



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. B. Shapiro, Extension operators for functions  
and normal functors,  
*Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1992,  
Number 1, 35–42

<https://www.mathnet.ru/eng/vmumm2468>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that  
you have read and agreed to these terms of use  
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

April 21, 2025, 14:54:35



Отметим еще следующую известную оценку для чисел Бернулли:

$$|B_{2k}| \leq \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \frac{1}{1-2^{1-2k}} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (37)$$

Из (23), (24), (36) и (37) получаем для  $1 \leq n \leq aN^{1/2}$

$$\int_{-1}^1 \kappa(t) v_n^2(t) dt \leq c_{15}(\alpha, \beta) \frac{n}{N} + c_{16}(\alpha, \beta, a) \frac{n^3}{N^2}.$$

Тем самым для  $\sigma_n(t) = v_n(t)$  справедлива оценка (13) с константой  $A^2 = c_{15}(\alpha, \beta) n/N + c_{16}(\alpha, \beta, a) n^3/N^2$ , поэтому утверждение теоремы вытекает из оценки (14).

Автор искренне признателен Б. С. Кашину за обсуждение результатов и помощь в работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышев П. Л. Полн. собр. соч. в 5 т. М., 1947—1951. Т. 3. 66—87.
2. Karlin S., McGregor J. L. The Hahn polynomials, formulas and an application // *Scr. math.* 1961. 26. 33—46.
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М., 1962.
4. Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства и весовые оценки многочленов Хана // *Изв. вузов. Математика.* 1985. № 5. 78—80.
5. Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства ортогональных многочленов Хана дискретной переменной // *Матем. сб.* 1989. 180, № 9. 1259—1277.
6. Шарапудинов И. И. An asymptotic formulas having no remainder term for the orthogonal Hahn polynomials of discrete variable // *Mathematica Balkanica. New Series.* 1988. 2, N 4. 314—318.
7. Wilson M. W. On the Hahn polynomials // *SIAM J. Math. Anal.* 1970. 42, N 1. 131—139.
8. Минко А. А., Петунин Ю. И. Сходимость метода наименьших квадратов в равномерной метрике // *Сиб. матем. журн.* 1990. 31, № 2. 111—122.

Поступила в редакцию  
31.10.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. I, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1992. № 1

УДК 515.12

Л. Б. Шапиро

#### ОБ ОПЕРАТОРАХ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И НОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРАХ

В категории нормальных функторов  $NF$ , введенной Е. В. Щепиным [1], наиболее изученными являются функторы гиперпространства  $\text{exr}$  и вероятностных мер  $P$ . Первый из указанных функторов имеет чисто категорную характеристику [2], а второй определяется как множество линейных, положительных, регулярных функционалов на пространстве непрерывных функций, наделенное слабой\* топологией [3]. В настоящей статье, с одной стороны, предлагается описание функтора  $\text{exr}$  как множества надлежащим образом выбранного семейства функционалов в слабой\* топологии (теорема 2), а с другой — дается чисто категорная характеристика функтора  $P$  (теорема 4).

Введем необходимые понятия. Все пространства предполагаются бикompактными и хаусдорфовыми. Через  $C_+(X)$  обозначается пространство неотрицательных на  $X$  непрерывных функций с естественными

метрикой, порядком, линейной и мультипликативной структурами. Для числа  $\alpha$  через  $\alpha_X$  обозначаем функцию, тождественно равную  $\alpha$  на пространстве  $X$ .

Определение 1. Отображение  $u: C_+(X) \rightarrow C_+(Y)$  называется: 1) аддитивным; 2) полуаддитивным; 3) мультипликативным; 4) полумультипликативным; 5) монотонным; 6) ортогональным; 7) однородным; 8) слабо аддитивным; 9) слабо регулярным, если для любых  $f, g \in C_+(X)$  и  $\alpha \in R_+$  соответственно выполнены условия: 1)  $u(f+g) = u(f) + u(g)$ ; 2)  $u(f+g) \leq u(f) + u(g)$ ; 3)  $u(fg) = u(f)u(g)$ ; 4)  $u(fg) \leq u(f)u(g)$ ; 5) из  $f \leq g$  следует  $u(f) \leq u(g)$ ; 6) из условий  $\min\{f, g\} = 0_X$  и  $\max\{f, g\} = 1_X$  следует  $\min\{u(f), u(g)\} = 0_Y$  и  $\max\{u(f), u(g)\} = 1_Y$ ; 7)  $u(\alpha f) = \alpha u(f)$ ; 8)  $u(f + \alpha_X) = u(f) + \alpha_Y$ ; 9)  $u(\alpha_X) = \alpha_Y$ . Если  $Y$  — одноточечное пространство, то  $C_+(Y) = R_+$  и отображение  $u: C_+(X) \rightarrow R_+$  будем называть функционалом.

Определение 2. Если  $X$  — замкнутое подпространство  $Y$ , то оператором продолжения функций (экстендером) называется отображение  $u: C_+(X) \rightarrow C_+(Y)$ , такое, что  $u(f) \upharpoonright X \equiv f$ .

Как показал Р. Хэйдон [4], существование одновременно аддитивного, однородного и слабо регулярного экстендера для любого вложения пространства  $X$  равносильно тому, что  $X \in AE(0)$ , т. е.  $X$  является абсолютным экстензором в размерности 0 (определение классов пространств  $AE(n)$  см. в [1]). Г. М. Непомнящий [5] и В. В. Федорчук [6] показали, что класс пространств  $AE(1)$  совпадает с классом многозначных абсолютных ретрактов  $MAR$ .

Определение 3.  $X \in MAR$  тогда и только тогда, когда для любого вложения  $X \hookrightarrow Y$  существует многозначная ретракция, т. е. непрерывное отображение  $r: Y \rightarrow \text{exp } X$ , такое, что  $r \upharpoonright X \equiv id_X$ .

Теорема 1. Замкнутое подмножество  $X$  пространства  $Y$  является его многозначным ретрактом тогда и только тогда, когда существует полуаддитивный, полумультипликативный, монотонный, однородный, слабо регулярный экстендер  $u: C_+(X) \rightarrow C_+(Y)$ .

Из теоремы 1 сразу получаем еще одну характеристику класса  $MAR$ .

Следствие.  $X \in MAR$  тогда и только тогда, когда для любого вложения  $X \hookrightarrow Y$  существует полуаддитивный, полумультипликативный, монотонный, однородный, слабо регулярный экстендер.

Доказательство теоремы 1. Пусть  $X$  — многозначный ретракт  $Y$ . Заметим, что естественный экстендер  $v: C_+(X) \rightarrow C_+(\text{exp } X)$ , определяемый соотношением  $v(f) = \max_{x \in F} f(x)$ , где  $f \in C_+(X)$  и  $F \in \text{exp } X$ ,

является полуаддитивным, полумультипликативным, монотонным, однородным, слабо регулярным, слабо аддитивным. Рассмотрим многозначную ретракцию  $r: Y \rightarrow \text{exp } Y$  и определим экстендер  $u: C_+(X) \rightarrow C_+(Y)$  так:  $u(f) = v(f) \circ r$ . Очевидно, что  $u$  — искомый.

Пусть теперь  $u: C_+(X) \rightarrow C_+(Y)$  — полуаддитивный, полумультипликативный, монотонный, однородный, слабо регулярный экстендер. Построим многозначную ретракцию  $r: Y \rightarrow \text{exp } X$ . Для функционала  $\varphi: C_+(X) \rightarrow R_+$  естественно определяется его носитель  $\text{supp } \varphi = X \cup \{U \mid U \text{ открыто в } X \text{ и для любого } f \in C_+(X), \text{ такого, что } \text{supp } f \subset U, \text{ справедливо } \varphi(f) = 0\}$ . Легко видеть, что носитель нетривиального полуаддитивного функционала непуст. Каждой точке  $y \in Y$  соответствует функционал  $\varphi_y: C_+(X) \rightarrow R_+$ , определенный соотношением  $\varphi_y(f) = u(f)(y)$ . Тогда искомому многозначную ретракцию определяем так:  $r(y) = \text{supp } \varphi_y$ . Ясно, что  $r(x) = x$  для любой точки  $x \in X$ . Доказательству непрерывности  $r$  предположим два предложения.

Предложение 1. Пусть  $\varphi: C_+(X) \rightarrow R_+$  — полуаддитивный, полумультпликативный, монотонный, слабо регулярный функционал. Тогда  $\varphi(f) \leq \max_{x \in \text{supp } f} f(x)$  для любого  $f \in C_+(X)$ .

Доказательство предложения 1. Пусть  $\alpha = \max_{x \in \text{supp } \varphi} f(x)$  и  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Покажем, что  $\varphi(f) < \alpha + \varepsilon$ . Возьмем  $U_0 = \{x | f(x) < \alpha + \varepsilon\}$  — окрестность  $\text{supp } \varphi$ . Выделим конечное покрытие  $X$ , состоящее из множеств  $U_0, U_1, \dots, U_n$ , где  $U_i$  — открытое множество, для которого функционал  $\varphi$  обращается в нуль на каждой функции с носителем, содержащимся в  $U_i$ , для любого  $i \in \overline{1, n}$ . Возьмем  $\{g_i | i \in \overline{0, n}\}$  — разбиение единицы, подчиненное покрытию  $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$ . Тогда  $f = \sum_{i=0}^n f g_i$ . В силу перечисленных свойств  $\varphi$  получаем, что

$$\varphi(f) \leq \sum_{i=0}^n \varphi(f g_i) \leq \varphi(f g_0) + \sum_{i=1}^n \varphi(f) \varphi(g_i) = \varphi(f g_0),$$

так как  $\varphi(g_i) = 0$  при  $i \in \overline{1, n}$ . Но  $g_0 \leq 1$  и  $\text{supp } g_0 \subset U_0$ , следовательно,  $\|f g_0\| < \alpha + \varepsilon$  и  $\varphi(f g_0) < \alpha + \varepsilon$ , т. е.  $\varphi(f) < \alpha + \varepsilon$ .

Предложение 2. Пусть  $\varphi: C_+(X) \rightarrow R_+$  — полуаддитивный, полумультпликативный, монотонный, однородный нетривиальный функционал;  $U$  — открытое в  $X$  множество, такое, что  $U \cap \text{supp } \varphi \neq \emptyset$ . Тогда  $\varphi(f) \geq \inf_{x \in U} f(x)$  для любого  $f \in C_+(X)$ .

Доказательство предложения 2. Так как  $U \cap \text{supp } \varphi \neq \emptyset$ , то существует такая функция  $g \in C_+(X)$ , что  $\text{supp } g \subset U$  и  $\varphi(g) \neq 0$ . Пусть  $\alpha = \inf_{x \in U} f(x)$ . Тогда  $\alpha g \leq f g$ ,  $\alpha \varphi(g) = \varphi(\alpha g) \leq \varphi(f g) \leq \varphi(f) \varphi(g)$  и  $\alpha \leq \varphi(f)$ , поскольку  $\varphi(g) \neq 0$ .

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 1. Докажем, что отображение  $r: Y \rightarrow \text{exp } X$  полунепрерывно снизу. Фиксируем точку  $y_0 \in Y$ , открытое множество  $U \subset X$ , такое, что  $r(y_0) \cap U \neq \emptyset$ , и точку  $x_0 \in r(y_0) \cap U$ . Возьмем функцию  $f \in C_+(X)$ , такую, что  $f(X \setminus U) = 0$  и  $f(x_0) = 1$ . Так как у точки  $x_0$  существует окрестность, значения функции  $f$  в каждой точке которой больше  $\frac{1}{2}$ , то согласно предложению 2 получаем  $\varphi_{y_0}(f) > \frac{1}{2}$ . Рассмотрим открытое в  $Y$  множество  $V = \left\{ y | \inf_{x \in \text{supp } \varphi_y} f(x) > \frac{1}{2} \right\}$ . В силу сказанного  $y_0 \in V$ . Если  $y \in V$ , то  $\inf_{x \in \text{supp } \varphi_y} f(x) > \frac{1}{2}$ , следовательно, из предложения 1 вытекает неравенство  $\varphi_y(f) > \frac{1}{2}$ , т. е.  $U \cap \text{supp } \varphi_y \neq \emptyset$ .

Покажем, что  $r$  полунепрерывно сверху. Пусть  $U$  — окрестность множества  $r(y_0)$ . Возьмем функцию  $f \in C_+(X)$ , такую, что  $f(r(y_0)) = 0$  и  $f(X \setminus U) = 1$ . Рассмотрим открытое множество  $V = \left\{ y | \inf_{x \in \text{supp } \varphi_y} f(x) < \frac{1}{2} \right\}$ . В силу предложения 1 имеем  $y_0 \in V$ , так как  $\inf_{x \in \text{supp } \varphi_{y_0}} f(x) = \varphi_{y_0}(f) = \max_{x \in \text{supp } \varphi_{y_0}} f(x) = 0$ . Пусть  $y \in V$  и  $r(y) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ . Поскольку  $X \setminus U \subset \left\{ x | f(x) > \frac{1}{2} \right\}$ , то из предложения 2 следует, что  $\inf_{x \in \text{supp } \varphi_y} f(x) = \varphi_y(f) \geq \frac{1}{2}$ . Полученное про-

тиворечие позволяет утверждать, что  $r(y) \subset U$  для любого  $y \in V$ . Теорема 1 доказана.

С помощью теоремы 1 можно получить функциональное описание  $\text{exp}$ , о котором говорилось выше. Для пространства  $X$  обозначим через  $\Phi(X)$  множество всех полуаддитивных, полумультипликативных, монотонных, однородных, слабо аддитивных, слабо регулярных функционалов  $\varphi: C_+(X) \rightarrow R_+$ . На множестве  $\Phi(X)$  введем слабую\* топологию, т. е. наименьшую топологию, в которой будут непрерывными функции  $f: \Phi(X) \rightarrow R$ , где  $f \in C_+(X)$  и  $f(\varphi) = \varphi(f)$ . Легко видеть, что  $\Phi(X)$  — бикompакт и пространство  $X$  естественно вложено в  $\Phi(X)$ . Более того,  $\Phi$  — ковариантный функтор из категории  $\text{Comp}$  в себя.

**Теорема 2.** *Функторы  $\Phi$  и  $\text{exp}$  естественно изоморфны.*

**Доказательство.** Для вложения  $X \hookrightarrow \Phi(X)$  существует полуаддитивный, полумультипликативный, монотонный, однородный, слабо аддитивный, слабо регулярный экстендер  $u: C_+(X) \rightarrow C_+(\Phi(X))$ , определяемый соотношением  $u(f)(\varphi) = \varphi(f)$ . В силу теоремы 1 существует многозначная ретракция  $r: \Phi(X) \rightarrow \text{exp } X$ , причем  $r(\varphi) = \text{supp } \varphi$ . Очевидно, что  $r$  есть отображение «на», так как каждому непустому замкнутому подмножеству  $F \subset X$  соответствует функционал  $\varphi$ , определяемый соотношением  $\varphi(f) = \max_{x \in F} f(x)$ . Очевидно, что  $\text{supp } \varphi = F$ . Осталось по-

казать, что отображение инъективно. Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(X)$  и  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ . Следовательно, существует функция  $f \in C_+(X)$ , такая, что  $\alpha = \varphi_1(f) < \varphi_2(f) = \beta$ . Возьмем произвольное число  $\gamma \in (\alpha, \beta)$  и рассмотрим открытое множество  $U = \{x | f(x) > \gamma\}$ . Имеем  $U \neq \emptyset$ , так как  $\gamma < \beta = \varphi_2(f) \leq \|f\|$ . Из предложения 2 следует, что  $U \cap \text{supp } \varphi_1 = \emptyset$ . В силу того что  $\gamma$  — произвольное число из интервала  $(\alpha, \beta)$ , мы можем заключить, что  $f(x) \leq \alpha$  для любого  $x \in \text{supp } \varphi_1$ . Рассмотрим функцию  $g = \max\{f, \alpha_x\}$ . Из предложения 1 следует, что  $\varphi_1(g) \leq \alpha$ , но  $\alpha = \varphi_1(f) \leq \varphi_1(g) \leq \alpha$ , т. е.  $\varphi_1(g) = \alpha$ . Функция  $h = g - \alpha_x$  принадлежит пространству  $C_+(X)$ . В силу слабой аддитивности  $\varphi_1$  имеем  $\varphi_1(g) = \varphi_1(h + \alpha_x) = \varphi_1(h) + \alpha = \alpha$ , т. е.  $\varphi_1(h) = 0$ . Из предложения 2 следует, что  $\text{supp } \varphi_1 \subset h^{-1}(0)$ . С другой стороны,  $\varphi_2(h) > 0$ , так как  $\varphi_2(h) + \alpha = \varphi_2(g) \geq \varphi_2(f) = \beta > \alpha$ , а из предложения 1 вытекает, что  $\text{supp } \varphi_2 \cap \{x | h(x) > 0\} \neq \emptyset$ . Таким образом,  $\text{supp } \varphi_1 \neq \text{supp } \varphi_2$ . Теорема 2 доказана.

Используя результаты Э. ван Дауэна, А. В. Иванова и Л. В. Широкова, мы можем получить характеристики  $\kappa$ -метризуемых и связанных  $\kappa$ -метрических бикompактов.

**Теорема 3.** *Пространство  $X$  —  $\kappa$ -метризуемый (связный и  $\kappa$ -метризуемый) бикompакт тогда и только тогда, когда для любого вложения  $X \hookrightarrow Y$  существует монотонный (монотонный и ортогональный) экстендер.*

**Доказательство.** Пусть  $X$  —  $\kappa$ -метризуемый (связный и  $\kappa$ -метризуемый) бикompакт. Рассмотрим  $\lambda X$  — суперрасширение  $X$  [7]. Легко показать, что экстендер  $u: C_+(X) \rightarrow C_+(\lambda X)$ , определяемый формулой  $u(f)(\xi) = \max_{F \in \xi} \min_{x \in F} f(x)$ , является монотонным. Установим ортогональность  $u$ . Прежде всего отметим, что  $\max_{F \in \xi} \min_{x \in F} f(x) = \min_{F \in \xi} \max_{x \in F} f(x)$ . Действительно, из сцепленности  $\xi$  вытекает неравенство  $\max_{F \in \xi} \min_{x \in F} f(x) \leq \min_{F \in \xi} \max_{x \in F} f(x)$ . Пусть для некоторого  $\xi \in \lambda X$  выполнено  $\alpha = \max_{F \in \xi} \min_{x \in F} f(x) < \min_{F \in \xi} \max_{x \in F} f(x) = \beta$ . Рассмотрим замкнутые в  $X$  множества  $G_0 = \left\{x | f(x) \leq \frac{\alpha + \beta}{2}\right\}$  и  $G_1 = \left\{x | f(x) \geq \frac{\alpha + \beta}{2}\right\}$ . Так как  $G_0 \cup G_1 = X$ ,

то хотя бы одно из этих множеств содержится в  $\xi$ , например  $G_0$ . Тогда  $\beta > \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \max_{x \in G_0} f(x)$  и  $\min_{F \in \xi} \max_{x \in F} f(x) < \beta$  — противоречие. Доказанное равенство было также независимо получено М. М. Чобаном. Пусть  $f, g \in C_+(X)$  и  $\min\{f, g\} = 0_X$ . Предположим, что  $u(f)(\xi) > 0$  для некоторого  $\xi \in \lambda X$ . Тогда  $f^{-1}(0) \not\subseteq \xi$ . Но  $f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0) = X$ . Следовательно,  $g^{-1}(0) \subseteq \xi$ , и  $u(g)(\xi) = \min_{F \in \xi} \max_{x \in F} g(x) = 0$ , т. е.  $\min\{u(f), u(g)\} = 0_{\lambda X}$ . Ана-

логично устанавливается, что из соотношения  $\max\{f, g\} = 1_X$  следует  $\max\{u(f), u(g)\} = 1_{\lambda X}$ . Пространство  $\lambda X$  естественно вложено в  $Z = \lambda X \cup_{id} Y$ . Так как  $\lambda X$  — абсолютный экстензор в размерности нуль (абсолютный ретракт) [7, 8], то существует  $v: C_+(\lambda X) \rightarrow C_+(Z)$  — аддитивный, однородный, слабо регулярный (аддитивный, мультипликативный, однородный, слабо регулярный) экстендер. Ясно, что  $v$  — монотонный (ортогональный и монотонный) экстендер. Искомый экстендер  $\omega: C_+(X) \rightarrow C_+(Y)$  определяется так:  $\omega(f) = v(u(f)) \upharpoonright Y$ .

Предположим, что  $X \subseteq I^c$  и  $u: C_+(X) \rightarrow C_+(I^c)$  — монотонный (ортогональный и монотонный) экстендер. В силу теоремы Э. ван Дауэна [9, с. 25, теорема 4.1] существует регулярный оператор продолжения открытых множеств  $e: O(X) \rightarrow O(I^c)$ , а это по теореме Л. В. Широкова [10] влечет  $\kappa$ -метризуемость  $X$ . Связность  $X$  следует из ортогональности  $u$  и связности тихоновского куба  $I^c$ .

Перейдем к описанию категорной характеристики функтора  $P$ . Для этой цели рассмотрим подкатеорию  $CNF$  категории  $NF$ . Объектами  $CNF$  являются нормальные функторы из категории  $\text{Compr}$  в категорию выпуклых бикомпактов, лежащих в ЛВП, и непрерывных аффинных отображений. Морфизмы  $CNF$  — естественные преобразования с аффинными компонентами.

**Определение 4** [11]. Объект  $a$  называется начальным объектом категории  $K$ , если для любого объекта  $b \in K$  множество  $\text{Mog}(a, b)$  состоит ровно из одного элемента.

**Теорема 4.** *Функтор  $P$  является начальным объектом категории  $CNF$ , причем для любого объекта  $F \in CNF$  все компоненты естественного преобразования  $\eta: P \rightarrow F$  суть вложения.*

**Доказательство.** Рассмотрим  $F$  из  $CNF$  и построим естественное преобразование  $\eta: P \rightarrow F$ . Так как  $\text{Id} \subseteq F$ , то  $X \subseteq F(X)$ . В силу предложения 1.1 [12] отображение  $\eta_X: P(X) \rightarrow F(X)$ , которое каждой мере  $\mu \in P(X)$  ставит в соответствие ее центр тяжести, лежащий в  $[\text{conv } X] \subseteq F(X)$ , будет непрерывным и аффинным. Очевидно, таким образом заданное отображение  $\eta = \{\eta_X\}$  будет естественным преобразованием, причем единственным, так как  $\eta_X$  однозначно определяется на мерах с конечными носителями. Установим инъективность  $\eta_X$  для любого объекта  $X \in \text{Compr}$ . Рассмотрим конечное пространство  $X$ . Покажем, что  $\text{conv } X$  — выпуклая оболочка  $X$  в  $F(X)$  — является симплексом размерности  $|X| - 1$ . Действительно, если это не так, то  $\dim \text{conv } X \leq |X| - 2$ . По теореме Радона (см. [13, с. 21, теорема 2.7])  $X$  можно разбить на две дизъюнктные части  $Y$  и  $Z$  так, что  $\text{conv } Y \cap \text{conv } Z = \emptyset$ . Рассмотрим отображение  $g: X \rightarrow 2$ , такое, что  $g(Y) = 0$  и  $g(Z) = 1$ . Так как  $F(g): F(X) \rightarrow F(2)$  — аффинное отображение, то  $F(g)(\text{conv } Y) = 0$  и  $F(g)(\text{conv } Z) = 1$ , но этого не может быть, поскольку  $\text{conv } Y \cap \text{conv } Z \neq \emptyset$ . Итак, для любого конечного  $X$  множество  $\text{conv } X$  — симплекс размерности  $|X| - 1$ , а это означает, что  $\eta_X$  — инъективное отображение. В силу непрерывности функторов отсюда следует инъективность отображения  $\eta_X$  для любого нульмерного  $X$ . Далее, если  $X, Y$  — метризуемые бикомпакты и  $g: X \rightarrow Y$  — неприводимое

отображение, то  $F(g) : \eta_X(P(X)) \rightarrow \eta_Y(P(Y))$  неприводимо, так как существует всюду плотное множество  $Z$  точек однозначности  $g$ , а множество  $\text{supp } Z$  — всюду плотное в  $\eta_X(P(X))$  множество точек однозначности отображения  $F(g) \uparrow \eta_X(P(X))$ . Отсюда заключаем, что для метризуемого бикompакта  $X$  отображение  $\eta_X : P(X) \rightarrow \eta_X(P(X))$  неприводимо. По теореме П. С. Александрова в  $P(X)$  существует всюду плотное  $G_\delta$ -множество  $\Gamma(X)$  точек однозначности  $\eta_X$ , т. е. если  $\mu \in \Gamma(X)$ , то  $\mu = \eta_X^{-1} \eta_X(\mu)$ . Отметим, что  $\delta x \in \Gamma(X)$  для любого  $x \in X$ . Легко видеть, что множество  $\Gamma(X)$  инвариантно относительно действия группы  $\text{Auth}(X)$  автогомеоморфизмов пространства  $X$ , т. е. если  $\mu \in \Gamma(X)$ ,  $g \in \text{Auth}(X)$ , то  $P(g)(\mu) \in \Gamma(X)$ . Для метризуемого бикompакта  $X$  без изолированных точек подпространство непрерывных мер является всюду плотным в  $P(X)$  множеством типа  $G_\delta$ . Действительно, пусть  $M_n = \left\{ \mu \in P(X) \mid \text{существует точка } x, \text{ такая, что } \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n} \right\}$ . Покажем, что  $M_n$  — замкнутое нигде не плотное в  $P(X)$  множество. Пусть  $\{\mu_i\} \subset M_n$  и  $\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i$ . Для любого  $i \in \mathbb{N}$  существует точка  $x_i \in X$ , такая, что  $\mu_i(\{x_i\}) \geq \frac{1}{n}$ . Из последовательности  $\{x_i\}$  выберем сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{i_k}\}$ . Рассмотрим  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{i_k}$ . Используя свойство сходимости в пространстве  $P(X)$  [14, с. 21, теорема 2.1], получаем, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{i_k}(B(x, \varepsilon)) \leq \mu(B(x, \varepsilon))$  для любого замкнутого шара  $B(x, \varepsilon)$  с центром  $x$  радиуса  $\varepsilon$ . Но левая часть неравенства не меньше  $\frac{1}{n}$ . Следовательно,  $\mu(B(x, \varepsilon)) \geq \frac{1}{n}$  для любого  $\varepsilon > 0$ , т. е.  $\mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n}$ . Замкнутость множества  $M_n$  доказана. Покажем, что  $M_n$  нигде не плотно. Пусть  $\mu \in M_n$  и возьмем конечное множество  $A = \{x_i \mid i \in \overline{1, l}\}$  всех точек из  $X$ , для каждой из которых справедливо неравенство  $\mu(\{x_i\}) \geq \frac{1}{n}$ . Для любого  $i \in \overline{1, l}$  определим  $n+1$  последовательностей точек  $\{x_{kj}^i \mid k \in \overline{1, n+1}; j \in \mathbb{N}\}$ , таких, что  $\mu(\{x_{kj}^i\}) = 0$  при любых  $i, j, k$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{kj}^i = x_i$  и  $x_{kj}^i \neq x_{k'j'}^i$ , при  $(i, j, k) \neq (i', j', k')$ . Определим меры  $\mu_j \in P(X)$  так:  $\mu_j(\{x_i\}) = 0$  для любого  $i \in \overline{1, l}$ ,  $\mu_j(\{x_{kj}^i\}) = \frac{\mu(\{x_i\})}{n+1}$  и  $\mu_j(B) = \mu(B)$ , если борелевское множество  $B$  не содержит точек множества  $\{x_i \mid i \in \overline{1, l}\} \cup \{x_{kj}^i \mid i \in \overline{1, l}; k \in \overline{1, n+1}; j \in \mathbb{N}\}$ . Тогда  $\mu_j \notin M_n$  для любого  $j \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = \mu$ , т. е.  $M_n$  нигде не плотно. Итак, мы показа-

ли, что множество всех непрерывных мер является всюду плотным  $G_\delta$ -множеством в  $P(X)$ . Кроме того, легко видеть, что множество всех локально положительных мер (мера непустого открытого множества положительна) также является плотным  $G_\delta$ -множеством. Следовательно, для метризуемого бикompакта  $X$  без изолированных точек множество всех непрерывных локально положительных мер является всюду плотным  $G_\delta$ -множеством в  $P(X)$ , т. е. пересекает  $\Gamma(X)$ . Отсюда заключаем, что для гильбертова куба  $Q$  множество  $\Gamma(Q)$  содержит непрерывную локально положительную меру. Но в силу результата Окстоби и Прасада [15] любые две непрерывные, локально положительные, вероятностные меры на  $Q$  гомеоморфны, т. е. в нашей терминологии принадлежат одной орбите действия  $\text{Auth}(Q)$  на  $P(Q)$ . А это означает,

как отмечалось выше, что любая такая мера лежит в  $\Gamma(Q)$ . Теперь мы готовы завершить доказательство инъективности  $\eta_X$ . Рассмотрим метризуемый бикомпакт  $X$  и две различные меры  $\mu, \nu \in P(X)$ . Возможны следующие случаи.

1.  $\text{supp } \mu \neq \text{supp } \nu$ . Пусть  $\text{supp } \mu \setminus \text{supp } \nu \neq \emptyset$ . Тогда определим непрерывное отображение  $g: X \rightarrow I = [0, 1]$ , такое, что  $g(\text{supp } \nu) = 0$ ,  $g(\text{supp } \mu) \neq 0$ . Тогда  $P(g)(\nu) = \delta_0 \neq P(g)(\mu)$ . Как отмечалось выше, меры Дикара являются точками однозначности компонент  $\eta$ , т. е.  $\delta_0 \in \Gamma(I)$  или  $\eta_I(P(g)(\nu)) \neq \eta_I(P(g)(\mu))$  и  $\eta_X(\mu) \neq \eta_X(\nu)$ .

2.  $\text{supp } \mu = \text{supp } \nu$ . Без ограничения общности можно считать, что  $X = \text{supp } \mu$ . Так как  $\mu \neq \nu$ , то существует такое замкнутое в  $X$  множество  $B$ , что  $\mu(B) \neq \nu(B)$ . Определим непрерывное отображение  $g: X \rightarrow I$ , такое, что  $B = g^{-1}(0)$ . Тогда  $P(g)(\mu) \neq P(g)(\nu)$ . Если  $0 \notin \text{Int}_I g(X)$ , то существует последовательность  $\{t_i\} \subset I \setminus g(X)$ , такая, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = 0$ .

Поскольку  $P(g)(\mu)(\{0\}) \neq P(g)(\nu)(\{0\})$ , то найдется такой индекс  $j$ , что  $P(g)(\mu)([0, t_j]) \neq P(g)(\nu)([0, t_j])$ . Определим отображение  $h: g(X) \rightarrow 2$  следующим образом:  $h(t) = 0$ , если  $t < t_j$ , и  $h(t) = 1$ , если  $t > t_j$ . По построению  $P(hg)(\mu) \neq P(hg)(\nu)$ , следовательно, инъективность отображения  $\eta_2$  влечет неравенство  $\eta_X(\mu) \neq \eta_X(\nu)$ . Предположим теперь, что  $0 \in \text{Int}_I g(X)$ . Следовательно,  $[0, t_0] \subset g(X)$  для некоторого  $t_0$ . Определим отображение  $h: g(X) \rightarrow [0, t_0] = Y: h(t) = t$ , если  $t \leq t_0$ , и  $h(t) = t_0$ , если  $t > t_0$ . Мы получили  $\mu_1 = P(hg)(\mu)$  и  $\nu_1 = P(hg)(\nu)$  — две неравные локально положительные меры на пространстве  $Y$ , гомеоморфном отрезку. Предположим, что  $\eta_Y(\mu_1) = \eta_Y(\nu_1)$ . Рассмотрим меру Лебега  $\lambda \in P(Q)$ , пространство  $Z = Y \times Q$  и меры  $\mu_2 = \mu_1 \otimes \lambda$ ,  $\nu_2 = \nu_1 \otimes \lambda$ . Отметим, что  $Z$  гомеоморфно  $Q$ , а  $\mu_2, \nu_2$  — непрерывные и локально положительные меры; следовательно,  $\mu_2, \nu_2 \in \Gamma(Z)$ . По теореме Фубини [16, с. 73, замечание] получаем, что  $\eta_Z(\mu_2) = \eta_Z(\nu_2)$ , чего не может быть, так как  $\mu_2 \neq \nu_2$ . Таким образом,  $\eta_X$  инъективно для любого метризуемого бикомпакта  $X$ , а в силу свойства непрерывности нормальных функторов и в общем случае. Теорема доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шелин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи матем. наук. 1981. 36, вып. 3. 3—62.
2. Шапиро Л. Б. Категорная характеристика гиперпространства // Успехи матем. наук. 1988. 43, вып. 4. 227—228.
3. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций М., 1970.
4. Naundon R. On problem of Pelczynski: Milutin spaces, Dugundji spaces and  $AE$  ( $\dim 0$ ) // Stud. Math. 1974. 52, N 1. 23—31.
5. Непомнящий Г. М. О спектральном разложении многозначных абсолютных ретрактов // Успехи матем. наук. 1981. 36, вып. 3. 221—222.
6. Федорчук В. В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи матем. наук. 1984. 39, вып. 5. 169—208.
7. Иванов А. В. Суперрасширения открыто-порожденных бикомпактов // Докл. АН СССР. 1981. 259, № 2. 275—278.
8. Иванов А. В. Решение проблемы Ван Милла о характеристизации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными ретрактами // Докл. АН СССР. 1982. 262, № 3. 526—528.
9. Douwen E. K. van. Simultaneous extension of continuous functions. Amsterdam, 1975.
10. Широков Л. В. Внешняя характеристика пространств Дугунджи и каппа-метризуемых бикомпактов // Докл. АН СССР. 1982. 263, № 5. 1073—1077.
11. Гольдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.
12. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М., 1968.
13. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М., 1985.



14. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.
15. Oxtoby J. C., Prasad V. S. Homeomorphic measures in the Hilbert cube // Pacif. J. Math. 1978. 77, N 2. 483—497.
16. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. М., 1977.

Поступила в редакцию  
13.02.91

УДК 515.12, 517.98

**В. В. Федорчук**

## ОБ ОТОБРАЖЕНИИ БАРИЦЕНТРА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Для любого выпуклого бикompакта  $K$ , лежащего в отделимом локально выпуклом пространстве, определено отображение  $b = b_K : P(K) \rightarrow P(K)$  барицентра вероятностных мер (см. [1]). Это отображение непрерывно, а для  $K = P(X)$  имеем  $b_{P(X)} = \psi_X$  (см. [1]), где  $\psi_X : P^2(X) \rightarrow P(X)$  — ретракция монады вероятностных мер.

В § 1 получены необходимые и достаточные условия того, что отображение  $b_K$  открыто. С их помощью мы показываем, что ретракция монады  $\psi : P^2 \rightarrow P$  есть открытое преобразование. В § 3 доказано, что для выпуклого компакта  $K$  из открытости отображения  $b : P(K) \rightarrow K$  вытекает, что оно является тривиальным расслоением со слоем гильбертов куб  $Q$  над дополнением до множества  $E(K)$  всех экстремальных точек. Важным вспомогательным элементом в доказательстве является лемма об аппроксимационной селекции (§ 2). Недостающую информацию о пространстве мер и о ковариантных функторах читатель найдет в [1, 2]. Результаты работы сформулированы в [1].

### § 1. Об открытости отображения барицентра

Через  $K$  будем обозначать выпуклый бикompакт, лежащий в некотором локально выпуклом пространстве  $E$ .

*Лемма 1. Для любой точки  $x \in K$  в множестве  $b^{-1}(x)$  всюду плотно множество мер с конечными носителями.*

Это утверждение фактически доказано в [3, гл. IV, § 7, предложение 3].

Точку  $a = \{y_1, \dots, y_n\} \in \text{exr}_n K$  назовем *отмеченной* относительно точки  $x \in K$ , если  $x \in \text{conv}\{y_1, \dots, y_n\}$ . Множество всех отмеченных относительно  $x$  точек обозначим через  $c_n(x)$ .

*Лемма 2. Множество  $c_n(x)$  замкнуто в  $\text{exr}_n K$ .*

В самом деле, пусть  $a = \{y_1, \dots, y_k\} \in \text{exr}_n K \setminus c_n(x)$ . Это означает существование такой выпуклой симметричной окрестности  $V$  нуля в  $E$ , что  $(x+V) \cap \text{conv}\{y_1, \dots, y_k\} = \emptyset$ . Уменьшив в случае необходимости эту окрестность, можно считать, что  $(y_i+V) \cap (y_j+V) = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Положив  $Oa = O(y_1+V, \dots, y_k+V) \cap \text{exr}_n K$ , несложной проверкой убеждаемся в том, что  $Oa \cap c_n(x) = \emptyset$ .

Таким образом, для всякого выпуклого бикompакта  $K$  и для всякого натурального  $n$  определено отображение  $c_n : K \rightarrow \text{exr}(\text{exr}_n K)$ .

*Теорема 1. Отображение барицентра  $b_K$  открыто тогда и только тогда, когда для всякого натурального  $n$  непрерывно отображение  $c_n$ .*