М. М. Лаврентьев (мл.), Н. А. Люлько, Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач,
Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 109–124

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 517.95

ПОВЫШЕНИЕ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ*)

М. М. Лаврентьев (мл.), Н. А. Люлько

Введение

Исследованию качественных свойств решений смешанных задач для гиперболических уравнений и систем ввиду их прикладного значения посвящена обширная литература. Мы будем рассматривать достаточно частные вопросы, ограничиваясь ссылками на наиболее близкие к изучаемым проблемам работы.

В работах [1, 2] выделен класс линейных однородных систем гиперболических уравнений первого порядка и указаны требования на граничные условия, при выполнении которых гладкость всякого решения соответствующей смешанной задачи повышается с течением времени. В настоящей работе аналогичные результаты доказываются для случаев неоднородной системы и системы с кратными характеристиками. Кроме того, исследуется частный случай нелинейной системы.

Полученные результаты применяются для изучения свойств решений двух конкретных систем квазилинейных уравнений, описывающих процесс в каталитическом реакторе с учетом внутреннего теплообмена при протекании реакций нулевого и первого порядков [3].

Формулировки используемых в дальнейшем понятий и результатов содержатся в § 1. В § 2 сгруппированы результаты о линейных, а в § 3 — о нелинейных системах. В § 4 приводятся постановки двух задач, возникающих при математическом моделировании химических реакций, и обосновывается применение полученных выше результатов в этих частных случаях.

§ 1. Вспомогательные построения

В полуполосе $\Pi = (0,1) \times (0,\infty)$ будем рассматривать задачу

$$U_t + L_{\mathscr{A}} U = F(x,t,U), \quad (x,t) \in \Pi, \tag{1.1}$$

$$I_0 U(0,t) + I_1 U(1,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$U(x,t)|_{t=0} = U_0(x). \tag{1.3}$$

Здесь $U(x,t) = [u_1(x,t),\dots,u_n(x,t)]^T$ — вектор неизвестных функций, $F(x,t,U)$ — n-мерный вектор гладких функций и

$$L_{\mathscr{A}} U = \mathscr{K}(x)\frac{\partial U}{\partial x} - \mathscr{A}(x)U, \quad \mathscr{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n},$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (грант ММ7.8/3Н–303–92) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01618).

где $\mathscr{K}(x)$ — диагональная матрица с элементами $k_i(x) > 0$, $k_j(x) < 0$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, n$ и $k_l(x) \neq k_m(x)$ $(l \neq m)$, причем $p(n-p) \neq 0$.

Матрицы I_0, I_1 имеют вид

$$I_0 = \begin{pmatrix} E^{p,p} & A^{p,n-p} \\ O^{n-p,p} & O^{n-p,n-p} \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} O^{p,p} & O^{p,n-p} \\ B^{n-p,p} & E^{n-p,n-p} \end{pmatrix}.$$

Здесь $E^{m,k}$, $O^{m,k}$ соответственно единичная и нулевая матрицы размера $m \times k$; $A^{p,n-p} = (\alpha_{ij})$, $B^{n-p,p} = (\beta_{ji})$, $i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, n$, где α_{ij}, β_{ji} — вещественные, а p, n — натуральные числа.

Вопрос о корректности постановок линейных $(F(x,t,U) = \mathscr{F}(x,t))$ задач вида (1.1)–(1.3) в различных пространствах исследовался в работах [2, 4–6]. Работы [4, 7–9] посвящены исследованию распространения разрывов у решений гиперболических задач. Асимптотическое поведение однородных $(F(x,t,U) = 0)$ задач (1.1)–(1.3) подробно изучалось в [2, 10].

Введем некоторые определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Определение 1.1. Будем говорить, что *задача* (1.1)–(1.3) *повышает гладкость решений до k-го порядка*, если найдется такое $T(k) \geqslant 0$, что всякое решение $U(x,t)$ задачи становится k раз непрерывно дифференцируемым при $t > T(k)$.

В случае линейной задачи $(F(x,t,U) = \mathscr{F}(x,t))$ дополнительно потребуем справедливости при $t > T(k)$ оценки

$$\left\| \mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{x,t} U(x,t) \right\|_{C[0,1]} \leqslant K(t) (\|U_0(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\mathscr{F}(x,t)\|_{C^k([0,1]\times[0,t])}), \tag{1.4}$$

где $\alpha + \beta \leqslant k$, $K(t)$ не зависит от $U_0(x)$, $\mathscr{F}(x,t)$, а зависит от коэффициентов системы.

Свойство повышения гладкости решения зависит от граничных условий (1.2). Следуя [1, 2], выделим два класса таких условий.

Рассмотрим матрицу $S = I_0 + I_1$. Пусть $S_{i_1,\ldots,i_p}$ — определитель p-го порядка матрицы, состоящей из элементов первых p строк и $i_1, \ldots, i_p$ столбцов матрицы S, а $R_{i_1,\ldots,i_p}$ — соответствующее алгебраическое дополнение. Разложим определитель матрицы S по первым p строкам. Имеем

$$\det S = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} S_{i_1,\ldots,i_p} \cdot R_{i_1,\ldots,i_p}. \tag{1.5}$$

Очевидно, что $S_{1,\ldots,p} \cdot R_{1,\ldots,p} \equiv 1$.

Определение 1.2. Краевые условия (1.2) называются *A-регулярными*, если все слагаемые в правой части выражения (1.5), за исключением $S_{1,\ldots,p} \cdot R_{1,\ldots,p}$, равны нулю.

Следуя [2], введем в рассмотрение матрицу

$$\Gamma = \left(\delta_{ij} \exp\left(-\lambda \int_0^1 \frac{d\tau}{k_i(\tau)} + \int_0^1 \frac{a_{ij}(\tau)}{k_i(\tau)}\, d\tau \right) \right), \quad i,j = 1, \ldots, n,$$

где λ — комплексный параметр, δ_{ij} — символы Кронекера. Рассмотрим также матрицу $S_1 = I_0 + I_1\Gamma$. Определитель матрицы S_1 можно записать в виде

$$\det S_1 = \Delta_1(\lambda) \exp\left(-\lambda \sum_{i=p+1}^{n} \int_0^1 \frac{d\tau}{k_i(\tau)} + \sum_{i=p+1}^{n} \int_0^1 \frac{a_{ii}(\tau)}{k_i(\tau)}\, d\tau \right),$$

где
$$\Delta_1(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{M} E_k e^{-\lambda\beta_k},$$
$M \geqslant 1$, $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_M$; E_k — вещественные числа.

Определение 1.3. Краевые условия (1.2) называются *B-регулярными*, если все коэффициенты E_k функции $\Delta_1(\lambda)$ равны нулю.

Нетрудно видеть, что B-регулярные краевые условия зависят от вида матриц $\mathscr{K}(x)$, $\mathscr{A}(x)$, а A-регулярные условия не зависят от вида $\mathscr{A}(x)$ и легко проверяемы.

Для формулировки результатов нам понадобится понятие кусочно-гладкого решения (КГР) линейной задачи. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.3), где $F \equiv \mathscr{F}(x,t)$, $\mathscr{F}(x,t) = [f_1(x,t),\dots,f_n(x,t)]^T$. Через каждую точку $(x_0,t_0) \in \Pi$ проходит n характеристик $x = \varphi_i(t;x_0,t_0)$ системы (1.1), определяемых уравнениями
$$\frac{d\varphi_i}{dt} = k_i(\varphi_i), \quad \varphi_i|_{t=t_0} = x_0, \quad i = 1,\dots,n.$$

Пусть $\chi_i(x_0,t_0) = \inf\{t : (\varphi_i(t;x_0,t_0),t) \in \overline{\Pi}\}$. Тогда, очевидно, $0 \leqslant \chi_i(x_0,t_0) \leqslant t_0$, и если $\chi_i(x_0,t_0) > 0$, то $\varphi_i(\chi_i(x_0,t_0);x_0,t_0)$ равно либо 0, либо 1. Введем в рассмотрение для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, следующие множества:
$$\Pi_i = \{(x,t) \in \overline{\Pi};\ \chi_i(x,t) = 0\},$$
$$\Pi_i^0 = \{(x,t) \in \overline{\Pi}; \chi_i(x,t) > 0;\ \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = 0\},$$
$$\Pi_i^1 = \{(x,t) \in \overline{\Pi}; \chi_i(x,t) > 0;\ \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = 1\}.$$

Очевидно, что $\Pi_i^0 = \varnothing$, $i = p+1,\dots,n$; $\Pi_i^1 = \varnothing$, $i = 1,\dots,p$.

Пусть $\mathscr{K}(x), \mathscr{A}(x), U_0(x) \in C^1[0,1]$, $\mathscr{F}(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}(\Pi)$. Проинтегрируем i-е уравнение системы вдоль соответствующей характеристики $x = \varphi_i(t;x_0,t_0)$. Тогда, используя условия (1.2), (1.3), получим следующую систему интегральных уравнений:
$$u_i(x_0,t_0) = \int\limits_{\chi_i(x_0,t_0)}^{t_0} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j + f_i\right)\Bigg|_{\substack{t=\tau\\ x=\varphi_i(\tau;x_0,t_0)}} d\tau + v_i(x_0,t_0), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1.6}$$
$$v_i(x,t) = \begin{cases} u_{0i}(\varphi_i(0;x,t)), & (x,t) \in \Pi_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\\ -\sum\limits_{j=p+1}^{n} \alpha_{ij}u_j(0;\chi_i(x,t)), & (x,t) \in \Pi_i^0, \quad 1 \leqslant i \leqslant p,\\ -\sum\limits_{j=1}^{p} \beta_{ij}u_j(1;\chi_i(x,t)), & (x,t) \in \Pi_i^1, \quad p+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что непрерывно дифференцируемая функция $U(x,t)$ будет решением задачи (1.1)–(1.3) тогда и только тогда, когда она является решением этой системы интегральных уравнений. В [4] доказано, что при сделанном предположении о гладкости входящих в задачу (1.1)–(1.3) известных величин существует единственное непрерывно дифференцируемое решение $U(x,t)$ системы (1.6), если выполнены условия согласования нулевого порядка
$$I_0U_0(0) + I_1U_0(1) = 0 \tag{1.7}$$

и первого порядка

$$I_0U_2(0) + I_1U_2(1) = 0,$$

где $U_2(x) = -\mathscr{K}(x)\dfrac{dU_0}{dx} + \mathscr{A}(x)U_0(x) + \mathscr{F}(x,0)$.

Из системы (1.6) видно, что выполнение этих условий согласования необходимо для непрерывной дифференцируемости решения интегральной системы во всей полуполосе П.

Для определения понятия кусочно-гладкого решения рассматриваемой задачи нам потребуются некоторые вспомогательные построения.

Из точки $(0,0)$ ($(1,0)$) проведем p ($n-p$) различных характеристик системы с положительным (отрицательным) наклоном до пересечения с прямой $x=1$ ($x=0$). Через каждую из полученных точек пересечения проведем $n-p$ (p) различных характеристик с отрицательным (положительным) наклоном до пересечения с прямой $x=0$ ($x=1$). Возьмем каждую из полученных точек за исходную и будем повторять описанный выше процесс бесконечное число раз.

Из построенных выше характеристик выделим семейство кривых q_i^j, $j=1,2,3,\dots$, которые параллельны характеристике $x=\varphi_i(t;0,0)$ ($x=\varphi_i(t;1,0)$), и обозначим это семейство через Q_i, $i=1,\dots,p$ ($i=p+1,\dots,n$). Нетрудно видеть, что полуполоса П разбивается характеристиками q_i^j, $j=1,2,\dots$, из всех семейств Q_i, $i=1,\dots,n$, на бесконечное число односвязных непересекающихся областей R_j, $j=1,2,\dots$.

Рассмотрим отрезок $\rho_\tau = \{(x,t)\in \Pi : 0\leqslant x\leqslant 1, t=\tau\}$. Для каждого фиксированного $\tau>0$ он пересекает лишь конечное число областей R_j, которые мы обозначим через $R_{k_1},\dots,R_{k_{l(\tau)}}$. Пусть $\Omega_j(\tau)=\rho_\tau\cap R_{k_j}$, $1\leqslant j\leqslant l(\tau)$. Обозначим через $R_\tau[0,1]$ множество равномерно непрерывных в интервалах $\Omega_j(\tau)$, $1\leqslant j\leqslant l(\tau)$, вектор-функций $V(x)=[v_1(x),\dots,v_n(x)]^T$ с нормой

$$\|V(x)\|_{R_\tau} = \max_{1\leqslant j\leqslant l(\tau)}\sup_{x\in\Omega_j(\tau)}|V(x)|, \qquad |V(x)| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|v_i(x)|,$$

а через $R^1_\tau[0,1]$ — множество функций $V(x)$, которые равномерно непрерывны вместе со своей производной $V_x(x)$ в интервалах $\Omega_j(\tau)$, $1\leqslant j\leqslant l(\tau)$, причем

$$\|V(x)\|_{R^1_\tau} = \max(\|V(x)\|_{R_\tau}, \|V_x(x)\|_{R_\tau}).$$

Множеством $R(\Pi)$ будем называть множество функций $U(x,t)$, равномерно непрерывных в областях R_j, $j=1,2,\dots$, а $R^1(\Pi)$ — множество функций $U(x,t)$, равномерно непрерывных вместе со своими производными $U_x(x,t)$, $U_t(x,t)$ в тех же областях.

Очевидно, что если функция $U(x,t)$ принадлежит $R^1(\Pi)$, то для любого $t\geqslant 0$ она принадлежит множеству $R^1_t[0,1]$ и величина

$$\|U_t(x,t)\|_{R_t} + \|U(x,t)\|_{R^1_t}$$

для нее конечна.

Определение 1.4. *Кусочно гладким решением* (КГР) линейной задачи (1.1)–(1.3) называется функция $U(x,t)\in R^1(\Pi)$, являющаяся решением интегральной системы (1.6).

В работе [2] приведена

Теорема 1.1. *Если $\mathscr{A}(x),\mathscr{K}(x),U_0(x)\in C^1[0,1]$, $\mathscr{F}(x,t)\in C^{1,0}_{x,t}(\Pi)$, то существует единственное* КГР $U(x,t)$ *исходной задачи, причем при $t\geqslant 0$ оно удовлетворяет неравенству*

$$\|U_t(x,t)\|_{R_t} + \|U(x,t)\|_{R^1_t} \leqslant Ke^{At}\big(\|U_0(x)\|_{C^1[0,1]} + \max_{\tau\leqslant t}\|\mathscr{F}(x,\tau)\|_{C^1[0,1]}\big),$$

где константы K, A не зависят от t.

Замечание. В работе [2] отмечены следующие обстоятельства:

(1) Если выполнены условия согласования нулевого и первого порядков, то КГР $U(x,t)$ рассматриваемой задачи будет совпадать с классическим решением. При выполнении условий (1.7) КГР $U(x,t)$ будет непрерывной функцией. Если же условия (1.7) не выполнены, то из системы (1.6) видно, что каждая из функций $u_i(x,t)$, $i=1,\dots,n$, может терпеть разрывы на характеристиках только из соответствующего множества Q_i.

(2) В силу определения КГР из системы (1.6) нетрудно видеть, что в областях R_j, $j=1,2,\dots$, КГР $U(x,t)$ будет удовлетворять дифференциальной системе (1.1).

§ 2. Линейные задачи

Обратимся к линейной однородной задаче (1.1)–(1.3), т. е. к случаю $F(x,t,U)\equiv 0$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1 [1]. *Пусть $\mathscr{K}(x)\in C^{k+2}[0,1]$, $k\geqslant 0$. Тогда A-регулярность краевых условий (1.2) является достаточным условием того, чтобы для любых матрицы $\mathscr{A}(x)\in C^{k+2}[0,1]$ и функции $U_0(x)\in C^1[0,1]$ соответствующая задача (1.1)–(1.3) повышала гладкость* КГР *до k-го порядка.*

Теорема 2.2 [2]. *Пусть $\mathscr{A}(x)$, $\mathscr{K}(x)\in C^{k+2}[0,1]$, $k\geqslant 0$. Тогда B-регулярность краевых условий (1.2) является необходимым и достаточным условием того, чтобы для любой функции $U_0(x)\in C^1[0,1]$ соответствующая задача (1.1)–(1.3) повышала гладкость* КГР *до k-го порядка.*

Эти результаты нетрудно обобщить на случай неоднородной линейной задачи (1.1)–(1.3), т. е. на случай $F(x,t,U)\equiv\mathscr{F}(x,t)$.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathscr{K}(x)\in C^{k+2}[0,1]$, $k\geqslant 0$, и краевые условия (1.2) A-регулярны. Тогда рассматриваемая задача будет повышать гладкость* КГР *$U(x,t)$ до k-го порядка, если $\mathscr{A}(x)\in C^{k+2}[0,1]$, $\mathscr{F}(x,t)\in C^{k+2}[\Pi]$, $U_0(x)\in C^1[0,1]$.*

Доказательство. Согласно условиям данной теоремы из теоремы 1.1 следует существование КГР $U(x,t)$ рассматриваемой неоднородной задачи. Нетрудно видеть, что $U(x,t)=U_1+U_2$, где $U_1(x,t)$ — КГР однородной задачи ($F\equiv 0$), а $U_2(x,t)$ — КГР линейной неоднородной задачи (1.1)–(1.3) с нулевыми начальными данными. Из работы [1] следует существование числа $T(k)$ такого, что при $t>T(k)$ для $U_1(x,t)$ верна оценка (1.4), где $\mathscr{F}(x,t)\equiv 0$.

Для исследования функции $U_2(x,t)$ рассмотрим в полуполосе Π вспомогательную задачу

$$W_t+L_{\mathscr{A}}W=0,\quad I_0W(0,t,s)+I_1W(1,t,s)=0,\quad W(x,t,s)|_{t=0}=\mathscr{F}(x,s).$$

Поскольку по предположению выполнены условия теоремы 2.1, для каждого $s\geqslant 0$ эта задача имеет КГР $W(x,t,s)$, которое согласно [1] удовлетворяет оценке

$$\left\|\mathscr{D}_{x,t}^{\alpha,\beta}W(x,t,s)\right\|_{C[0,1]}\leqslant K\,e^{At}\|\mathscr{F}(x,s)\|_{C[0,1]},\quad t>T(k),\tag{2.1}$$

где $\alpha+\beta\leqslant k$. Здесь K, A не зависят от t, s, $\mathscr{F}(x,s)$.

Очевидно, что функция $W(x,t,s)$ при каждом $s \geqslant 0$ принадлежит множеству $R^1(\Pi)$ и для любой точки $(x,t) \in R_j$, $j = 1,2,\ldots$, является непрерывной по s функцией. Но тогда

$$\int_0^t W(x,t-s,s)\,ds \tag{2.2}$$

является непрерывной функцией в Π и имеет разрывы у производных по x и t на тех кривых, на которых терпит разрыв сама функция $W(x,t,s)$ при фиксированном s. Поэтому функция (2.2) принадлежит множеству $R^1(\Pi)$. Непосредственно проверяется, что функция (2.2) удовлетворяет интегральной системе, соответствующей линейной неоднородной задаче (1.1)–(1.3) с $U_0(x) = 0$, т. е. является ее непрерывным решением. Из (2.1), (2.2) получаем, что при $t > T(k)$

$$\left\|\mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{x,t} U_2(x,t)\right\|_{C[0,1]} \leqslant K(t)\|\mathscr{F}(x,t)\|_{C^k([0,1]\times[0,t])}.$$

Суммируя оценки для функций $U_1(x,t)$, $U_2(x,t)$, мы завершаем доказательство теоремы.

Теорема 2.4. *Пусть $\mathscr{A}(x), \mathscr{K}(x) \in C^{k+2}[0,1]$, $k \geqslant 0$. Тогда B-регулярность краевых условий (1.2) является необходимым и достаточным условием того, чтобы рассматриваемая неоднородная задача повышала гладкость* КГР *до k-го порядка, если $\mathscr{F}(x,t) \in C^{k+2}(\Pi)$, $U_0(x) \in C^1[0,1]$.*

Доказательство теоремы 2.4 основано на использовании критерия повышения гладкости решений однородной линейной гиперболической системы, доказанного в [2]. Выкладки, лишь незначительно отличающиеся от приведенных выше, опущены для сокращения объема работы.

Повышение гладкости решений характерно не только для линейных гиперболических систем с некратными характеристиками. Однако в общем случае не удается получить аналога B-регулярных краевых условий в виде конечного числа алгебраических соотношений между элементами матриц I_0, I_1, $\mathscr{K}(x)$, $\mathscr{A}(x)$.

Итак, пусть первые l диагональных элементов матрицы $\mathscr{K}(x)$ совпадают между собой, т. е. $k_1(x) = \cdots = k_l(x)$, $l < p$. Рассмотрим матрицу

$$\mathscr{A}_{\mathscr{K}}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1l}(x) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1}(x) & \ldots & a_{ll}(x) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{l+1,l+1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

и однородную задачу (1.1)–(1.3), соответствующую матрицам $\mathscr{K}(x)$, $\mathscr{A}(x)$.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathscr{K}(x)$, $\mathscr{A}(x) \in C^{k+2}[0,1]$, $k \geqslant 0$. Тогда необходимыми и достаточными условиями того, чтобы рассматриваемая* *задача повышала гладкость решений до k-го порядка, являются такие краевые условия* (1.2), *при которых по любым начальным данным* $U_0(x) \in C^1[0,1]$ *решение задачи*

$$\begin{gathered} U_t + L_{\mathscr{A}\mathscr{K}} U = 0, \quad (x,t) \in \Pi, \\ I_0 U(0,t) + I_1 U(1,t) = 0, \\ U(x,t)|_{t=0} = U_0(x) \end{gathered} \tag{2.3}$$

стабилизируется к нулю за конечное время.

Доказательство теоремы 2.5 проводится аналогично доказательству теоремы 2 работы [2]. Ограничимся указанием основных идей, лежащих в его основе. Применим к системе (1.1)–(1.3) преобразование Лапласа. Тогда для функции

$$\widetilde{U}(x,\lambda) = \int_0^\infty U(x,t) e^{-\lambda t}\, dt$$

получим следующую краевую задачу с параметром λ:

$$\lambda\widetilde{U} + L_{\mathscr{A}}\widetilde{U} = U_0(x), \quad I_0\widetilde{U}(0,\lambda) + I_1\widetilde{U}(1,\lambda) = 0.$$

Следуя [2], функцию Грина $G(x,\xi,\lambda)$ этой задачи в ее области аналитичности можно представить в виде

$$G(x,\xi,\lambda) = G_0(x,\xi,\lambda) + \sum_{l=1}^{k+1} \frac{G_l(x,\xi,\lambda)}{\lambda^l}. \tag{2.4}$$

В этом представлении $G_0(x,\xi,\lambda)$ есть функция Грина задачи

$$\lambda\widetilde{U} + L_{\mathscr{A}_k}\widetilde{U} = U_0(x), \quad I_0\widetilde{U}(0,\lambda) + I_1\widetilde{U}(1,\lambda) = 0.$$

Как показано в работе [2], для изучения свойств гладкости решения исходной задачи достаточно ограничиться анализом свойств функции $G_0(x,\xi,\lambda)$. Возможны две ситуации. Если $G_0(x,\xi,\lambda)$ — мероморфная функция по λ, то разрывы в начальных данных для КГР однородных задач (1.1)–(1.3) и (2.3) будут распространяться по бесконечному числу характеристик. Если $G_0(x,\xi,\lambda)$ — целая по λ функция экспоненциального типа, то ввиду свойств преобразования Лапласа существует такая константа $T > 0$, что любое КГР задачи (2.3) становится равным нулю при $t > T$, а соответствующая задача (1.1)–(1.3) будет повышать гладкость любого КГР до порядка k.

Выкладки, связанные с представлением функции Грина в виде (2.4) и анализом свойств функции $G_0(x,\xi,\lambda)$, лишь незначительно отличаются от проведенных в работе [2] и поэтому здесь не приводятся.

§ 3. Нелинейные системы

Рассмотрим нелинейную задачу (1.1)–(1.3) специального вида

$$\begin{gathered} U_t + \mathscr{K}(x) U_x = F(x,t,U), \quad (x,t) \in \Pi, \\ u_i(0,t) = \alpha_i u_n(0,t), \quad i = 1,\dots,n-1, \\ u_n(1,t) = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i u_i(1,t), \quad U|_{t=0} = U_0(x), \end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$$\mathscr{K}(x) = \begin{pmatrix} k_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_1(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_1(x) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & k_2(x) \end{pmatrix},$$

причем $k_1(x) > 0$, $k_2(x) < 0$.

Предположим, что данная задача имеет непрерывное решение.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathscr{K}(x)$, $F(x,t,U)$ являются k раз непрерывно дифференцируемыми функциями по всем переменным, $k \geqslant 1$. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ или $\beta_1 = \dots = \beta_{n-1} = 0$, то задача (3.1) повышает гладкость непрерывных решений до порядка k.*

Доказательство. Гиперболическая система (3.1) задает семейства характеристик $x = \varphi_i(t; x_0, t_0)$, $i = 1, 2$ (см. § 1). Сделаем построения, аналогичные проведенным в § 1. Выделим два семейства Q_i, $i = 1, 2$, состоящие из построенных характеристик q_i^j, $j = 1, 2, \dots$.

Введем в рассмотрение две независимые характеристические переменные

$$\xi = t - \int_0^x \frac{d\tau}{k_1(\tau)}, \qquad \eta = t - \int_0^x \frac{d\tau}{k_2(\tau)}.$$

Перейдем в задаче (3.1) от переменных x, t к переменным ξ, η. При этом отображении полуполоса Π взаимно однозначно перейдет в наклонную полуполосу $\Pi_{\xi\eta}$ с криволинейным основанием, которое является образом отрезка $(x, 0)$, $x \in [0, 1]$, и имеет неявное уравнение вида $f(\xi, \eta) = 0$. Отметим, что в рассматриваемом случае полуполоса $\Pi_{\xi\eta}$ имеет наклон $\pi/4$. Образ стороны $x = 0$ полуполосы Π в новых переменных обозначим через $\eta = \eta^0(\xi)$, а образ стороны $x = 1$ — через $\xi = \xi^1(\eta)$. В этих переменных характеристики q_1^j примут вид $\xi = \xi_j$, а характеристики q_2^j — вид $\eta = \eta_j$, $j = 1, 2, \dots$.

За всеми коэффициентами и искомыми функциями задачи (3.1) в новых переменных ξ, η сохраним прежние обозначения. Введем новые обозначения:

$$V = [u_1, \dots, u_{n-1}]^T, \qquad v = u_n,$$

$$G = \left[\frac{k_2}{k_2 - k_1} f_1, \dots, \frac{k_2}{k_2 - k_1} f_{n-1}\right]^T, \qquad g = \frac{-k_1}{k_2 - k_1} f_n.$$

Тогда задачу (3.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = G(V, v, \xi, \eta), \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi} = g(V, v, \xi, \eta),$$

$$u_i|_{\eta=\eta^0(\xi)} = \alpha_i v(\xi, \eta^0(\xi)), \qquad v|_{\xi=\xi^1(\eta)} = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i u_i(\xi^1(\eta), \eta), \tag{3.2}$$

$$V|_{f(\xi,\eta)=0} = V_0(\xi, \eta), \qquad v|_{f(\xi,\eta)=0} = v_0(\xi, \eta).$$

Пусть (V, v) — непрерывное решение задачи (3.2).

Рассмотрим случай $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Положим $G_1(V, \xi, \eta) = G(V, v(\xi, \eta), \xi, \eta)$ и исследуем следующую задачу Коши относительно вектор-функции $V(\xi, \eta)$ при $\xi > \xi_1$, считая ξ параметром:

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = G_1(V, \xi, \eta), \qquad V|_{\eta=\eta^0(\xi)} = 0. \tag{3.3}$$

Так как
$$\frac{\partial G_1}{\partial \xi}(V,\xi,\eta) = \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \xi},$$
то в силу гладкости правых частей системы (3.2) и непрерывности $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ правая часть уравнения (3.3) и начальные данные непрерывно дифференцируемы по параметру ξ. В силу теоремы о дифференцируемости по параметру $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ будет непрерывной функцией при $\xi > \xi_1$. Отсюда и из (3.3) вытекает, что $V(\xi,\eta)$ непрерывно дифференцируема в $\Pi_{\xi\eta}$ при $\xi > \xi_1$.

Пусть теперь $\eta > \eta_2$. Полагая $g_1(v,\xi,\eta) = g(V(\xi,\eta),v,\xi,\eta)$, для функции $v(\xi,\eta)$ рассмотрим следующую задачу Коши:
$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = g_1(v,\xi,\eta), \quad v|_{\xi=\xi^1(\eta)} = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i u_i(\xi^1(\eta),\eta). \tag{3.4}$$
Будем считать здесь ξ переменной, а η параметром. Справедливо соотношение
$$\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\bigg|_{\xi=\xi^1(\eta)} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \eta} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi}\frac{d\xi^1(\eta)}{d\eta}\right)\right)\bigg|_{\xi=\xi^1(\eta)}.$$

В силу гладкости данных задачи и полученной гладкости функции $V(\xi,\eta)$ при $\xi > \xi_1$, из теоремы о непрерывной дифференцируемости по параметру следует, что $v(\xi,\eta)$ непрерывно дифференцируема в $\Pi_{\xi\eta}$ при $\eta > \eta_2$.

Итак, решение задачи (3.2) непрерывно дифференцируемо в $\Pi_{\xi\eta}$ при $\xi > \xi_1$, $\eta > \eta_2$.

Обратимся к уравнению (3.3) в области $\Pi_{\xi\eta}$ при $\xi > \xi_3$. Так как решение задачи является гладким в рассматриваемой области, то из уравнения для функции $V(\xi,\eta)$ вытекает, что $\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \xi}$ непрерывны в этой области. Чтобы доказать непрерывность $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}$, обратимся к теореме о непрерывной дифференцируемости по параметру. Имеем
$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2}(V,\xi,\eta) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \xi}\right).$$

При $\xi > \xi_3$ из первого равенства (3.4) следует, что $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}$ — непрерывная функция, поэтому в области $\Pi_{\xi\eta}$ при $\xi > \xi_3$ правые части и начальные данные задачи (3.3) дважды непрерывно дифференцируемы по параметру. Следовательно, в рассматриваемой области функция $V(\xi,\eta)$ дважды непрерывно дифференцируема по ξ. Пусть $\eta > \eta_4$, тогда
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}(\xi,\eta)\bigg|_{\xi=\xi^1(\eta)} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\beta_i \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \eta} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi}\frac{d\xi^1(\eta)}{d\eta}\right)\right)\bigg|_{\xi=\xi^1(\eta)}.$$

Отсюда видно, что начальные данные уравнения (3.4) дважды непрерывно дифференцируемы по η. Так как функция $g_1(v,\xi,\eta)$ в данной области также дважды дифференцируема по η, то этим же свойством обладает и функция $v(\xi,\eta)$. Итак, при $\eta > \eta_4$, $\xi > \xi_3$ решение задачи (3.2) дважды непрерывно дифференцируемо. Рассуждая подобным образом, мы покажем справедливость теоремы в рассматриваемом случае для любого k.

Пусть $\beta_i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Доказательство теоремы проводится аналогичным приемом, только вначале показывается повышение гладкости у функции $v(\xi, \eta)$, а затем у $V(\xi, \eta)$.

Вернемся от переменных ξ, η к переменным x, t. В силу гладкости замены утверждение о том, что решение задачи (3.2) при $\eta > \eta_{2k}$, $\xi > \xi_{2k-1}$ является k раз непрерывно дифференцируемым по ξ, η, означает наличие константы $T(k)$, существование которой утверждается в теореме.

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Если $F(x,t,U) = \mathscr{A}(x,t)U + \mathscr{F}(x,t)$ и все производные до k-го порядка элементов матрицы $\mathscr{A}(x,t)$ равномерно ограничены в полуполосе* Π, *то при выполнении условий теоремы* 3.1 *верны оценки*

$$\|U(x,t)\|_{C^k([0,1]\times[T(k),t])} \leqslant A(\|U(x,t)\|_{C([0,1]\times[0,t])} + \|\mathscr{F}(x,t)\|_{C^k([0,1]\times[0,t])}), \quad t > T(k), \tag{3.5}$$

$$\|U(x,t)\|_{C[0,1]} \leqslant Ke^{At}(\|U_0(x)\|_{C[0,1]} + \|\mathscr{F}(x,t)\|_{C([0,1]\times[0,t])}), \quad t \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Здесь константы A, K не зависят от t.

Доказательство. Оценка (3.6) получается из интегральной системы, соответствующей данной задаче, с помощью леммы Гронуолла. В случае системы с некратными характеристиками получение такой оценки подробно рассмотрено в работе [4].

Введем обозначения:

$$|V| = \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} \|u_i(x,t)\|_{C([0,1]\times[0,t])}, \qquad |v| = \|u_n(x,t)\|_{C([0,1]\times[0,t])},$$

$$|\mathscr{F}|_C = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|f_i(x,t)\|_{C([0,1]\times[0,t])}, \qquad |\mathscr{F}|_{C^1} = \max \|f_i(x,t)\|_{C^1([0,1]\times[0,t])},$$

$$|U| = \max(|V|, |v|).$$

Буквами K, A будем обозначать константы, не зависящие от t.

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, перейдем в задаче (3.1) к характеристическим переменным ξ, η и все величины, зависящие от x, t, в новых переменных будем обозначать прежними буквами.

В силу системы 3.2 при $t > 0$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial V(x,t)}{\partial \eta}\right| \leqslant K(|U|_C + |\mathscr{F}|_C), \qquad \left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial \xi}\right| \leqslant K(|U|_C + |\mathscr{F}|_C). \tag{3.7}$$

Докажем, что при $t > T(1)$ верны неравенства

$$\left|\frac{\partial V}{\partial \xi}\right| \leqslant K(|U|_C + |\mathscr{F}|_{C^1}), \qquad \left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right| \leqslant K(|U|_C + |\mathscr{F}|_{C^1}), \tag{3.8}$$

которые в силу соотношений

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

будут доказывать неравенство (3.5) при $k = 1$.

Пусть $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Из системы (3.2) имеем, что в каждой точке $(\xi, \eta) \in \Pi_{\xi\eta}$ справедливы соотношения

$$u_i(\xi,\eta) = \int\limits_{\eta^0(\xi)}^{\eta} \left(\frac{k_2}{k_2 - k_1}\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}u_j + a_{in}v + f_i\right)\right)(\xi,\tau)\,d\tau, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$v(\xi,\eta) = \int\limits_{\xi^1(\eta)}^{\xi} \left(-\frac{k_1}{k_2 - k_1}\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}u_j + a_{nn}v + f_n\right)\right)(\tau,\eta)\,d\tau + \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i u_i(\xi^1(\eta),\eta). \tag{3.9}$$

Ранее было доказано, что при $t > T(1)$ решение (V, v) становится непрерывно дифференцируемым, но тогда из (3.9) получаем

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi}(\xi,\eta) = \int\limits_{\eta^0(\xi)}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{k_2}{k_2-k_1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}u_j + a_{in}v + f_i\right) \right.$$
$$\left. + \frac{k_2}{k_2-k_1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}(a_{ij\xi}u_j + a_{ij}u_{j\xi}) + a_{in\xi}v + a_{in}v_\xi + f_{i\xi}\right)\right)(\xi,\tau)\,d\tau$$
$$- \frac{d\eta^0(\xi)}{d\xi}\left(\frac{k_2}{k_2-k_1}\sum_{j=1}^{n-1}(a_{ij}u_j + a_{in}v + f_i)\right)\Bigg|_{\eta=\eta^0(\xi)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Используя второе из неравенств (3.7), приходим к оценке

$$\left|\frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi,\eta)\right| \leqslant A\int\limits_{\eta^0(\xi)}^{\eta}\left|\frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi,\tau)\right| d\tau + K(|U|_C + |\mathscr{F}|_{C^1}).$$

Применим к этому неравенству лемму Гронуолла. Используя тот факт, что $|\eta - \eta^0(\xi)| \leqslant L$ для любой точки $(x,t) \in \Pi$, где L — максимальная из длин характеристик q_1^j, q_2^j, мы и получим первое неравенство (3.8). Продифференцируем второе соотношение (3.9) по η и к функциям $\frac{\partial V}{\partial \xi}$, $\frac{\partial V}{\partial \eta}$ применим полученную оценку и оценку (3.7). Используя лемму Гронуолла и неравенство $|\xi - \xi^1(\eta)| \leqslant L$, мы установимим вторую оценку из (3.8).

В случае $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, применим аналогичные рассуждения сначала к функции $\frac{\partial v}{\partial \eta}$, а затем к $\frac{\partial V}{\partial \xi}$.

Итак, при $t > T(1)$ верна оценка (3.5) при $k = 1$. Из этого факта нетрудно установить наличие нужной оценки в случае произвольного k, указанного в условиях теоремы 3.1.

Пусть $k = 2$. Продифференцируем линейную неоднородную систему (1.1) по переменной t и рассмотрим новую задачу относительно функции $Z(x,t)$:

$$Z_t + \mathscr{K}(x)Z_x = \mathscr{A}Z + (\mathscr{A}_tU + \mathscr{F}_t(x,t)),$$
$$z_i(0,t) = \alpha_i z_n(0,t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$
$$z_n(1,t) = \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i z_i(1,t),$$
$$Z|_{t=T(1)} = -\mathscr{K}(x)U_x + \mathscr{A}(x,t)U + \mathscr{F}(x,t)|_{t=T(1)}.$$

В силу оценки (3.6) решение $Z(x,t)$ данной задачи единственно и совпадает с функцией $U_t(x,t)$. Проведя предыдущие рассуждения для непрерывной функции $Z(x,t)$, при $t > T(2)$ придем к неравенству

$$\|Z\|_{C^1([0,1]\times[T(2),t])} \leqslant A(\|Z\|_{C([0,1]\times[T(1),t])} + \|\mathscr{A}_tU + \mathscr{F}_t\|_{C^1([0,1]\times[T(1),t])}).$$

Но тогда из соотношения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x} + \frac{d\mathscr{K}}{dx}\frac{\partial U}{\partial x} + \mathscr{K}(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x}U + \mathscr{A}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x}$$

мы и получаем оценку (3.5) для $k = 2$.

Рассуждая аналогичным образом в случае произвольного k, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 3.3. *Пусть задача* (3.1) *автономна, т. е.* $F(x,t,U) \equiv F(x,U)$ *и* $U(x,t)$ *— ее непрерывное решение, ограниченное при* $t \geqslant 0$:

$$|U(x,t)|_{C(0,1)} \leqslant A. \tag{3.10}$$

Тогда при выполнении условий теоремы 3.1 *справедливы оценки*

$$|U(x,t)|_{C^K([0,1]\times[T(k),t])} \leqslant A_k, \quad t > T(k), \tag{3.11}$$

где A_k *не зависят от* t *при* A, *не зависящей от* t.

Доказательство. Будем придерживаться обозначений, используемых при доказательстве теоремы 3.1. Согласно этой теореме решение $U = (V, v)$ задачи (3.1) будет k раз непрерывно дифференцируемым при $t > T(k)$.

Пусть $k = 1$. Из системы (3.2) вытекает, что

$$\left|\frac{\partial V}{\partial \eta}\right| \leqslant K, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial \xi}\right| \leqslant K, \quad t \geqslant 0. \tag{3.12}$$

Переходя к эквивалентной (3.1) системе интегральных уравнений и действуя по аналогии с доказательством теоремы 3.2, нетрудно убедиться, что из оценки (3.10) при $t > T(1)$ вытекает ограниченность производных $\left|\frac{\partial V}{\partial \xi}\right|$, $\left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|$, а это вместе с (3.12) и означает справедливость утверждения теоремы для данного k.

Действительно, пусть $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. Из (3.2) при $t > T(1)$ получим

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \int\limits_{\xi^1(\eta)}^{\xi} \frac{dg}{d\eta}(V, v, \tau, \eta)d\tau - \left.\frac{d\xi^1(\eta)g(V, v, \xi, \eta)}{d\eta}\right|_{\xi=\xi^1(\eta)}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим подробнее подынтегральную функцию (3.13):

$$\frac{dg}{d\eta}(V, v, \xi, \eta) = \frac{\partial g}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial g}{\partial \eta}.$$

Поскольку (см. доказательство теоремы 3.1) $g = \left(\frac{-k_2}{k_2-k_1} \cdot f_n\right)$ не зависит явно от t, то справедлива формула

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-k_2}{k_2 - k_1} f_n\right)\frac{\partial x}{\partial \eta},$$

т. е. согласно (3.10) величины $\frac{\partial g}{\partial V}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$, $\frac{\partial g}{\partial \eta}$, ограничены. Поэтому из (3.13) в силу леммы Гронуолла (см. (3.12)) вытекает, что

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi, \eta)\right| \leqslant K \int\limits_{\xi^1(\eta)}^{\xi} \left|\frac{\partial v}{\partial \eta}(\tau, \eta)\right| d\tau + A.$$

Тогда в силу леммы Гронуолла имеем

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi, \eta)\right| \leqslant Ae^{K|\xi - \xi^1(\eta)|} \leqslant A_1.$$

Аналогично из (3.2) выводится ограниченность $\frac{\partial V}{\partial \xi}$. В случае $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, применяются подобные рассуждения сначала относительно $\frac{\partial V}{\partial \xi}$, а затем относительно $\frac{\partial v}{\partial \eta}$. Вместе эти оценки составляют неравенство (3.11) при $k = 1$.

Переходя к случаю $k = 2$, рассмотрим задачу

$$Z_t + \mathscr{K}(x)Z_x = \mathscr{A}_1(x,t)Z,$$
$$I_0Z(0,t) + I_1Z(1,t) = 0,$$
$$Z(x,t)|_{t=T(1)} = -\mathscr{K}U_x + F(x,U)|_{t=T(1)},$$

где $\mathscr{A}_1 = \frac{\partial F}{\partial U}(x,U)$. По доказанному выше функция $\mathscr{A}_1(x,t)$ равномерно ограничена вместе со своими первыми производными при $t > T(1)$. По теореме единственности решения линейной задачи $Z(x,t) = U_t(x,t)$ и согласно теореме 3.2 справедлива оценка

$$\|U_t(x,t)\|_{C^1([0,1]\times[T(2),t])} \leqslant K\|U_t\|_{C([0,1]\times[T(1),t])},$$

т. е. величины U_{tt}, U_{xt} ограничены. Ограниченность U_{xx} легко получается после дифференцирования системы (3.1) по x.

Аналогично после дифференцирования системы (3.1) нужное количество раз с учетом теоремы 3.2 и уже доказанной ограниченности производных решения меньших порядков устанавливается справедливость оценки (3.11) при произвольном k.

§ 4. Устойчивость и повышение гладкости решений некоторых систем, возникающих в приложениях

При математическом моделировании химических процессов, в частности при описании тепло- и массопереноса в рамках двухфазной модели псевдоожиженного (кипящего) слоя, возникают системы гиперболических уравнений [11]. Так, при исследовании каталитического процесса в химическом реакторе с учетом внутреннего теплообмена при протекании реакции нулевого порядка (скорость реакции не зависит от количества реагирующего вещества) возникает следующая система [3] двух уравнений:

$$\beta\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial\xi} = KQe^{\theta} - \gamma(\theta - \theta_x), \qquad \frac{\partial\theta_x}{\partial t} - \frac{\partial\theta_x}{\partial\xi} = \gamma(\theta - \theta_x),$$
$$\theta_x|_{\xi=0} = \theta|_{\xi=0}, \qquad \theta_x|_{\xi=1} = \theta_0. \tag{4.1}$$

Здесь θ — температура в реакторе, θ_x — температура в холодильнике; γ, K, β, Q — положительные параметры. В случае реакции первого порядка (скорость реакции зависит от количества вещества линейно) имеем систему трех уравнений

$$\begin{gathered}\beta\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial\xi} = KQe^{\theta}(1-C) - \gamma(\theta - \theta_x),\\ \frac{\partial\theta_x}{\partial t} - \frac{\partial\theta_x}{\partial\xi} = \gamma(\theta - \theta_x),\\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial\xi} = K(1-C),\\ \theta_x|_{\xi=0} = \theta|_{\xi=0}, \quad C|_{\xi=0} = 0, \quad \theta_x|_{\xi=1} = \theta_0,\end{gathered} \tag{4.2}$$

где C — количество реагирующего вещества. В работе [3] доказано, что при определенном наборе параметров эти задачи имеют стационарные решения. Линеаризуем эти задачи в окрестности их стационарных решений, отбрасывая члены квадратичной малости. Линейную однородную задачу, полученную из системы (4.1), будем называть задачей 1, а полученную из системы (4.2) — задачей 2.

В обозначениях § 1 в случае задачи 1 матрицы краевых условий для вектора $U = (\theta, \theta_x)$ имеют вид

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

а в случае задачи 2 для вектора $U = (\theta, C, \theta_x)$ — вид

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Определитель (1.5) матрицы $S = I_0 + I_1$ в обоих случаях имеет вид

$$\det S = 1,$$

т. е. при $\beta \neq 1$ краевые условия в задачах 1 и 2 являются A-регулярными. Поэтому для задач 1, 2 справедливы утверждения теорем 2.1, 2.3 о повышении гладкости решений. Если же $\beta = 1$, то для задачи 2 справедливы теоремы 3.1–3.3.

В случае произвольных граничных условий (1.2) для систем двух и трех уравнений определитель (1.5) имеет вид

$$\det S = 1 - \alpha_{12}\beta_{21} \quad \text{при} \quad n = 1,$$
$$\det S = 1 - \alpha_{13}\beta_{31} - \alpha_{23}\beta_{32} \quad \text{при} \quad n = 3, \ p = 2,$$

откуда легко определить A-регулярность краевых условий.

Выпишем определитель матрицы S_1, введенной в § 1, в случае произвольных α_{ij}, β_{ji} для $n = 2$:

$$\det S_1 = \exp\left(-\lambda \int_0^1 \frac{d\tau}{k_2(\tau)} + \int_0^1 \frac{a_{22}(\tau)}{k_2(\tau)}\, d\tau\right)(1 - \alpha_{12}\beta_{21}e^{\lambda\gamma_1}C_1);$$

и для $n = 3$, $p = 2$:

$$\det S_1 = \exp\left(-\lambda \int_0^1 \frac{d\tau}{k_3(\tau)} + \int_0^1 \frac{a_{33}(\tau)}{k_3(\tau)}\, d\tau\right)(1 - \alpha_{13}\beta_{31}e^{\lambda\gamma_2}C_2 - \alpha_{23}\beta_{32}C_3e^{\lambda\gamma_3}).$$

Здесь мы использовали обозначения

$$\gamma_1 = \int_0^1 \frac{d\tau}{k_2(\tau)} - \int_0^1 \frac{d\tau}{k_1(\tau)}, \quad C_1 = \exp\left(\int_0^1 \left(\frac{a_{11}(\tau)}{k_1(\tau)} - \frac{a_{22}(\tau)}{k_2(\tau)}\right) d\tau\right);$$
$$\gamma_2 = \int_0^1 \frac{d\tau}{k_3(\tau)} - \int_0^1 \frac{d\tau}{k_1(\tau)}, \quad C_2 = \exp\left(\int_0^1 \left(\frac{a_{11}(\tau)}{k_1(\tau)} - \frac{a_{33}(\tau)}{k_3(\tau)}\right) d\tau\right);$$
$$\gamma_3 = \int_0^1 \frac{d\tau}{k_3(\tau)} - \int_0^1 \frac{d\tau}{k_2(\tau)}, \quad C_3 = \exp\left(\int_0^1 \left(\frac{a_{22}(\tau)}{k_2(\tau)} - \frac{a_{33}(\tau)}{k_3(\tau)}\right) d\tau\right).$$

Таким образом, вид A- и B-регулярных условий в случае $n = 2$ совпадает, а в случае $n = 3$ они, вообще говоря, разные.

Положим $\beta = 1$, тогда у задачи (4.2) возникают кратные характеристики с положительным наклоном.

Пусть $\theta^a = \theta - \theta_0$, $\theta^b = \theta_x - \theta_0$. Вектор (θ^a, θ^b) будет решением системы

$$\begin{gathered}\frac{\partial\theta^a}{\partial t} + \frac{\partial\theta^a}{\partial\xi} = KQe^{\theta_0}e^{\theta^a} - \gamma(\theta^a - \theta^b),\\ \frac{\partial\theta^b}{\partial t} - \frac{\partial\theta^b}{\partial\xi} = \gamma(\theta^a - \theta^b),\end{gathered}\tag{4.5}$$

а вектор (θ^a, C, θ^b) — системы

$$\begin{gathered}\frac{\partial\theta^a}{\partial t} + \frac{\partial\theta^a}{\partial\xi} = KQe^{\theta_0}e^{\theta^a}(1 - C) - \gamma(\theta^a - \theta^b),\\ \frac{\partial\theta^b}{\partial t} - \frac{\partial\theta^b}{\partial\xi} = \gamma(\theta^a - \theta^b), \qquad \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial\xi} = K(1 - C),\end{gathered}\tag{4.6}$$

с краевыми условиями вида (1.2), где матрицы I_j имеют соответственно вид (4.3) и (4.4).

Уравнения систем (4.5), (4.6) имеют аналитические правые части, а матрицы (4.3), (4.4) удовлетворяют условиям теоремы 3.1. Поэтому из теоремы 3.1 вытекает, что всякое непрерывное решение задач (4.1), (4.2) при $\beta = 1$ будет повышать гладкость, т. е. для любого k найдется такое $T(k) > 0$, что решение становится k раз непрерывно дифференцируемым при $t > T(k)$.

Введем следующие обозначения: $U_1(x,t)$ — решение задачи (4.1), $U_1^s(x) \in C^k[0,1]$ — ее устойчивое стационарное решение, соответственно $U_2(x,t)$ и $U_2^s(x) \in C^k[0,1]$ — решение и устойчивое стационарное решение задачи (4.2).

В силу отмеченного выше свойства повышения гладкости функций $U_i(x,t)$ из теоремы 3.3 следует

Теорема 4.1. *Для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$, $T(k) > 0$, что из неравенства*

$$\|U_1(x,0) - U_1^s(x)\|_{C[0,1]} \leqslant \delta \quad \left(\left\|U_2(x,0) - U_2^s(x)\right\|_{C[0,1]} \leqslant \delta\right)$$

для $t > T(k)$ вытекает оценка

$$\|U_1(x,t) - U_1^s(x)\|_{C^k[0,1]} \leqslant \varepsilon \quad \left(\left\|U_2(x,t) - U_2^s(x)\right\|_{C^k[0,1]} \leqslant \varepsilon\right).$$

В заключение авторы хотели бы выразить искреннюю признательность за постоянное внимание к работе Т. И. Зеленяку, который является также инициатором ее написания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Елтышева Н. А.* К вопросу об устойчивости стационарных решений некоторых гиперболических систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 30–32.
2. *Елтышева Н. А.* О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. 1988. Т. 135, № 2. С. 186–209.
3. *Зеленяк Т. И.* О стационарных решениях смешанных задач, возникающих при изучении некоторых химических процессов // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 2. С. 205–213.
4. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 4. С. 423–442.
5. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* О смешанной задаче для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т. 20, № 3. С. 87–104.
6. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

7. *Rauch J., Reed M.* Jump discontinuities of semilinear, strictly hyperbolic systems in two variables: creation and propagation // Comm. Math. Phys. 1981. V. 81, N 2. P. 203–227.
8. *Rauch J., Reed M.* Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension // Duke Math. J. 1982. V. 49, N 2. P. 397–475.
9. *Oberguggenberger M.* Propagation of singularities for semilinear hyperbolic initial-boundary value problems in one space dimension // J. Differential Equations. 1986. V. 61, N 1. P. 1–39.
10. *Брушлинский К. В.* О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 6. С. 893–912.
11. *Шеплев В. С., Мещеряков В. Д.* Математическое моделирование реакторов с кипящим слоем катализатора // Математическое моделирование химических реакторов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 44–65.

г. Новосибирск *Статья поступила 5 сентября 1995 г.*