноторий и  $\varphi : \partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  - некоторый геоморфизм. Обозначим через  $[\mu], [\lambda] \in H_1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$  гомологические классы меридиана  $\mu = S^1 \times i$  и параллели  $\lambda = i \times S^1$  тора  $S^1 \times S^1$  (здесь  $i = \sqrt{-1}$ ). Ясно, что  $\varphi_*[\mu] = m[\mu] + n[\lambda]$  для некоторых взаимно простых  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Числа  $m, n$  определяют отображение  $\varphi$  с точностью до изотопии и композиции (справа) с гомеоморфизмом, продолжающимся до гомеоморфизма полнотория, и, значит, определяют с точностью до гомеоморфизма многообразие  $Q(m, n) = D^2 \times S^1 \cup_{\pi \circ \varphi} K$ . В [7] показано, что результат приклеивания полнотория  $D^2 \times S^1$  к  $K$  зависит только от  $|m|, |n|$  и что многообразия  $Q(|m|, |n|)$ , соответствующие различным парам  $|m|, |n|$ , попарно гомотопически не эквивалентны.

**2.4. Геометрия накрытия  $\pi$ .** Представим тор  $S^1 \times S^1$  как объединение двух цилиндров:  $S^1 \times S^1 = C_+ \cup C_-$ , где

$$C_+ = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 \geq 0\}, \quad C_- = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 \leq 0\}.$$

Поскольку  $C_+ = C_+^+ \cup C_+^-$ , где

$$C_+^+ = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 \geq 0, \text{Re } z_2 \geq 0\},$$

$$C_+^- = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 \geq 0, \text{Re } z_2 \leq 0\}$$

и  $\sigma(C_+^+) = C_+^-$ , то  $\pi(C_+) = \pi(C_+^+)$  - лента Мёбиуса с краем  $\Delta = \pi(\{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 = 0\})$  (рис.8). Аналогично,  $\pi(C_-)$  - лента Мёбиуса с тем же краем  $\Delta$ . Поэтому бутылка Клейна  $K = \pi(C_+ \cup C_-)$  представляется как результат склеивания двух лент Мёбиуса  $\pi(C_+)$  и  $\pi(C_-)$  по их общему краю  $\Delta$ . Поскольку  $\{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 = 0\} = i \times S^1 \cup (-i) \times S^1$  и  $\sigma(i \times S^1) = (-i) \times S^1$ , то  $\Delta = \pi(i \times S^1)$ . Заметим, что край  $\Delta$  изотопен удвоенной средней линии ленты Мёбиуса, т.е. удвоенной параллели бутылки Клейна  $K$ . Меридиан бутылки Клейна есть

$$\pi(\{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_2 = 0\}) = \pi(S^1 \times i \cup S^1 \times (-i)) = \pi(S^1 \times i).$$

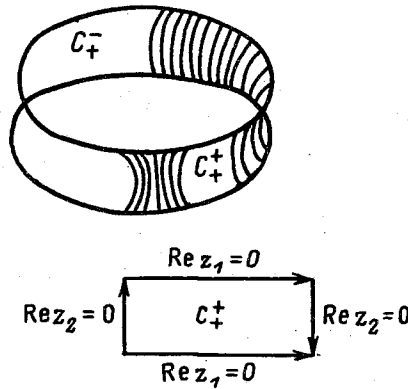


Рис. 8.

Итак, образом параллели  $i \times S^1$  тора  $S^1 \times S^1$  при накрытии  $\pi$  является удвоенная параллель бутылки Клейна  $K$ , а образом меридиана  $S^1 \times i$  — ее меридиан.

**2.5. Простые замкнутые кривые на бутылке Клейна. Рассмотрим сужение**

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\omega_i} & K_i \\
 s \downarrow & & \downarrow k_i \\
 S^2 & \xrightarrow{pr} & \mathbb{R}P^2
 \end{array}$$

встречавшейся выше в п.2.2 коммутативной диаграммы. На граничной сфере  $S^2 = \partial D^3$  выделены четыре точки:  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , являющиеся границей тенгла  $t \subset D^3$ . Обозначим через  $d_{12}, d_{23}, d_{34}, d_{14}$  дуги больших окружностей на сфере  $S^2$ , соединяющие точки  $p_1$  и  $p_2$ ,  $p_2$  и  $p_3$ ,  $p_3$  и  $p_4$ ,  $p_1$  и  $p_4$  соответственно (рис.9). Накрывающее пространство  $T$  двулистного накрытия  $s$  с ветвлением над  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  можно получить, согласно общей теореме о двулистных разветвленных накрытиях, при склеивании двух копий сферы  $S^2$ , разрезанной вдоль дуг  $d_{12}$  и  $d_{34}$ . Положим  $\xi = s^{-1}(d_{34}), \zeta = s^{-1}(d_{23})$ .

Отображение  $k_i$  является двулистным накрытием с ветвлением над точками  $q_1 = pr(p_1) [= pr(p_3)]$  и  $q_2 = pr(p_2) [= pr(p_4)]$ . Пусть  $I_1 = pr(d_{34}) [= pr(d_{12})]$  и  $I_2 = pr(d_{23}) [= pr(d_{14})]$  (рис.10). Тогда одно из накрывающих  $K_i$ , скажем,  $K_2$ , получается как результат склеивания двух копий плоскости  $\mathbb{R}P^2$ , разрезанной вдоль отрезка  $I_1$ , а другое накрывающее -  $K_1$  - как результат склеивания двух копий плоскости  $\mathbb{R}P^2$ , разрезанной вдоль отрезка  $I_2$ .

Ясно, что

$$\omega_i(\xi) = k_i^{-1}(pr(s(\xi))) = k_i^{-1}(I_1),$$

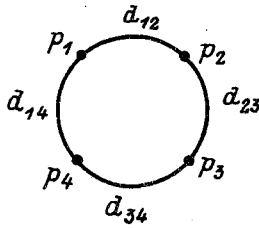


Рис. 9

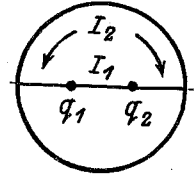


Рис. 10.

$$\omega_i(\zeta) = k_i^{-1}(\text{pr}(s(\zeta))) = k_i^{-1}(I_2).$$

Из двух возможных накрытий  $k_i$  рассмотрим то, накрывающее пространство которого является бутылкой Клейна  $K_1$ . Таким образом,  $K_1$  представляется как результат склеивания двух лент Мёбиуса вдоль их общего края  $k_1^{-1}(I_2)$ . При этом  $k_1^{-1}(I_1)$  получается из слоев лент Мёбиуса при расслоении этих лент над окружностью. Следовательно,  $\omega_1(\xi) = k_1^{-1}(I_1)$  является меридианом бутылки Клейна  $K_1$ , а  $\omega_1(\zeta) = k_1^{-1}(I_2)$  - ее удвоенной параллелью. Это позволяет установить гомеоморфизм накрытий  $\pi$  и  $\omega_1$

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \longrightarrow & T \\ \pi \downarrow & & \downarrow \omega_1 \\ K & \longrightarrow & K_1, \end{array}$$

при котором меридиан  $S^1 \times i$  и параллель  $i \times S^1$  тора  $S^1 \times S^1$  переходят соответственно в кривые  $\xi$  и  $\zeta$  на торе  $T$ .

**2.6. Приклеивающее отображение.** Пусть  $t_{p/q}$ - рациональный тенгл с  $p/q = i_r + 1/i_{r-1} + 1/i_{r-2} + \dots + 1/i_1$  (все числа  $i_k$  имеют одинаковые знаки и  $|i_1| \geq 2$ ). Если  $r$  четно, переразложим дробь  $p/q$  так, чтобы  $r$  стало нечетным. Для этого достаточно представить  $i_1$  в виде  $(i_1 - 1) + 1/1$ . Заметим, что такое разложение дроби  $p/q$  единственно и позволяет представить тенгл  $t_{p/q}$  диаграммой, изображенной на рис. 11, а. Тенглу  $t_{p/q}$  поставим в соответствие косу из четырех нитей  $\alpha_2^{i_1} \alpha_3^{-i_2} \alpha_2^{i_3} \dots \alpha_2^{i_r} \in B_4$  (рис. 11, б). Как уже отмечалось (п.2.2), тенгл  $t_{p/q} \subset D^3$  можно получить из стандартного тенгла  $t_0 \subset D^3$ , изображенного на рис. 7, при помощи некоторого гомеоморфизма  $\beta$  с  $\beta(\partial t_0) = \partial t_{p/q}$ . Гомеоморфизм  $\beta$  строится как композиция гомеоморфизмов  $\beta_3, \beta_2 : S^2 \rightarrow S^2 : \beta = \beta_3^{i_r} \dots \beta_3^{-i_2} \beta_2^{i_1}$ , где  $\beta_k$  ( $k = 1, 2$ ) - скручивание, отвечающее элементарной косе  $\sigma_k \in B_4$ . Гомеоморфизмы  $\beta_3, \beta_2$  можно выбрать так, чтобы их носители содержались в малых окрестностях дуг  $d_{34}$  и  $d_{23}$ . Поэтому можно считать, что носитель гомеоморфизма  $\beta$  содержится в некоторой окрестности дуги  $d_{34} \cup d_{23}$ . Обозначим через  $p_0$  какую-нибудь точку сферы  $S^2$ , не входящую в носитель гомеоморфизма  $\beta$  (так что  $\beta(p_0) = p_0$ ).

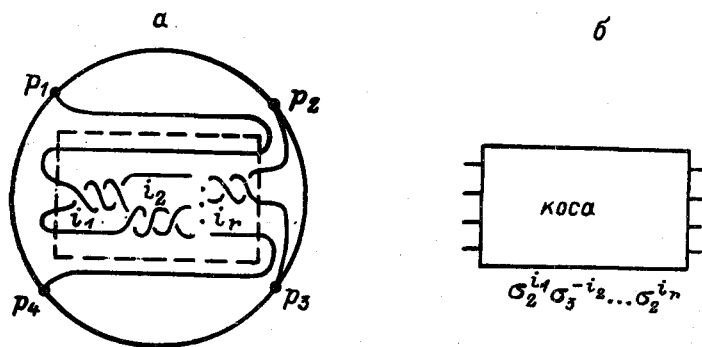


Рис. 11.

Пусть  $s : T \rightarrow S^2$  - двулистное накрытие с ветвлением над  $\partial t_0 = \partial t_{p/q}$ . Обозначим через  $\psi$  гомеоморфизм тора  $T$ , тождественный на  $s^{-1}(p_0)$  и накрывающий гомеоморфизм  $\beta$ :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\psi} & T \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ S^2 & \xrightarrow{\beta} & S^2 \end{array}$$

Пусть  $\text{Homeo}(T)$  - множество всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов тора  $T$ . Описанное здесь построение по косе из четырех нитей изотопического класса гомеоморфизмов тора дает гомоморфизм  $\gamma : B_4 \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(T))$ ; ср. [8, п.2.10]. Как известно,  $\pi_0(\text{Homeo}(T)) \cong SL(2; \mathbb{Z})$ , и этот изоморфизм доставляется индуцированным автоморфизмом группы  $H_1(T)$  и изоморфизмом  $H_1(T) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Выберем последний так, чтобы образами классов кривых  $\xi$  и  $\zeta$  на торе  $T$  были соответственно элементы  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Тогда на образующих  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  группы кос  $B_4$  гомоморфизм  $\gamma$  задается следующим образом:

$$\gamma(\sigma_1) = \gamma(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Гомеоморфизм  $\psi$ , отвечающий тенглу  $t_{p/q}$ , определяет автоморфизм гомологической группы  $H_1(T)$ , имеющий матрицу

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_r} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-i_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_1}.$$

Поскольку существует гомеоморфизм  $\tilde{\psi} : B_0 \rightarrow B$ , накрывающий  $\tilde{\beta}$  (см. п. 2.2) и продолжающий  $\psi : \partial B_0 = T \rightarrow T = \partial B$ , то накрывающее  $N_1 = B \cup_{\omega_1} K_1$  можно представить как  $B_0 \cup_{\omega_1 \psi} K_1$ . Кривая  $\xi = s^{-1}(d_{34}) \subset T$  является меридианом полнотория  $B_0$ , поскольку она ограничивает в  $B_0$  диск, являющийся прообразом при двулистном разветвленном накрытии  $B_0 \rightarrow D^3$  сегмента, ограниченного дугой  $d_{34}$  и тенглом  $t_0$  (рис. 7). Вычислим  $\Psi_*[\xi]$ :

$$\Psi_*[\xi] = \Psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = q[\xi] + p[\zeta].$$

Следовательно, многообразие  $N_1$  гомеоморфно  $Q(p, q)$ . Многообразие  $N_2$ , как нетрудно понять, гомеоморфно  $Q(p, q)$ .

**2.7. Доказательство теоремы 1.** Известно, что любой гомеоморфизм пространства  $\mathbb{R}P^3$  изотопен либо тождественному гомеоморфизму, либо симметрии относительно некоторой плоскости. Поэтому любые два гомеоморфных, но не изотопных зацепления зеркальны.

Пусть  $L_1$  - проективное четырехсплетение  $p/q$  и  $L_2$  - его зеркальный образ. (Как было замечено выше, в доказательстве теоремы 2,  $L_2$  отвечает дроби  $-p/q$  или  $q/p$ ). Если зацепления  $L_1$  и  $L_2$  изотопны, то существует обращающий ориентацию гомеоморфизм  $Q(p, q) \rightarrow Q(p, q)$ . Легко показать, что многообразие  $Q(p, q)$  является расслоением Зайферта над  $\mathbb{R}P^2$  с одним особым слоем. Про такие многообразия известно [9], что они допускают обращающий ориентацию гомеоморфизм только, если  $p = 1$  и  $q = 0$ . Зацепление, полученное из тенгла  $\infty = 1/0$ , является аффинной незаузленной окружностью. Таким образом, проективное четырехсплетение, рассматриваемое с точностью до изотопии, определяет пару дробей  $(p/q, -q/p)$ .

**ДОБАВЛЕНИЕ: СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ ДИАГРАММ ЗАЦЕПЛЕНИЙ В  $\mathbb{R}P^3$**

Имеется ряд специальных типов зацеплений в сфере: замкнутые косы,  $2n$ -сплетения, зацепления с  $n$  мостами. Известно, что любое зацепление представимо замкнутой косой (теорема Александра), замкнутая коса с  $n$  нитями есть  $2n$ -сплетение, любое  $2n$ -сплетение изотопно зацеплению с  $n$  мостами и, наоборот, любое зацепление с  $n$  мостами изотопно  $2n$ -сплетению.

Для зацеплений в проективном пространстве можно выделить аналогичные специальные типы зацеплений — замкнутые косы,  $2n$ -сплетения, с  $n$  мостами. Общий вид замкнутой косы и  $2n$ -сплетения показан на рис. 12, а и 12, б; пример зацепления с  $n$  мостами — на рис. 12, в ( $n = 2$ ).

Такой перенос терминологии со случая зацеплений в сфере на случай зацеплений в  $\mathbb{R}P^3$  объясняется тем, что прообраз зацепления со специальной диаграммой при накрытии  $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$  может быть задан диаграммой соответствующего типа. Нетрудно видеть, что между специальными типами зацеплений в  $\mathbb{R}P^3$  имеются связи, аналогичные перечисленным выше связям между специальными типами зацеплений в  $S^3$ .

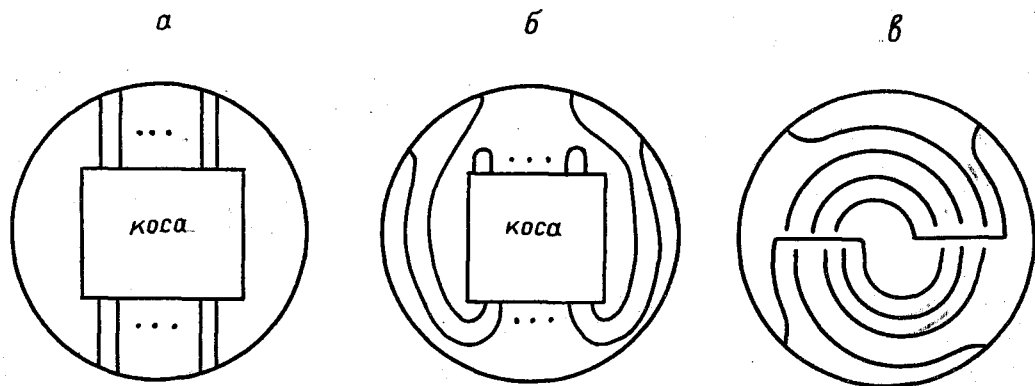


Рис. 12.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Reidemeister K., *Knotentheorie*, Berlin, 1932.
- [2] Дроботухина Ю.В., Аналог многочлена Джоунса для зацеплений в  $\mathbb{R}P^3$  и обобщение теоремы Кауффмана-Мурасуги, *Алгебра и анализ* 2, вып. 3 (1990), 171–192.
- [3] Conway J. H., *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational problems of abstract algebra, 1969, pp. 329–358.
- [4] Rubinstein J. K., *On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles*, *Trans.AMS.* 251 (1979), 129–137.
- [5] Asano K., *Homeomorphisms of prism manifolds*, *Yokohama Math. J.* 26 (1978), 19–29.
- [6] Bonahon F., *Involutions et fibré de Seifert dans les variétés de dimension 3*, Thèse de 3e cycle, Orsay, 1979.
- [7] Иванов Н. В., *Гомотопии пространств диффеоморфизмов некоторых трехмерных многообразий*, *Зап. науч. семинаров ЛОМИ* 122 (1982), 72–103.
- [8] Виро О. Я., *Зацепления, двулистные разветвленные накрытия и косы*, *Мат. сб.* 87(129) (1972), 216–228.
- [9] Neumann W. D., Raymond F., *Seifert manifolds, plumbing,  $\mu$ -invariant and orientation reversing maps*, *Lect. Notes in Math.* 664 (1978), 163–196.

Ленинградское отделение  
 Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР,  
 191011, Ленинград, наб. р. Фонтанки, 27

Поступило 25 июня 1990 г.