G. D. Reznikov, A. S. Zhikhar, Analytics-numerical modelling of deep-bed filtration,
Mat. Model., 1995, Volume 7, Number 6, 118–125

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **7** номер **6** год **1995**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 517.968.7:628.1/3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ В ФИЛЬТРУЮЩЕМ СЛОЕ

© *Г.Д.Резников, А.С.Жихарь*

Украинский проектный и научно-исследовательский институт коммунальных сооружений городов

Предлагается численно-аналитический подход к моделированию переноса частиц в фильтрующем слое. Коэффициент поглощения частиц находится методом статистических испытаний для тонких слоев, а затем подставляется в аналитическое решение кинетического уравнения. Это позволяет уменьшить необходимые ресурсы и трудоемкость нахождения потока частиц на практически важных масштабах длины и времени.

ANALYTICS-NUMERICAL MODELLING OF DEEP-BED FILTRATION

G.D.Reznikov, A.S.Zhikhar

Ukrainian design and research institute of municipal structures

Analytics-numerical approach to study of particles transfer into filter media is proposed. By the Monte Carlo method in thin layers the capture coefficient is founded. Then the kinetic equation solution is obtained. Such approach makes it easy to calculate particles transfer for practice length and time scales.

Введение. В работе [1] методом статистических испытаний был исследован перенос частиц в фильтрующем слое. В рамках принятых предположений достигнута удовлетворительная точность расчетов и изучены основные закономерности процесса [2]. Однако большая трудоемкость рассмотренного метода затрудняет его применение на масштабах длины и времени, характерных для процессов очистки питьевой воды [3]. В данной работе предлагается численно-аналитический подход, позволяющий преодолеть это затруднение.

Математическое описание процесса. Рассмотрим кратко процесс фильтрования. Блуждая в системе устьев, взвешенная частица попадает из одного устья в другое. Там она или захватывается (поглощается), или рассеивается – сносится потоком, т.е. устья выступают эффективными центрами взаимодействия фильтрующего слоя и частиц [4]. Представив путь частицы от одного устья к другому прямолинейным и для простоты считая значение скорости постоянным и не изменяющимся от устья к устью, можно попытаться описать процесс фильтрования на языке теории переноса [5]. Основным уравнением теории переноса является кинетическое уравнение, связывающее дифференциальную плотность потока частиц с распределением источников и макроскопическими сечениями взаимодействия частиц со средой:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + \mathbf{\Omega}\nabla\Phi + \Sigma\Phi = \int \Sigma_s(\mathbf{\Omega}' \to \Omega)\Phi(\Omega')d\Omega' + S\,,$$

где $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \tau = vN(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \tau)$, плотность потока частиц; $N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \tau)$ – плотность числа частиц в фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ в момент времени τ; v – модуль скорости частиц; $\mathbf{r}$ – вектор направления скорости частицы; Σ – полное сечение взаимодействия; S – интенсивность источника частиц; Σ_s – дифференциальное по углам сечение рассеяния.

Функция $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \tau)$ определена так, что $NdVd\mathbf{\Omega}$ дает среднее число частиц в элементе объема dV вблизи точки $\mathbf{r}$, имеющих направление скорости в элементе $d\mathbf{\Omega}$ вблизи $\mathbf{\Omega}$.

Для применимости кинетического уравнения к описанию процессов переноса необходимо выполнение следующих условий:

а) должен существовать физически бесконечно малый масштаб Δx такой, что

$$d \ll \Delta x \ll L\,,$$

где d – диаметр частиц; L – характерный макроскопический масштаб (в нашей задаче это, например, высота слоя).

б) должен существовать интервал времени $\Delta\tau$ такой, что

$$t \ll \Delta\tau \ll T\,,$$

где t время прохождения частицей расстояния порядка Δx; T – характерное макроскопическое время.

Кроме того, предполагается, что в физически бесконечно малом объеме с линейными размерами Δx скачкообразное изменение скорости происходит не более одного раза, т.е. $\Delta x < l_{своб}$.

Если принять описанную выше модель фильтрования, то оказывается, что при $l_{своб} \sim$ порядка расстояния между устьями функция распределения не может быть хорошо определена. Для масштаба $\Delta x < l_{своб}$ слой выглядит неоднородным, и число частиц в физически бесконечно малом элементе объема сильно зависит как от формы, так и от малых перемещений этого элемента в слое, т.е. не является макроскопической величиной.

Другая возможность заключается в представлении траектории частицы гладкой линией. В этом случае можно записать следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial N}{\partial\tau} + \mathbf{v}\nabla N + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r},\tau)}{m}\frac{\partial N}{\partial\mathbf{v}} + v\Sigma N = S\,, \tag{1}$$

где $N = \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau)/v$ – плотность числа частиц в фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в момент времени τ ; $\mathbf{v} = v\mathbf{\Omega}$ – вектор скорости; $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \tau)$ – сила, действующая на частицу; m – масса частицы; Σ – сечение поглощения.

В уравнении (1) нет члена, описывающего изменение числа частиц в элементе объема dV за счет процессов рассеяния в этом объеме, так как по предположению изменение скорости частиц происходит непрерывным образом. Это плавное изменение скорости частиц под действием потока жидкости мы формально описываем, вводя силу $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \tau)$, действующую на частицы, а изменение числа частиц в элементе объема dV, имеющих скорости в интервале $d\mathbf{v}$ вблизи $\mathbf{v}$ – соответствующим членом в уравнении (1). Другими словами, траектория частицы обусловлена полем скоростей жидкости, т.е. движение частицы происходит таким образом, будто на нее действует некоторая фиктивная сила $\mathbf{F}$.

Учитывая наличие выделенного направления - направления фильтрации (пусть это будет ось $0x$), - а также однородность слоя, для области, не испытывающей влияния границ, перепишем (1) в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{v}} + v \Sigma N = S\,. \tag{2}$$

Проинтегрируем это уравнение по скорости. Член, пропорциональный $\mathbf{F}$, исчезает после интегрирования. В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + v_\phi \frac{\partial n}{\partial x} + \alpha n = S\,, \tag{3}$$

где $n(x, \tau)$ – плотность числа частиц в слое на глубине x в момент времени τ;

$$v_\phi \equiv \int v_x N d\mathbf{v} \Big/ \int N d\mathbf{v}\,, \qquad \alpha \equiv \Sigma \int v N d\mathbf{v} \Big/ \int N d\mathbf{v}\,.$$

Здесь v_ϕ представляет собой среднюю x-компоненту скорости частиц на глубине x в момент τ, которую будем отождествлять со скоростью фильтрации; α дает долю захватываемых частиц в элементарном объеме на этой глубине в течение единичного интервала времени, т.е. характеризует поглощающие свойства слоя.

Уравнение (3) справедливо на масштабах, больших по сравнению с масштабом неоднородности среды (порядка среднего диаметра зерна слоя), и описывает изменение потока взвешенных частиц по глубине слоя со временем. При этом учитываем, что $\alpha = \alpha(n, x, \tau)$ [1]. Кроме того, Σ может зависеть от скорости частиц непосредственно, как, например, сечение поглощения нейтрона от его скорости (энергии) [6]. В последнем случае, по аналогии с нейтронами, справедливо многогрупповое приближение, т.е. уравнение (3) применимо внутри некоторого диапазона скоростей.

До сих пор рассматривался случай монодисперсной взвеси. Чтобы описать полидисперсный поток, имеющий некоторое распределение частиц по размерам, необходимо ввести набор функций $n^{(d)}(x, \tau)$, где d пробегает значения из некоторой совокупности диаметров $d \in \{d_1, \ldots, d_k\}$. Тогда вместо уравнения (2) получим систему

$$\frac{\partial n^{(d)}}{\partial \tau} + v_\phi \frac{\partial n^{(d)}}{\partial x} + \alpha^{(d)} n^{(d)} = S^{(d)}\,,$$

где $d \in \{d_1, \ldots, d_k\}$ для потока, имеющего k компонент. Функции $\alpha^{(d)}$ для каждого d зависят от значений всех компонент потока на данной глубине. Однако принципиального отличия от случая монодисперсного потока здесь нет. Поэтому рассмотрим задачу, когда взвесь монодисперсна, т.е. содержит частицы только одного определенного диаметра d.

Продвинуться дальше можно двумя путями. Можно ввести еще одну переменную - плотность захваченных частиц в данной точке слоя в данный момент времени - и считать, что интенсивность внутреннего источника S пропорциональна этой величине. Тогда, полагая $\partial n/\partial\tau = 0$, $\alpha = \text{const}$ и добавив к уравнению (2) еще одно уравнение баланса, получим систему уравнений, решение которой описано в [7].

Другая возможность состоит в том, чтобы решать уравнение (3). В тех случаях, когда α не зависит от значений потока или когда эта зависимость слабая, можно выписать общее решение, считая α, S заданными функциями x, τ. Оно имеет следующий вид:

$$n(x,\tau) = \left\{ n_0 + \int \frac{dx'}{v_\phi} S\left(x', \tau_0 + \frac{x'}{v_\phi}\right) \exp\left[\int_0^{x'} \frac{dx''}{v_\phi}\alpha\left(x'', \tau_0 + \frac{x''}{v_\phi}\right)\right]\right\} \times$$
$$\times \exp\left[-\int_0^{x} \frac{dx'}{v_\phi}\alpha\left(x', \tau_0 + \frac{x'}{v_\phi}\right)\right],$$

где n_0 – плотность на входе фильтра (при $x = 0$); $\tau_0 = \tau - x/v_\phi$.

Рассмотрим теперь случай, когда процессами отрыва ранее захваченных частиц можно пренебречь. Такое рассмотрение оправдывается тем, что, во-первых, затруднительно экспериментально отличить незахваченные частицы от оторвавшихся, а во-вторых, интенсивность источника S мала на всех стадиях рационально организованного (эффективного) процесса: на начальной стадии преобладает захват, т.е. $\alpha n \gg S$, а в конце, когда емкость пор при данном x исчерпана, интенсивности захвата и отрыва одного порядка и малы. Таким образом, опустим член в правой части уравнения (3), и оно станет аналогичным приведенному в работе [8]. Решение этого уравнения имеет вид

$$n(x,\tau) = n_0 \exp\left[-\int \frac{dx'}{v_\phi}\alpha\left(x', \tau - \frac{x - x'}{v_\phi}\right)\right]. \qquad (4)$$

Вычислительный эксперимент. Чтобы получить представление о характере изменения α, воспользуемся вычислительным экспериментом, описанным ранее [1]. Процесс фильтрования численно исследуем в сравнительно тонком слое, а затем полученный результат распространим на толщины, с которыми встречаются в практике. Кратко расчетная схема и алгоритм имитационного моделирования заключаются в следующем.

Объем фильтрующего слоя представляется регулярной решеткой, в узлах которой находятся устья. Вводится дискретное время

$$\tau_i = i\Delta\tau,$$

где $\Delta\tau = l/v_\phi$, $l = \lambda^{-1/3}$ – характерный размер решетки (период), λ – число устьев в единице объема.

В каждый момент времени $\tau_i\,(i = 0, 1, 2, \ldots)$:

- незахваченные (активные) частицы в решетке совершают по ее ребрам один пробег длиной l ;
- на одну из граней решетки (x=0) действует импульсный, коллимированный, распределенный источник частиц;
- оцениваются различные параметры процесса, в том числе на противоположной грани – коллимированный поток частиц $\Phi(x,\tau)$.

На остальных гранях выполняются граничные условия периодичности. Скорость пробега постоянна и равна средней скорости фильтрования. Вид взаимодействия в узле (поглощение или рассеяние) определяется так же, как в работе [1]. Рассеяние против макроскопического градиента давления в направлении **x** считается невозможным, остальные направления равновероятны.

По определению, для первого физически бесконечно тонкого (элементарного) слоя, включающего несколько слоев решетки,

$$\alpha_0(\tau_i) = (1 - \Phi(x_1,\tau_i)/\Phi(0,\tau_i))v_\phi/\Delta x\,,$$

где $\Delta x = x_1$. В безразмерном виде

$$\alpha_0^*(\tau_i) = \alpha_0(\tau_i)\Delta x/v_\phi\,.$$

В качестве примера на рис.1 показана характерная зависимость $\alpha_0^*(\tau_i)$, получаемая в экспериментах серии "С" [2].

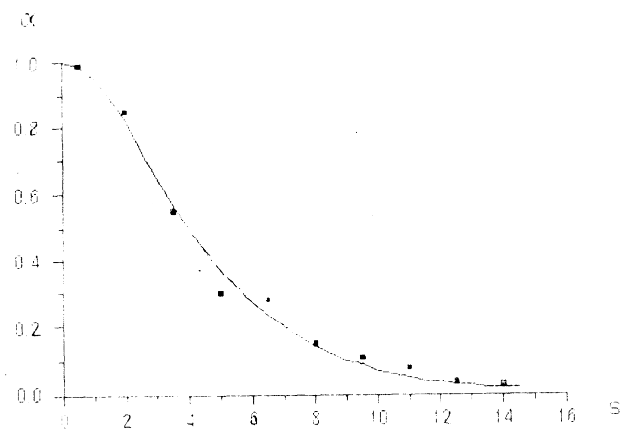

Рис.1. Зависимость коэффициента поглощения от времени в вычислительном эксперименте С1.2 [2]. $s^* \equiv (i-200)(\mathrm{mod})$. Аппроксимация уравнением $\alpha_0^* = 1/\mathrm{ch}\,cs^*$ по методу наименьших квадратов. $c = 0,33$.

Рассматривая более глубокие элементарные слои, получаем аналогичные зависимости для различных значений x_j. Получаемая таким образом совокупность функций $\{\alpha_j^*(\tau)\}$ инвариантна относительно преобразования сдвига по времени. Другими словами, справедливо соотношение

$$\alpha_j^*(\tau) = \alpha_0^*(\tau - x_j/v^*), \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5}$$

где в силу того, что $\alpha_0^*(\tau)$ определена для $\tau \geq 0$, $\alpha_j^*(\tau)$ выражается для значений $\tau > x_j/N$. Здесь появляется новый характерный параметр задачи v^* – скорость перемещения данного значения α в глубину. Так как α характеризует поглощательную способность фильтра и максимальное значение соответствует наиболее интенсивному поглощению частиц взвеси на данной глубине в данный момент времени, то v^*, фактически, равна непосредственно определяемой скорости перемещения концентрационного фронта [2].

Результаты. Доопределяя (исключительно ради удобства вычислений) $\alpha_j^*(\tau)$ на интервале $0 \leq \tau \leq x_j/N$ для $j > 1$ и данной серии экспериментов и считая x непрерывной переменной, получаем

$$\alpha(x,\tau) = \alpha^*(x,\tau)v_ф/\Delta x\,,$$

$$\alpha^*(x,\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq x/v^*\,, \\ \alpha_0^*(\tau - x/v^*), & x/v^* < \tau\,. \end{cases} \tag{6}$$

После подстановки соотношений (6) в решение (4) оно приобретает вид

$$n(x,\tau) = n_0 \exp\left\{-A\int\limits_{B_1(x,\tau)}^{B_2(x,\tau)} ds^*[\theta(-s^*) + f(s^*)\theta(s^*)]\right\},$$

где

$$A = 200\Delta\tau/\Delta x(1/v^* - 1/v_ф)\,;$$

$$B_1(x,\tau) = (\tau - x/v^*)/200\Delta\tau - 1;$$

$$B_2(x,\tau) = (\tau - x/v_ф)/200\Delta\tau;$$

$$\theta(S^*) = \begin{cases} 1\,, & S^* \geq 0\,, \\ 0\,, & S^* < 0\,; \end{cases}$$

$$f(S^*) = 1/\operatorname{ch} cS^*$$

или

$$n(x,\tau)/n_0 = \exp(-AD(x,\tau))\,, \tag{7}$$

где

$$D(x,\tau) = \begin{cases} B_2 - B_1\,, & B_2, B_1 \leq 0\,, \\ 2/c(\operatorname{arctg}\exp(cB_2) - \pi/4) - B_1\,, & B_2 > 0, \quad B_1 \leq 0\,, \\ 2/c(\operatorname{arctg}\exp(cB_2) - \operatorname{arctg}\exp(cB_1))\,, & B_1, B_2 > 0\,. \end{cases}$$

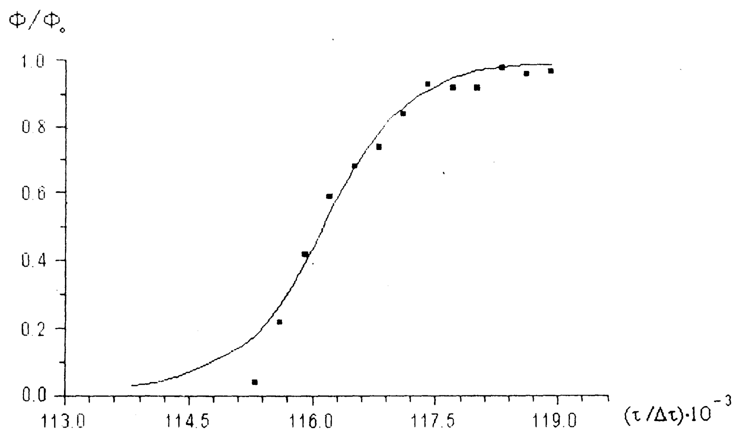

Рис.2. Зависимость потока частиц от времени: $x = 700\,l$, $\Delta x = 5\,l$; точки – эксперимент, линия – расчет по уравнению (7).

Пример результата расчета по формуле (7) приведен на рис.2. Особенность рассмотренных экспериментов такова, что зависимость α от потока действительно слабая. Соотношение диаметра частиц и диаметра устьев оптимально: заклинивание устьев и захват частиц (до исчерпания емкости) имеет место при любом потоке частиц. Очевидно, так будет всегда, если процесс фильтрования рационально (эффективно) организован, во всяком случае при фильтровании монодисперсных взвесей.

Заключение. Предложенный подход, согласно которому коэффициент поглощения частиц находится в тонких слоях методом статистических испытаний, а затем используется для аналитического решения кинетического уравнения (3), можно использовать для расчета фильтров на масштабах длины и времени, характерных для практики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Г.Д. Резников.* Моделирование переноса частиц в фильтрующем слое // Математическое моделирование (в печати).
2. *Г.Д. Резников.* Исследование глубинного фильтрования методом вычислительного эксперимента // Инженерно-физический журнал, 1994.
3. *Г.И. Николадзе.* Технология очистки природных вод. – М.: Высшая школа, 1987, 479 с.
4. *Г.Д. Резников.* Распределение по размерам устьев пор в монодисперсной зернистой среде // Инженерно-физический журнал, 1989, т.56, N 5, с.840.

5. *Ю.И. Ершов, С.Б. Шихов.* Математические основы теории переноса. Т.1. – М.: Энергоатомиздат, 1985, 231 с.

6. *Г. Гольдштейн.* Основы защиты реакторов. – М.: Госатомиздат, 1961, 344 с.

7. *Д.М. Минц.* Теоретические основы технологии очистки воды. – М.: Стройиздат, 1964.

8. *А.А. Громогласов, А.С. Копылов, А.П. Пильщиков.* Водоподготовка: процессы и аппараты. – М.: Энергоатомиздат, 1990, 272 с.

Поступила в редакцию
29.06.93.