УДК 512.625.5+517.984.46

© 1992 В. С. ВЛАДИМИРОВ

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ p-АДИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ШРЁДИНГЕРА

Рассмотрены спектральные задачи для p-адических псевдодифференциальных операторов типа Шрёдингера для открыто-замкнутых множеств (ограниченных или нет) пространства Q_p^n с потенциалом, стремящимся $+\infty$ на бесконечности. Доказаны некоторые теоремы обращения. Излагается способ построения всех собственных функций и собственных значений для M-инвариантных символов и даётся его обоснование.

§ 1. Введение

Пусть Q_p — поле p-адических чисел и dx — инвариантная мера Хаара на нем, нормированная условием

$$\int\limits_{|x|_p\leq 1} dx = 1;$$

p — простое число, $p=2, 3, 5, \ldots$ (По поводу обозначений и терминологии см. [1—6].)

Для точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $Q_p^n=Q_p\times Q_p\times\ldots\times Q_p$ вводится норма $\|x\|_p=\max(|x_1|_p, |x_2|_p, \ldots, |x_n|_p)$. Пусть G — открыто-замкнутое множество (ограниченное или нет) пространства Q_p^n. Через $\mathscr{L}^2(G)$ обозначаем множество функций из $\mathscr{L}^2=\mathscr{L}^2(Q_p^n;\ dx)$ с носителем в G; здесь мера $dx=dx_1dx_2\ldots dx_n$.

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор A в G вида (см. [1])

$$(A\psi)(x)=(a*\psi)(x)+V(x)\psi(x)=\int\limits_{Q_p^n}[\tilde{a}(\xi)+V(x)]\tilde{\psi}(\xi)\chi_p(-(\xi,\ x))\,d\xi \tag{1.1}$$

с символом

$$\tilde{a}(\xi)+V(x),\quad \xi\in Q_p^n,\quad x\in G; \tag{1.2}$$

здесь $\tilde{a}(\xi)$ — преобразование Фурье (обобщенной) функции $a(x)$, χ_p — стандартный характер поля Q_p, $(\xi,\ x)=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\ldots+\xi_nx_n$.

Относительно символа (1.2) предполагаем на протяжении всей статьи, что функции $\tilde{a}(\xi)$ и $V(x)$ вещественные ограниченные снизу (почти везде) и локально интегрируемые в Q_p^n и G соответственно. Без ограничения общности, при изучении спектральных свойств оператора A, можно считать, что $\tilde{a}(\xi)\geq 0$, $\xi\in Q_p^n$ и $V(x)\geq 1$, $x\in G$ (почти везде).

К области определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A отнесем те функции ψ из $\mathcal{L}^2(G)$, для которых $\tilde{a}\tilde{\psi}\in\mathcal{L}^2$ и $V\psi\in\mathcal{L}^2(G)$.

Оператору A сопоставим замкнутую положительную квадратичную форму

$$A(\psi, \psi)=\int\limits_{Q_p^n}\tilde{a}(\xi)|\tilde{\psi}(\xi)|^2d\xi+\int\limits_G V(x)|\psi(x)|^2dx \tag{1.3}$$

с областью определения

$$Q(A)=[\psi\in\mathcal{L}^2(G):\ \sqrt{\tilde{a}}\tilde{\psi}\in\mathcal{L}^2,\ \sqrt{V}\psi\in\mathcal{L}^2(G)].$$

Оператор A положительный,

$$(A\psi, \psi)=A(\psi, \psi)\geqslant\|\psi\|^2,\quad \psi\in\mathcal{D}(A),$$

и допускает (единственное) самосопряженное расширение $\bar{A}$ по Фридрихсу с областью определения $\mathcal{D}(\bar{A})=Q(A)\cap\mathcal{D}(A^*)$.

Обозначим через $\lambda_k(A)$, $k=0, 1, \ldots$, числа, определяемые принципом минимакса (минимакс-числа):

$$\lambda_k(A)=\sup_{\varphi_j\in\mathcal{L}^2(G)}\ \inf_{\substack{(\psi, \varphi_j)=0\\ j=0, 1, \ldots, k-1}}\frac{A(\psi, \psi)}{\|\psi\|^2}. \tag{1.4}$$

В работе [1] доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть*

$$\tilde{a}(\xi)\to+\infty,\ \|\xi\|_p\to\infty\ \text{ и }\ V(x)\to+\infty,\ \|x\|_p\to\infty,\ x\in G. \tag{1.5}$$

Тогда спектр оператора $\bar{A}$ дискретный и состоит из собственных значений $\{\lambda_k,\ k=0, 1, \ldots\}$, $\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\ldots$, конечной кратности, причем $\lambda_k\to+\infty$, $k\to\infty$, а его собственные функции $\{\psi_k,\ k=0, 1, \ldots\}$,

$$\bar{A}\psi_k=\lambda_k\psi_k,\quad \psi_k\in\mathcal{D}(\bar{A}),\quad k=0, 1, \ldots,$$

образуют ортонормальный базис в $\mathcal{L}^2(G)$; при этом $\lambda_k=\lambda_k(A)$, $k=0, 1, \ldots$

Замечание. В случае ограниченного множества G условие $V(x)\to+\infty$, $\|x\|_p\to\infty$, $x\in G$, в (1.5) естественно отсутствует.

В работе [1] были вычислены в явном виде все собственные значения и собственные функции оператора $A=D^\alpha$, $\alpha>0$ (его символ $|\xi|_p^\alpha$), для круга $B_\gamma=[x\in Q_p:\ |x|_p\leqslant p^\gamma]$, для окружности $S_\gamma=[x\in Q_p:\ |x|_p=p^\gamma]$, $\gamma\in\mathbf{Z}=\{0, \pm1, \ldots\}$ и частично для оператора $A=D^\alpha+V(|x|_p)$ типа Шрёдингера в Q_p $(p\neq2)$. Эти вычисления основываются на вычисленных ранее собственных значениях и собственных функциях оператора D^α, $\alpha>0$, в Q_p (см. [4–6]). Ортонормальный базис этих собственных функций приводится в § 2; там же приводится ортонормальный базис собственных функций оператора D^α в круге B_γ и нормированный базис — для этого оператора в окружности S_γ для всех p. В § 3 изучается оператор усреднения M и устанавливается его связь с интегрированием по мере Хаара по M-инвариантным множествам пространства Q_p^n и $q=(1/p)$-интегралами. В § 4 изучается спектральная теория оператора

$A=D^\alpha+V(|x|_p)$, $\alpha>0$, в M-инвариантном открыто-замкнутом множестве G. В § 5 излагается метод построения M-инвариантных собственных функций и собственных значений оператора A для множества G I типа. Дается обоснование метода при условии на потенциал

$$\int_G V^{-2}(|x|_p)\,dx < \infty. \tag{1.6}$$

В § 6 приводятся различные варианты обращения теоремы 1.

Здесь уместно отметить работы [8—9] по спектральной теории оператора $A=D^\alpha+V(x)$. В работе [8] изучается оператор A с произвольным вещественным локально ограниченным в Q_p потенциалом $V(|x|_p)$, а в работе [9] — в произвольном регулярном открытом множестве $G\subset Q_p$, и его спектральные свойства существенно зависят от структуры множества G.

§ 2. Базисы собственных функций оператора D^α, $\alpha>0$

Спектр оператора D^α в Q_p состоит из собственных значений $\lambda_N=p^{\alpha N}$, $N\in\mathbf{Z}$, бесконечной кратности и точки $\lambda=0$ ([4], см. также [1, 5, 6]). Нормированный базис соответствующих собственных функций

$$\begin{gathered}\psi^l_{N,j,\varepsilon_j}(x),\quad l=1,2,\ldots,\quad j=1,2,\ldots,p-1,\\ \varepsilon_l=\varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\ldots+\varepsilon_{l-2}p^{l-2},\quad \varepsilon_j=0,1,\ldots,p-1,\quad \varepsilon_0\neq 0,\end{gathered} \tag{2.1}$$

ортогонален по всем индексам, кроме индекса $j=1, 2, \ldots, p-1$, если $l=2, 3, \ldots$ $(p\neq 2)$. Здесь мы приведем результат ортогонализации базиса (2.1) по индексу j, а также соответствующие базисы собственных функций и собственные значения оператора D^α для круга B_γ и окружности S_γ, $\gamma\in\mathbf{Z}$, включая и случай $p=2$.

Оператор D^α в Q_p: $\lambda_N=p^{\alpha N}$, $N\in\mathbf{Z}$.

$p\neq 2$:

$$\varphi^l_{N,j,\varepsilon_l}(x)=p^{\frac{N+1-l}{2}}\delta(|x|_p-p^{l-N})\,\delta(x_0-j)\,\chi_p(\varepsilon_l p^{l-2N}x^2),$$
$$l=2,3,\ldots,\ j=1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon_l;$$

$$\varphi^1_{N,j,0}(x)=p^{\frac{N-1}{2}}\Omega(p^{N-1}|x|_p)\,\chi_p(jp^{-N}x),$$
$$l=1,\ j=1,2,\ldots,p-1,\ \varepsilon_1=0;$$

$p=2$:

$$\varphi^l_{N,j,\varepsilon_l}(x)=2^{\frac{N-l}{2}}\delta(|x|_2-2^{l+1-N})\,\chi_2(\varepsilon_l 2^{l-2N}x^2+2^{l-N-j}x),$$
$$l=2,3,\ldots,\quad j=0,1,\quad \varepsilon_l;$$

$$\varphi^1_{N,j,0}(x)=2^{\frac{N-1}{2}}[\Omega(2^N|x-j2^{N-2}|_2)-\delta(|x-j2^{N-2}|_2-2^{1-N})],$$
$$l=1,\quad j=0,1,\quad \varepsilon_1=0.$$

(Отметим, что носитель функции $\varphi^1_{N,1,0}$ содержится в окружности S_{2-N} при $p=2$.)

Их преобразования Фурье выражаются формулами:

$p\neq 2$:

$$\tilde{\varphi}^{l}_{N,\,j,\,\varepsilon_l}(\xi)=p^{-\frac{N-1}{2}}\lambda_p(\varepsilon_l p^l)\,\delta(|\xi|_p-p^N)\,\delta(\xi_0-j')\,\chi_p\left(-\frac{p^{2N-l}}{4\varepsilon_l}\xi^2\right),$$

$$-2\varepsilon_0 j\equiv j'\,(\mathrm{mod}\,p),\quad l=2,3,\ldots,\quad j=1,2,\ldots,p-1,\quad \varepsilon_l;$$

$$\tilde{\varphi}^{1}_{N,\,j,\,0}(\xi)=p^{-\frac{N-1}{2}}\delta(|\xi|_p-p^N)\,\delta(\xi_0-j),$$

$$l=1,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ p=1,\ \varepsilon_1=0;$$

$p=2$:

$$\tilde{\varphi}^{l}_{N,\,j,\,\varepsilon_l}(\xi)=2^{-\frac{N-1}{2}}\lambda_2(\varepsilon_l 2^l)\,\delta(|\xi|_2-2^N)\,\chi_2\left[-\frac{2^{2N-l}}{4\varepsilon_l}(\xi+2^{l-N-j})^2\right],$$

$$l=2,\ 3,\ \ldots,\ j=0,\ 1,\ \varepsilon_l;$$

$$\tilde{\varphi}^{1}_{N,\,j,\,0}(\xi)=2^{-\frac{N-1}{2}}\delta(|\xi|_2-2^N)\chi_2(j2^{N-2}\xi),$$

$$l=1,\ j=0,\ 1,\ \varepsilon_1=0.$$

Оператор D^α в круге B_γ, $\gamma\in\mathbf{Z}$.

$p\neq 2$:

$$\lambda_0=\frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1}\,p^{\alpha(1-\gamma)},\quad \psi_0(x)=p^{-\gamma/2}\quad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_1=p^{\alpha(1-\gamma)},\quad \varphi^{1}_{1-\gamma,\,j,\,0}(x)\quad j=1,2,\ldots,p-1,\quad \text{кратность } p-1;$$

$$\lambda_k=p^{\alpha(k-\gamma)},\quad \varphi^{l}_{k-\gamma,\,j,\,\varepsilon_l}(x),\quad l=2,3,\ldots,k,\quad j=1,2,\ldots,p-1,\quad \varepsilon_l;$$

$$\varphi^{1}_{k-\gamma,\,j,\,0}(x),\quad j=1,2,\ldots,p-1,\quad \text{кратность } p^{k-1}(p-1),\quad k=2,3,\ldots$$

$p=2$:

$$\lambda_0=\frac{2^{\alpha(1-\gamma)}}{2^{\alpha+1}-1},\quad \psi_0(x)=2^{-\gamma/2}\quad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_1=2^{\alpha(1-\gamma)},\quad \varphi^{1}_{1-\gamma,\,0,\,0}(x)\quad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_2=2^{\alpha(2-\gamma)},\quad \varphi^{1}_{2-\gamma,\,j,\,0}(x),\quad j=0,1,\quad \text{кратность } 2;$$

$$\lambda_k=2^{\alpha(k-\gamma)},\quad \varphi^{l}_{k-\gamma,\,j,\,\varepsilon_l}(x),\quad l=2,3,\ldots,k-1,\quad j=0,1;$$

$$\varphi^{1}_{k-\gamma,\,j,\,0}(x),\quad j=0,1,\quad \text{кратность } 2^{k-1},\quad k=3,4,\ldots$$

Оператор D^α на окружности S_γ, $\gamma\in\mathbf{Z}$.

$p\neq 2$:

$$\lambda_0=\frac{p^\alpha+p-2}{p^{\alpha+1}-1}\,p^{\alpha(1-\gamma)},\quad \psi_0(x)=\sqrt{\frac{p}{p-1}}\,p^{-\gamma/2}\quad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_1=p^{\alpha(1-\gamma)},\quad \varphi_{\gamma,\,j}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi^{1}_{1-\gamma,\,j,\,0}(x)-\varphi^{1}_{1-\gamma,\,j+1,\,0}(x)\right],$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ p-2,\ \text{кратность } p-2;$$

$$\lambda_k=p^{\alpha(k-\gamma)},\quad \varphi^{k}_{k-\gamma,\,j,\,\varepsilon_k}(x),\quad j=1,2,\ldots,p-1,\quad \varepsilon_k$$

$$\text{кратность } p^{k-2}(p-1)^2,\quad k=2,3,\ldots$$

$p=2$:

$$\lambda_0=\frac{2^{\alpha(2-\gamma)}}{2^{\alpha+1}-1},\quad \psi_0(x)=2^{(1-\gamma)/2}\quad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_1 = p^{\alpha(2-\gamma)}, \quad \varphi^1_{2-\gamma,1,0}(x) \quad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_k = 2^{\alpha(k+1-\gamma)}, \quad \varphi^k_{k+1-\gamma,j,e_k}(x), \quad j=0,1, \quad e_k \quad \text{кратность } 2^{k-1}, \quad k=2,3,\ldots$$

Замечание. Собственные функции $\varphi_{\gamma,j}$, $j=1, 2, \ldots, p-2$, неортогональны в $\mathscr{L}^2(S_\gamma)$:

$$(\varphi_{\gamma,k}, \varphi_{\gamma,j}) = \delta_{k,j} - \frac{1}{2}\delta_{k,j+1} - \frac{1}{2}\delta_{k+1,j}.$$

В приведенных формулах использованы следующие обозначения:

$$\Omega(t)=1, \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \quad \Omega(t)=0, \quad t>1,$$

$$\delta(|x|_p - p^\gamma) = \begin{cases} 1, & |x|_p = p^\gamma, \\ 0, & |x|_p \neq p^\gamma, \end{cases} \qquad \delta(x_0 - k) = \delta_{x_0,k} = \begin{cases} 1, & x_0 = k, \\ 0, & x_0 \neq k. \end{cases}$$

Если $a=p^\gamma(a_0+a_1p+\ldots)$ — каноническое представление p-адического числа a, то теоретико-числовая функция $\lambda_p(a)$ определяется формулами:

$$\lambda_p(a) = \begin{cases} 1, \gamma \text{ четное}, & p\neq 2, \\ \left(\dfrac{a_0}{p}\right), \gamma \text{ нечетное}, & p\equiv 1 \pmod 4, \\ \left(\dfrac{a_0}{p}\right) i, \gamma \text{ нечетное}, & p\equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

$$\lambda_2(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}[1+(-1)^{a_1} i], & \gamma \text{ четное}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{a_1}[i+(-1)^{a_2}], & \gamma \text{ нечетное}, \quad p=2. \end{cases}$$

$\left(\dfrac{a_0}{p}\right)$ — символ Лежандра, равный 1, если a_0 — квадратичный вычет по модулю p, и равный -1 в противном случае.

§ 3. Оператор усреднения

Множество $G\subset Q_p$ называется *M-инвариантным*, если для всех $x\in G$ все точки x' окружности $|x'|_p=|x|_p$ также принадлежат G. M-инвариантное множество G либо не содержит точку 0, либо содержит ее, т. е. $G=\bigcup\limits_{\gamma\in m} S_\gamma$ (открытые), или $G=\bigcup\limits_{\gamma\in m} S_\gamma \cup \{0\}$ (замкнутые), где m — некоторое подмножество целых чисел $\mathbf{Z}$.

Для того чтобы M-инвариантное открытое (замкнутое) множество было открыто-замкнутым в Q_p, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое целое число N, что множество m не содержит отрезок $(-\infty, -N]$ (m содержит отрезок $(-\infty, -N]$ соответственно).

В первом случае назовем множества G I *типа*, а во втором — II *типа*. Примерами M-инвариантных открыто-замкнутых множеств являются пространство Q_p (II типа), круг B_γ (II типа), окружность S_γ (I типа), внешность круга $Q_p\backslash B_\gamma$ (I типа), слой $B_\gamma\backslash B_{\gamma'}$, $\gamma>\gamma'$ (I типа) и т. д.

Пусть G — открытое M-инвариантное множество в Q_p. Для любой функции $f: G \to \mathbf{C}$, $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(G)$, введем оператор усреднения

$$M[f](|x|_p) = \frac{1}{(1-p^{-1})|x|_p} \int\limits_{|x'|_p=|x|_p} f(x')\,dx' = \int\limits_{|\varepsilon|_p=1} f\left(\frac{\varepsilon}{|x|_p}\right) \frac{d\varepsilon}{1-p^{-1}}. \quad (3.1)$$

Очевидно, оператор M переводит $f(|x|_p)$ в себя, и обратно: если f инвариантна относительно преобразования M, $M[f]=f$, то $f(x)$ зависит лишь от $|x|_p$.

Отметим неравенство: если $f \in \mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}(G)$, то

$$|M[f]|^2 \leqslant M[|f|^2], \quad x \in G, \quad (3.2)$$

вытекающее из (3.1) и неравенства Коши — Буняковского.

Введем подпространство $\mathscr{L}_0^2(G)$ $(\mathscr{L}_0^2 = \mathscr{L}_0^2(Q_p^n))$ пространства $\mathscr{L}^2(G)$, состоящее из функций $f \in \mathscr{L}^2(G)$, инвариантных относительно оператора усреднения M со скалярным произведением $(f, g)_0$ и нормой $\|f\|_0$ по формулам

$$(f, g)_0 = \int\limits_G f(|x|_p)\,\bar{g}(|x|_p)\,dx = \left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma \in m} p^\gamma f(p^\gamma)\,\bar{g}(p^\gamma), \qquad \|f\|_0^2 = (f, f)_0.$$

Имеет место следующее легко проверяемое равенство:

$$(f, g) = (M[f], g)_0, \quad f \in \mathscr{L}^2(G), \quad g \in \mathscr{L}_0^2(G). \quad (3.3)$$

Пространство $\mathscr{L}_0^2(G)$ изоморфно пространству l_0^2 последовательностей $\{f_\gamma, \gamma \in m\}$ таких, что

$$\sum_{\gamma \in m} p^\gamma |f_\gamma|^2 < \infty.$$

Этот изоморфизм задается равенством

$$f(|x|_p) = \sum_{\gamma \in m} f_\gamma \delta(|x|_p - p^\gamma), \quad f_\gamma = f(p^\gamma),$$

причем

$$\|f\|_0^2 = \left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma \in m} p^\gamma |f_\gamma|^2.$$

Оператор M линейный и непрерывный, из $\mathscr{L}^2(G)$ в $\mathscr{L}_0^2(G)$, причем

$$\|M[f]\|_0 \leqslant \|f\|, \quad f \in \mathscr{L}^2(G). \quad (3.4)$$

Действительно, пользуясь неравенством (3.2), из (3.1) получаем неравенство (3.4):

$$\|M[f]\|_0^2 = \int\limits_G |M[f](|x|_p)|^2\,dx \leqslant \int\limits_G M[|f|^2](|x|_p)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_G \int\limits_{|\varepsilon|_p=1} \left|f\left(\frac{\varepsilon}{|x|_p}\right)\right|^2 \frac{d\varepsilon}{1-p^{-1}}\,dx = \sum_{\gamma \in m} p^\gamma \int\limits_{|\varepsilon|_p=1} |f(\varepsilon p^{-\gamma})|^2\,d\varepsilon =$$

$$= \sum_{\gamma \in m} p^\gamma \int\limits_{|x|_p=p^\gamma} |f(x)|^2\,dx = \int\limits_G |f(x)|^2\,dx = \|f\|^2.$$

Пусть $f \in \mathscr{L}^1(G)$. Справедливо равенство

$$\int_G f(x)\,dx = \int_G M[f](|x|_p)\,dx = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma \in m} p^\gamma M[f](p^\gamma). \tag{3.5}$$

Правая часть равенства (3.5) напоминает $q = \frac{1}{p}$-интеграл вида (см., например, [7])

$$\int_0^1 \varphi(r)\,d_q r = (1-q) \sum_{0<\gamma<\infty} q^\gamma \varphi(q^\gamma).$$

Введем модифицированный q-интеграл по формуле

$$\int_m \varphi(r)\,d_q r = (1-q) \sum_{\gamma \in m} q^\gamma \varphi(q^\gamma).$$

В терминах модифицированного $q = \frac{1}{p}$-интеграла формула (3.5) принимает вид (ср. [7])

$$\int_G f(x)\,dx = \int_m M[f](r)\,d_{\frac{1}{p}} r, \tag{3.6}$$

где в силу (3.1) функция $M[f](r)$ задается формулой

$$M[f](r) = \frac{1}{(1-p^{-1})r} \int_{|x|_p = r} f(x)\,dx = \int_{|x|_p = 1} f\left(\frac{x}{r}\right) \frac{dx}{1-p^{-1}}. \tag{3.7}$$

Сказанное без существенных изменений переносится на случай n-мерного M-инвариантного открытого множества $G \subset Q_p^n$. (Множество G называется *M-инвариантным*, если для всех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$ все точки $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, для которых $|x_j'|_p = |x_j|_p$, $j = 1, 2, \ldots, n$, также принадлежат G.) M-инвариантные открытые множества G с точностью до множества меры 0 представляются в виде

$$G = \bigcup_{\gamma \in m} S_{\gamma_1} \times S_{\gamma_2} \times \ldots \times S_{\gamma_n},$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ и m — некоторое подмножество $\mathbf{Z}^n$.

Обозначим через M_j частный оператор усреднения по переменной x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Для $f \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(G)$ введем оператор усреднения M по формуле

$$M[f](|x_1|_p, \ldots, |x_n|_p) = M_1[M_2[\ldots[M_n[f]]\ldots]]. \tag{3.8}$$

Оператор M не зависит от порядка действия частных операторов усреднения $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (теорема Фубини).

Скалярное произведение в $\mathscr{L}_0^2(G)$ и формула (3.5) принимают вид

$$(f, g)_0 = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \sum_{\gamma \in m} p^{|\gamma|} f(p^\gamma)\,\bar{g}(p^\gamma), \tag{3.9}$$

$$\int_G f(x)\,dx = \int_G M[f](|x_1|_p, \ldots, |x_n|_p)\,dx =$$
$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)^n \sum_{\gamma\in m} p^{|\gamma|} M[f](p^\gamma), \quad f\in\mathscr{L}^1(G), \tag{3.10}$$

где $|\gamma|=\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n$, $p^\gamma=(p^{\gamma_1}, p^{\gamma_2}, \ldots, p^{\gamma_n})$.

Аналогично переписываются формулы (3.3)–(3.6) и неравенства (3.2) и (3.4)

Сечение любой плоскостью $x_j=0$, $j=1, 2, \ldots, n$, M-инвариантного открыто-замкнутого множества есть M-инвариантное открыто-замкнутое множество. Поэтому n-мерные M-инвариантные открыто-замкнутые множества допускают классификацию, подобную $n=1$. Мы выделим здесь два крайних типа таких множеств: множества, содержащие окрестность нуля, и множества, не содержащие окрестность нуля. Примерами таких множеств являются множества вида

$$G=G_1\times G_2\times\ldots\times G_n,$$

где все G_j, $j=1, 2, \ldots, n$,– M-инвариантные открыто-замкнутые множества в Q_p либо I, либо II типа соответственно.

Наконец, отметим, что преобразование Фурье переводит M-инвариантные функции из $\mathscr{L}_0^2$ в M-инвариантные функции. Это следует из того факта, что основные (из $\mathscr{D}$) M-инвариантные функции при преобразовании Фурье F переходят в M-инвариантные функции (см. [2]), а множество основных M-инвариантных функций плотно в $\mathscr{L}_0^2$ и операторы M и F непрерывны в $\mathscr{L}^2$.

§ 4. Оператор $D^\alpha+V(|x|_p)$, $\alpha>0$

Оператор D^α введен автором в работе [2]; это – псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi|_p^\alpha$. Оператор типа Шрёдингера

$$A=D^\alpha+V(|x|_p)$$

рассматриваем в M-инвариантном открыто-замкнутом множестве G (ограниченном или нет). Относительно потенциала V предполагаем, что он M-инвариантен в G, удовлетворяет условиям § 1 и, сверх того, $V(|x|_p)\to\to+\infty$, $|x|_p\to\infty$, $x\in G$ (последнее условие – для неограниченных множеств G).

Пространство $\mathscr{L}^2(G)$ разлагается в ортогональную прямую сумму подпространств $\mathscr{L}^2(S_\gamma)$ (см. § 3):

$$\mathscr{L}^2(G)=\sum_{\gamma\in m}\oplus\,\mathscr{L}^2(S_\gamma). \tag{4.1}$$

Обозначим через $\tilde{A}$ самосопряженное расширение по Фридрихсу оператора A с областью определения $\mathscr{D}(\tilde{A})=Q(A)\cap\mathscr{D}(A^*)$ (§ 1).

Собственными функциями оператора $\tilde{A}$ в G будут те собственные функции оператора D^α в G, которые обращаются в нуль вне S_γ при некотором $\gamma\in m$. Таковым является объединение по $\gamma\in m$ всех собствен-

ных функций оператора D^α в S_γ, приведенных в § 2, кроме $\psi_0=\text{const}$, т. е. при $p\neq 2$:

$$\varphi_{\gamma,j}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi^1_{1-\gamma,j,0}(x)-\varphi^1_{1-\gamma,j+1,0}(x)],\quad j=1,2,\ldots,p-2,$$
$$\varphi^k_{k-\gamma,j,e_k}(x),\quad j=1,2,\ldots,p-1,\quad k=2,3,\ldots,\quad e_k; \tag{4.2}$$

при $p=2$:

$$\varphi^1_{2-\gamma,1,0}(x),\quad \varphi^k_{k+1-\gamma,j,e_k}(x),\quad j=0,1,\quad k=2,3,\ldots,\quad e_k. \tag{4.2'}$$

Соответствующие собственные значения суть: при $p\neq 2$

$$\lambda_\gamma^k=p^{\alpha(k-\gamma)}+V(p^\gamma),\quad k=1,\ 2,\ldots,\ \gamma\in m; \tag{4.3}$$

при $p=2$:

$$\lambda_\gamma^k=2^{\alpha(k+1-\gamma)}+V(2^\gamma),\quad k=1,\ 2,\ldots,\ \gamma\in m. \tag{4.3'}$$

При этом числу λ_γ^1 соответствуют функции $\varphi_{\gamma,j}$ (кратность $p-2$) при $p\neq 2$ и функция $\varphi^1_{2-\gamma,1,0}$ (кратность 1) при $p=2$; числу λ_γ^k — функции $\varphi^k_{k-\gamma,j,e_k}$ (кратность $p^{k-2}(p-1)^2$) при $p\neq 2$ и функции $\varphi^k_{k+1-\gamma,j,e_k}$ (кратность 2^{k-1}) при $p=2$, $k=2,3,\ldots$

Таким образом, при фиксированном $\gamma\in m$ собственные функции (4.2) оператора $\tilde{A}$, дополненные 1, образуют базис в $\mathscr{L}^2(S_\gamma)$ (см. § 2). Поэтому и в силу (4.1) объединение функций (4.2) по $\gamma\in m$ будет ортогонально в $\mathscr{L}^2(G)$ функциям, постоянным на каждой окружности S_γ, $\gamma\in m$, т. е. к M-инвариантным функциям в G. Итак, ортогональное дополнение в $\mathscr{L}^2(G)$ к замкнутой линейной оболочке, порожденной объединением по $\gamma\in m$ собственных функций (4.2), есть пространство $\mathscr{L}_0^2(G)$ (§ 2).

Осталось найти недостающие собственные функции оператора $\tilde{A}$ в G, т. е. M-инвариантные собственные функции $\psi(|x|_p)$.

Обозначим через $\tilde{A}_0$ сужение оператора $\tilde{A}$ на подпространство $\mathscr{L}_0^2(G)$; $\tilde{A}_0$ — самосопряженный оператор с областью определения $\mathscr{D}(\tilde{A}_0)=\mathscr{D}(\tilde{A})\cap\mathscr{L}_0^2(G)$. Найдем представление оператора $\tilde{A}_0$. Для этого воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА. *Пусть $\alpha>0$ и $f(x)$ — локально интегрируемая функция в Q_p такая, что*

$$\int\limits_{|x|_p\geqslant 1}|x|_p^{-\alpha-1}|f(x)|\,dx<\infty.$$

Тогда

$$(D^\alpha f)(x)=-\int\limits_{Q_p}\mathscr{K}(|x|_p,|y|_p)f(y)\,dy+\sigma|x|_p^{-\alpha}f(x), \tag{4.4}$$

где $\mathscr{K}(t,\tau)$ — вещественное симметричное ядро,

$$\mathscr{K}(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\rho}{1-p^{-1}}t^{-\alpha-1}, & \tau<t,\\ 0, & \tau=t,\end{cases}$$

$$\sigma=\frac{p^\alpha(p^\alpha+p-2)}{p^{\alpha+1}-1},\quad \rho=-\Gamma_p^{-1}(-\alpha)\left(1-\frac{1}{p}\right),\quad \sigma+\rho=p^\alpha. \tag{4.5}$$

Доказательство. По определению оператора D^α, $\alpha>0$ (см. [2]), имеем

$$(D^\alpha f)(x) = f_{-\alpha} * f = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int\limits_{Q_p} \frac{f(y)-f(x)}{|x-y|^{\alpha+1}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \left[|x|_p^{-\alpha-1} \int\limits_{|y|_p \leq |x|_p} f(y)\, dy + \int\limits_{|y|_p > |x|_p} |y|_p^{-\alpha-1} f(y)\, dy \right] -$$

$$- \frac{f(x)}{\Gamma_p(-\alpha)} \left[|x|_p^{-\alpha-1} \int\limits_{|y|_p \leq |x|_p} dy + \int\limits_{|y|_p > |x|_p} |y|_p^{-\alpha-1}\, dy \right]. \qquad (4.6)$$

Но, обозначая $|x|_p = p^N$, получим

$$\int\limits_{|y|_p \leq |x|_p} dy = \frac{|x|_p}{p}, \quad \Gamma_p(-\alpha) = \frac{1-p^{-\alpha-1}}{1-p^\alpha},$$

$$\int\limits_{|y|_p > |x|_p} |y|_p^{-\alpha-1}\, dy = \sum_{N+1 \leq \gamma < \infty} p^{-(\alpha+1)\gamma} p^\gamma \left(1 - \frac{1}{p}\right) = (|x|_p\, p)^{-\alpha} \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}.$$

Отсюда и из (4.6) следуют равенства (4.4) и (4.5). ▶

В силу леммы оператор D^α преобразует $\mathscr{L}_0^2(G)$ в M-инвариантные функции в Q_p. (Напомним, что $\mathscr{L}_0^2(G)$ состоит из M-инвариантных функций из $\mathscr{L}^2$, равных 0 вне G.) Поэтому оператор $\tilde{A}_0$ на функциях из его области определения $\mathscr{D}(\tilde{A}_0) \subset \mathscr{L}_0^2(G)$ принимает вид

$$(\tilde{A}_0 \psi)(|x|_p) = -\int\limits_G \mathscr{K}(|x|_p, |y|_p)\, \psi(|y|_p)\, dy +$$

$$+ [\sigma |x|_p^{-\alpha} + V(|x|_p)]\, \psi(|x|_p), \quad x \in G. \qquad (4.7)$$

Отметим, что в силу (4.5) интеграл в (4.7) сходится абсолютно при всех $|x|_p \neq 0$, если $\psi \in \mathscr{L}_0^2(G)$, и оператор $\tilde{A}$ (точнее, его расширение с помощью правой части равенства (4.7)) преобразует $\mathscr{L}_0^2(G)$ в $\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(Q_p \setminus \{0\})$.

Соответствующая квадратичная форма

$$A_0(\psi, \psi) = \int\limits_{Q_p} |\xi|_p^\alpha |\tilde{\psi}(|\xi|_p)|^2\, d\xi + \int\limits_G V(|x|_p)\, |\psi(|x|_p)|^2\, dx =$$

$$= -\int\limits_G \int\limits_G \mathscr{K}(|x|_p, |y|_p)\, \psi(|y|_p)\, \tilde{\psi}(|x|_p)\, dx\, dy +$$

$$+ \int\limits_G [\sigma |x|_p^{-\alpha} + V(|x|_p)]\, |\psi(|x|_p)|^2\, dx \qquad (4.8)$$

с областью определения $Q(A_0) = Q(A) \cap \mathscr{L}_0^2(G)$ замкнута и положительно определенна:

$$A_0(\psi, \psi) \geq \|\psi\|^2, \quad \psi \in Q(A_0). \qquad (4.9)$$

В терминах $\Psi = \{\psi_\gamma = \psi(p^\gamma),\ \gamma \in m\}$-последовательностей оператор $\tilde{A}_0$ принимает вид

$$(\tilde{A}_0 \Psi)_\gamma = -\sum_{\gamma' \in m} \mathscr{K}_{\gamma\gamma'} \psi_{\gamma'} + [\sigma p^{-\alpha\gamma} + V(p^\gamma)]\, \psi_\gamma, \quad \gamma \in m, \qquad (4.10)$$

где в силу (4.5)

$$\mathcal{K}_{\gamma\gamma'}=\begin{cases}\rho p^{\gamma'-(\alpha+1)\gamma}, & \gamma'<\gamma,\\ 0, & \gamma'=\gamma,\\ \rho p^{-\alpha\gamma'}, & \gamma'>\gamma.\end{cases} \tag{4.11}$$

Теперь, пользуясь аналогом критерия Реллиха компактности функций в $\mathscr{L}_0^2(G)$ (см. [1]) и общими теоремами функционального анализа (см., например, [10, т. 4], ср. с теоремой 1 § 1), заключаем, что спектр оператора $\tilde{A}_0$ чисто дискретный, т. е. состоит из собственных значений $\{\mu_k,\ k=0,\ 1,\ \ldots\}$, $\mu_0\leqslant\mu_1\leqslant\ldots$, $\mu_k\to+\infty$, $k\to\infty$, каждое из которых конечной кратности; соответствующие собственные функции $\psi_k\in\mathscr{D}(\tilde{A}_0)$, $k=0,\ 1,\ \ldots$,

$$(\tilde{A}_0\psi_k)(|x|_p)=\mu_k\psi_k(|x|_p),\quad x\in G, \tag{4.12}$$

образуют ортонормальный базис в $\mathscr{L}_0^2(G)$. Справедлив вариационный принцип

$$\mu_k=\inf_{\substack{\psi\in Q(A_0)\\ (\psi,\psi_j)_0=0,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1}}\frac{A_0(\psi,\psi)}{\|\psi\|_0^2}, \tag{4.13}$$

причем inf достигается на собственных функциях, соответствующих собственному значению μ_k.

Резюмируя полученные результаты, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Спектр оператора $\tilde{A}$ чисто дискретный и состоит из собственных значений* (4.3), *и* $\{\mu_k,\ k=0,\ 1,\ \ldots\}$, *соответствующие собственные функции* (4.2) *и* $\{\psi_k(|x|_p),\ k=0,\ 1,\ \ldots\}$ *образуют базис в* $\mathscr{L}^2(G)$.

Замечание. Кратность собственного значения λ_k оператора $\tilde{A}$ определяется решениями уравнений

$$\lambda_k=\mu_j,\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\quad \lambda_k=\lambda_\gamma^l,\quad \gamma\in m,\quad l=1,\ 2,\ \ldots$$

(их конечное число) и кратностями собственных значений μ_j и λ_γ^l.

Теперь докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Наименьшее собственное значение λ_0 оператора $\tilde{A}$ совпадает с наименьшим собственным значением μ_0 оператора $\tilde{A}_0$, $\lambda_0=\mu_0$; оно простое и соответствующая ему собственная функция $\psi_0(|x|_p)$ положительна в G. Справедливы оценки*

$$\inf_{\gamma\in m}V(p^\gamma)<\lambda_0\leqslant\inf_{N\in Z}\frac{1}{\sum\limits_{\gamma\in m_N}p^\gamma}\Big\{-2\rho\sum_{\substack{\gamma'<\gamma\\ \gamma',\gamma\in m_N}}p^{\gamma'-\alpha\gamma}+$$
$$+\sum_{\gamma\in m_N}[\sigma p^{\gamma(1-\alpha)}+p^\gamma V(p^\gamma)]\Big\}, \tag{4.14}$$

где $m_N=m\cap(-\infty,\ N]$.

Доказательство. Для собственного значения μ_0 справедлив вариационный принцип (4.13):

$$\mu_0=\inf_{\psi\in Q(A_0)}{}'\frac{A_0(\psi,\psi)}{\|\psi\|_0^2}=(\tilde{A}_0\psi_0,\psi_0)_0, \tag{4.15}$$

где $\psi_0(|x|_p)$ – любая (вещественная) собственная функция оператора $\tilde{A}_0$, соответствующая μ_0.

Докажем сначала, что $\psi_0(|x|_p)\geqslant 0$, $x\in G$.

Пусть, напротив, существуют компактные в $G\setminus\{0\}$ окрестности $U(x')$ и $V(x'')$ точек $x'\in G\setminus\{0\}$ и $x''\in G\setminus\{0\}$ такие, что $\psi_0(|x|_p)>0$, $x\in U(x')$ и $\psi_0(|x|_p)<0$, $x\in V(x'')$, так что

$$|\psi_0(|x|_p)|=\psi_0(|x|_p),\quad x\in U(x'),\qquad |\psi_0(|x|_p)|>\psi_0(|x|_p),\quad x\in V(x''). \tag{4.16}$$

Введем последовательность функций

$$\psi_N(|x|_p)=\psi_0(|x|_p)[\Omega(p^{-N}|x|_p)-\Omega(p^N|x|_p)],\quad N=1,2,\ldots,$$

из $\mathscr{D}(G)\subset\mathscr{D}(\tilde{A}_0)$ с носителями в $G\cap[B_N\setminus B_{-N}]$, так что $\psi_N\to\psi$, $N\to\infty$, в $\mathscr{L}_0^2(G)$. Отсюда и из замкнутости квадратичной формы $A_0(\psi,\psi)$, а также из (4.15) следует [10, т. 1], что

$$\inf_{N=1,2,\ldots}\frac{(\tilde{A}_0\psi_N,\psi_N)_0}{\|\psi_N\|_0^2}=\mu_0. \tag{4.17}$$

Далее, при достаточно большом N $U(x')\cup V(x'')\subset B_N\setminus B_{-N}$. Поэтому, учитывая, что $\mathscr{K}(|x|_p,|y|_p)>0$ при $|x|_p\neq|y|_p$ и $\mathscr{K}(|x|_p,|x|_p)=0$, и из (4.16) имеем неравенство

$$\int_G\int_G\mathscr{K}(|x|_p,|y|_p)[|\psi_N(|x|_p)||\psi_N(|y|_p)|-\psi_N(|x|_p)\psi_N(|y|_p)]\,dx\,dy\geqslant\eta,$$

где число $\eta>0$ равно

$$\eta=4\int_{U(x')}\int_{V(x'')}\mathscr{K}(|x|_p,|y|_p)\psi_0(|x|_p)|\psi_0(|y|_p)|\,dx\,dy.$$

Отсюда и из (4.8) следует неравенство

$$\begin{aligned}(\tilde{A}_0|\psi_N|,|\psi_N|)_0&=-\int_G\int_G\mathscr{K}(|x|_p,|y|_p)|\psi_N(|x|_p)||\psi_N(|y|_p)|\,dx\,dy+\\&\quad+\int_G[\sigma|x|_p^{-\alpha}+V(|x|_p)]|\psi(|x|_p)|^2\,dx\leqslant\\&\leqslant-\int_G\int_G\mathscr{K}(|x|_p,|y|_p)\psi_N(|x|_p)\psi_N(|y|_p)\,dx\,dy+\\&\quad+\int_G[\sigma|x|_p^{-\alpha}+V(|x|_p)]\psi^2(|x|_p)\,dx-\eta=(\tilde{A}_0\psi_N,\psi_N)-\eta,\end{aligned}$$

откуда выводим неравенство

$$\frac{(\tilde{A}_0|\psi_N|,|\psi_N|)_0}{\||\psi_N|\|_0^2}\leqslant\frac{(\tilde{A}_0\psi_N,\psi_N)_0-\eta}{\|\psi_N\|_0^2},\quad N\to\infty,$$

которое в силу (4.17) противоречит вариационному принципу (4.15). Итак, наше предположение, что $\psi_0(|x|_p)$ принимает значения разных знаков, неверно, и, следовательно, $\psi_0(|x|_p)\geqslant 0$, $x\in G$.

Но тогда из уравнения (4.12) (см. также (4.7)) следует, что $\psi_0(|x|_p)$ не может обращаться в нуль, т. е. $\psi_0(|x|_p)>0$, $x\in G$.

Аналогично доказывается, что любая собственная функция $\psi_0(x)$ оператора $\tilde{A}$, соответствующая наименьшему собственному значению λ_0, неотрицательна в G. Далее, из вариационных принципов (1.4) и (4.15) следует, что $\lambda_0\leqslant\mu_0$. Но неравенство $\lambda_0<\mu_0$ невозможно, иначе собственные функции $\psi_0(x)\geqslant 0$ и $\psi_0(|x|_p)>0$ оператора $\tilde{A}$, соответствующие различным собственным значениям, были бы ортогональны в $\mathscr{L}^2(G)$, что невозможно. Итак, $\lambda_0=\mu_0$ и соответствующие собственные подпространства операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_0$ совпадают и состоят из знакопостоянных собственных функций. Отсюда следует, что λ_0 — простое собственное значение (иначе нашлась бы знакопеременная линейная комбинация собственных функций).

Докажем оценки (4.14). Нижняя оценка тривиальна и следует из (4.8). Для получения верхней оценки (4.14) подставим в вариационный принцип (4.15)

$$\psi(|x|_p)=\sum_{\gamma\in m_N}\delta(|x|_p-p^\gamma)$$

и воспользуемся равенствами (4.10) и (4.11). ▶

В частности, при $G=Q_p$ верхняя оценка (4.14) принимает вид

$$\lambda_0\leqslant\inf_{N\in\mathbb{Z}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left[\frac{p^{-\alpha N}}{1-p^{-\alpha-1}}+p^{-N}\sum_{-\infty<\gamma\leqslant N}p^\gamma V(p^\gamma)\right]. \qquad (4.18)$$

§ 5. Оператор $\tilde{A}_0$ в множестве I типа

Изложим метод построения собственных функций и собственных значений оператора $\tilde{A}_0$ (см. § 4) для M-инвариантных открыто-замкнутых множеств G I типа, т. е. для множеств вида (§ 3)

$$G=\bigcup_{\gamma\in m}S_\gamma,\quad \min_{\gamma\in m}\gamma>-\infty.$$

Множество $m=(m_0, m_1, \ldots)$ целых чисел будем считать упорядоченным (конечным или нет), т. е. $m_0<m_1<\ldots$

Пусть $\psi(|x|_p)$ — M-инвариантная собственная функция оператора $\tilde{A}_0$, соответствующая собственному значению μ,

$$(\tilde{A}_0\psi)(|x|_p)=\mu\psi(|x|_p),\quad x\in G. \qquad (5.1)$$

Предположим, что $\psi(p^{m_0})\neq 0$.

Ищем $\psi(|x|_p)$ в виде ряда по ортогональному каноническому базису $\{\delta(|x|_p-p^r),\ r\in m\}$ в $\mathscr{L}_0^2(G)$ (см. § 3):

$$\psi(|x|_p)=\sum_{r\in m}\psi(p^r)\delta(|x|_p-p^r),\quad \psi(p^{m_0})\neq 0. \qquad (5.2)$$

Пользуясь представлением (4.10) оператора $\tilde{A}_0$, из (5.1) и (5.2) для неизвестных коэффициентов $\{\psi(p^r),\ r\in m\}$ получим систему уравнений

$$-\sum_{r\in m}\mathscr{K}_{\gamma r}\psi(p^r)+[\sigma p^{-\alpha\gamma}+V(p^\gamma)]\psi(p^\gamma)=\mu\psi(p^\gamma),\quad \gamma\in m, \qquad (5.3)$$

где числа $\mathscr{K}_{\gamma r}$ определены равенствами (4.11).

Обозначим $\psi(p^{m_k})=\psi_k$, $k=0, 1, \ldots, N\leqslant\infty$,

$$\varkappa=\frac{1}{\psi_0}\sum_{0\leqslant k\leqslant N} p^{-\alpha m_k}\psi_k, \qquad \psi_0\neq 0. \tag{5.4}$$

(Если $N=\infty$ и $\psi\in\mathscr{L}_0^2(G)$, то ряд $\sum\limits_{0\leqslant k<\infty} p^{m_k}|\psi_k|^2$ сходится и, следовательно, сходится ряд (5.4) в силу неравенства Коши – Буняковского

$$\Big(\sum_{0\leqslant k<\infty} p^{-\alpha m_k}|\psi_k|\Big)^2\leqslant\sum_{0\leqslant k<\infty} p^{-(2\alpha+1)m_k}\sum_{0\leqslant k<\infty} p^{m_k}|\psi_k|^2<\infty.)$$

Система (5.3) переписывается в виде (вспомним, что $\sigma+\rho=p^\alpha$, § 4)

$$\rho\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} p^{-\alpha m_j}c_{kj}\psi_j-\rho\varkappa\psi_0+[p^{\alpha(1-m_k)}+V(p^{m_k})]\psi_k=\mu\psi_k, \tag{5.5}$$

$$k=0, 1, \ldots,$$

где обозначено

$$c_{kj}=1-p^{-(1+\alpha)(m_k-m_j)}. \tag{5.6}$$

Полагая в (5.5) $k=0$, получим соотношение

$$-\rho\varkappa+p^{\alpha(1-m_0)}+V(p^{m_0})=\mu, \tag{5.7}$$

а при $k=1, 2, \ldots$ — рекуррентную формулу для определения неизвестных чисел

$$\psi_k=\frac{-\rho\varkappa\psi_0+\rho\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant k-1} p^{-\alpha m_j}c_{kj}\psi_j}{\mu-p^{\alpha(1-m_k)}-V(p^{m_k})}, \quad \psi_0=1, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{5.8}$$

при условиях, что (см. обозначение (4.3))

$$\mu\neq p^{\alpha(1-m_k)}+V(p^{m_k})=\lambda^1_{m_k}, \quad k=1, 2, \ldots \tag{5.9}$$

С помощью равенства (5.7) исключим из равенств (5.8) и (5.4) неизвестную величину $\varkappa=\frac{1}{\rho}(\lambda^1_{m_0}-\mu)$. В результате получим рекуррентное соотношение для

$$\psi_k=\frac{1}{\mu-\lambda^1_{m_k}}\Big[(\mu-\lambda^1_{m_0})\psi_0+\rho\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} p^{-\alpha m_j}c_{kj}\psi_j\Big], \quad \psi_0=1, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{5.10}$$

и трансцендентное уравнение для определения собственных значений μ:

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant N} p^{-\alpha m_k}\psi_k(\mu)=\frac{1}{\rho}(\lambda^1_{m_0}-\mu)-p^{-\alpha m_0}, \quad \psi_k\equiv\psi_k(\mu) \tag{5.11}$$

при условиях (5.9).

Отметим, что из (5.3) следует формальное выражение для

$$D^\alpha\psi(|x|_p)=\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\psi_k'\delta(|x|_p-p^{m_k}), \tag{5.12}$$

где

$$\psi_0' = \mu - V(p^{m_0}),$$

$$\psi_k' = p^{\alpha(1-m_k)}\psi_k - \rho p^{-(1+\alpha)m_k} \sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} p^{m_j}\psi_j - \rho \sum_{k\leqslant j\leqslant N} p^{-\alpha m_j}\psi_j. \tag{5.13}$$

(При $N=\infty$ ряд (5.12) сходится в смысле обобщенных функций $\mathscr{D}'(G)$, если $\psi\in\mathscr{L}^2(G)$.)

Подытожим сказанное в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть собственное значение μ оператора $\tilde{A}_0$ в M-инвариантном открыто-замкнутом множестве G I рода удовлетворяет условиям* (5.9) *и соответствующая ему M-инвариантная собственная функция $\psi(|x|_p)$ удовлетворяет условию $\psi(p^{m_0})\neq 0$. Тогда $\psi(|x|_p)$ представляется рядом* (5.2) *в G, причем коэффициенты $\psi(p^{m_k})=\psi_k$ удовлетворяют рекуррентному соотношению* (5.10) *и μ удовлетворяет трансцендентному уравнению* (5.11).

Остается открытым вопрос о том, при каких условиях верно обратное утверждение: *всякое (вещественное) решение μ уравнения* (5.11), *удовлетворяющее условиям* (5.9), *является собственным значением оператора $\tilde{A}_0$ в G, а функция $\psi(|x|_p)$, построенная по формулам* (5.2) *и* (5.10), *является соответствующей собственной функцией и удовлетворяет условию $\psi(p^{m_0})\neq 0$.*

При $N<\infty$ это утверждение верно.

При $N=\infty$ мы предположим, что потенциал $V(|x|_p)$ удовлетворяет условию

$$\int_G V^{-2}(|x|_p)\,dx = \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{0\leqslant k<\infty} V^{-2}(p^{m_k})\,p^{m_k} < \infty. \tag{5.14}$$

Наша задача — исследовать сходимость рядов (5.2), (5.11) и (5.12). Для этого оценим коэффициенты ψ_k при $k\to\infty$.

Из формул (5.6) и (5.9) следуют оценки

$$1-p^{-1-\alpha}\leqslant c_{kj}<1,\quad 0\leqslant j\leqslant k-1,\quad \lambda^1_{m_k}\sim V(p^{m_k}),\quad k\to\infty. \tag{5.15}$$

Отсюда и из (5.10) (при каждом фиксированном μ) вытекает рекуррентная оценка

$$|\psi_k|\leqslant \frac{1}{|\mu-\lambda^1_{m_k}|}\left(|\mu-\lambda^1_{m_0}|+\rho\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} p^{-\alpha m_j}|\psi_j|\right),\quad \psi_0=1,\quad k=1,2,\ldots \tag{5.16}$$

Выберем целое число $m'\geqslant m_0$ таким, чтобы было

$$\rho\sum_{m'\leqslant j<\infty}\frac{p^{-\alpha m_j}}{|\mu-\lambda^1_{m_j}|}=q<1. \tag{5.17}$$

(Ряд (5.17) сходится, так как $\lambda_{m_j}\sim V(p^{m_j})\to+\infty$, $j\to\infty$.) Перепишем рекуррентное неравенство (5.16) в виде

$$|\psi_k|\leqslant \frac{1}{|\mu-\lambda^1_{m_k}|}\left(C+\rho\sum_{m'\leqslant j\leqslant k-1} p^{-\alpha m_j}|\psi_j|\right),\quad k=m'+1,m'+2,\ldots, \tag{5.18}$$

где обозначено

$$C=|\mu-\lambda^1_{m_0}|+\rho\sum_{0\leqslant j\leqslant m'-1}p^{-\alpha m_j}|\psi_j|.$$

Вводя новую последовательность

$$T_k=|\psi_k(\mu-\lambda^1_{m_k})|,\quad k=m',m'+1,\ldots,\tag{5.19}$$

перепишем рекуррентное неравенство (5.18) в виде

$$T_k\leqslant C+\rho\sum_{m'\leqslant j\leqslant k-1}\frac{p^{-\alpha m_j}T_j}{|\mu-\lambda^1_{m_j}|},\quad k=m'+1,m'+2,\ldots\tag{5.20}$$

Докажем оценку

$$T_k\leqslant\frac{M_1}{1-q},\quad k=m',m'+1,\ldots,\quad M_1=\max(C,T_{m'}).\tag{5.21}$$

◀ Неравенство (5.21) докажем методом математической индукции по k. Оно верно при $k=m'$. Считая его верным для $m'+1,\ldots,k$, докажем его для $k+1$. Из (5.20) с учетом (5.17) имеем

$$T_{k+1}\leqslant C+\rho\sum_{m'\leqslant j\leqslant k}p^{-\alpha m_j}\frac{1}{|\mu-\lambda^1_{m_j}|}\cdot\frac{M_1}{1-q}\leqslant M_1\left(1+\frac{q}{1-q}\right)=\frac{M_1}{1-q}.\ ▶$$

Из оценки (5.21) и в силу (5.19) и (5.14) следует оценка (при некоторой $M>0$)

$$|\psi_k|\leqslant\frac{M}{V(p^{m_k})},\quad k=0,1,\ldots\tag{5.22}$$

Из оценки (5.22) следует, что ряд (5.4) сходится в области допустимых значений параметра μ, а условие (5.14) дает возможность заключить, что ряд (5.2) сходится в $\mathscr{L}_0^2(G)$, так что построенная функция $\psi(|x|_p)$ принадлежит $\mathscr{L}_0^2(G)$.

Докажем оценку (при некотором $M_2>0$)

$$|\psi_k'|\leqslant M_2p^{-(\alpha+1/2)m_k},\quad k=0,1,\ldots,\tag{5.23}$$

где числа ψ_k' определены в (5.13).

◀ Из условия (5.14) следует оценка (при некотором $M_3>0$)

$$\frac{1}{V(p^{m_k})}\leqslant M_3p^{-m_k/2},\quad k=0,1,\ldots\tag{5.24}$$

Пользуясь этой оценкой, оценкой (5.22) и условием (5.14) при $k=1,2,\ldots$, имеем из (5.13) цепочку неравенств:

$$|\psi_k'|\leqslant p^{\alpha(1-m_k)}|\psi_k|+\rho p^{-(1+\alpha)m_k}\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1}p^{m_j}|\psi_j|+\rho\sum_{k\leqslant j<\infty}p^{-\alpha m_j}|\psi_j|\leqslant$$

$$\leqslant p^{\alpha(1-m_k)}\frac{M}{V(p^{m_k})}+\rho Mp^{-(1+\alpha)m_k}\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1}p^{m_j}\frac{1}{V(p^{m_j})}+$$

$$+\rho M\sum_{k\leqslant j<\infty}p^{-\alpha m_j}\frac{1}{V(p^{m_j})}\leqslant M_4\left\{p^{-(\alpha+1/2)m_k}+p^{-(1+\alpha)m_k}\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1}p^{m_j}\right)^{1/2}\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} p^{m_j}V^{-2}(p^{m_j})\right]^{1/2}+\left[\sum_{k\leqslant j<\infty} p^{-(2\alpha+1)m_j}\right]^{1/2}\left[\sum_{k\leqslant j<\infty} p^{m_j}V^{-2}(p^{m_j})\right]^{1/2}\Bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant M_5\left\{p^{-(\alpha+1/2)m_k}+p^{-(1+\alpha)m_k}\left(\sum_{m_0\leqslant s\leqslant m_k-1} p^s\right)^{1/2}+\left[\sum_{m_k-1\leqslant s<\infty} p^{-(1+2\alpha)s}\right]^{1/2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant M_5\left\{p^{-(\alpha+1/2)m_k}+p^{-(1+\alpha)m_k}\left(\frac{p^{m_k}-p^{m_0}}{p-1}\right)^{1/2}+\left[\frac{p^{-(1+2\alpha)m_k}}{1-p^{-1-2\alpha}}\right]^{1/2}\right\}\leqslant M_2p^{-(\alpha+1/2)m_k}. \blacktriangleright$$

Из оценки (5.23) следует, что ряд $\sum_{0\leqslant k<\infty} p^{m_k}|\psi_k'|^2$ сходится и, стало быть, ряд (5.12) сходится в $\mathscr{L}_0^2(G)$, т. е. $D^\alpha\psi\in\mathscr{L}_0^2(G)$. Отсюда в силу уравнения (5.3) следует, что $V\psi\in\mathscr{L}_0^2(G)$. Поэтому построенная по формуле (5.2) функция $\psi(|x|_p)$ принадлежит области $\mathscr{D}(\tilde{A}_0)$, т. е. является собственной функцией оператора $\tilde{A}_0$. При этом сходится интеграл

$$\int_G V^2(|x|_p)|\psi(|x|_p)|^2\,dx=\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{0\leqslant k<\infty} p^{m_k}V^2(p^{m_k})|\psi_k|^2<\infty. \quad (5.25)$$

Подытожим наши результаты в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть потенциал $V(|x|_p)$ удовлетворяет условию* (5.14). *Тогда всякое (вещественное) решение μ уравнения* (5.11), *удовлетворяющее условиям* (5.9), *является собственным значением оператора $\tilde{A}_0$ в G, а функция $\psi(|x|_p)$, построенная по формулам* (5.2) *и* (5.10), *является соответствующей собственной функцией и удовлетворяет условию $\psi(p^{m_0})\neq 0$. При этом сходится интеграл* (5.25).

§ 6. Обращение теоремы 1

ТЕОРЕМА 6. *Пусть функции $\tilde{a}(\xi)$ и $V(x)$ M-инвариантны в Q_p^n и в M-инвариантном открыто-замкнутом множестве $G\subset Q_p^n$ соответственно. Если минимакс — числа $\lambda_k(A)\to+\infty$, $k\to\infty$, то*

$$V(x)\to+\infty,\quad \|x\|_p\to\infty,\quad x\in G, \quad (6.1)$$

если G — неограниченное множество;

$$\tilde{a}(\xi)\to+\infty,\quad \|\xi\|_p\to\infty, \quad (6.2)$$

если G содержит окрестность нуля.

При этом $\lambda_k(A)=\lambda_k$, $k=0, 1, \ldots$

Доказательство. Пусть сначала $n=1$. Пусть G — неограниченное M-инвариантное открыто-замкнутое множество в Q_p. Докажем, что $V(|x|_p)\to+\infty$, $|x|_p\to\infty$, $x\in G$. Пусть это не так, т. е. $V(|x|_p)$ не стремится к $+\infty$ при $|x|_p\to\infty$, $x\in G$. Тогда существуют число $M>0$ и возрастающая последовательность $N_k\in m$, $k=1, 2, \ldots$, $N_k\to\infty$, $k\to\infty$, такие, что

$$V(p^{N_k})\leqslant M,\quad k=1, 2, \ldots \quad (6.3)$$

Пусть $p\neq 2$. Рассмотрим ортонормальную в $\mathscr{L}^2(G)$ подсистему собственных функций оператора D^α, $\alpha>0$ (см. § 2),

$$\{\varphi^2_{2-N_k,1,1}(x), k=1, 2, \ldots\}, \quad (6.4)$$

для которых

$$|\varphi^2_{2-N_k,1,1}(x)|^2 = p^{1-N_k}\delta(|x|_p - p^{N_k})\,\delta(x_0-1),$$
$$|\tilde{\varphi}^2_{2-N_k,1,1}(\xi)|^2 = p^{N_k-1}\delta(|\xi|_p - p^{2-N_k})\,\delta(\xi_0-p+2),$$

и, стало быть, в силу (1.3)

$$(\tilde{A}\varphi^2_{2-N_k,1,1},\varphi^2_{2-N_k,1,1}) = \int\limits_{Q_p} \tilde{a}(\xi)\,p^{N_k-1}\delta(|\xi|_p - p^{2-N_k})\,\delta(\xi_0-p+2)\,d\xi +$$
$$+\int\limits_{G} V(|x|_p)\,p^{1-N_k}\delta(|x|_p - p^{N_k})\,\delta(x_0-1)\,dx = \tilde{a}(p^{2-N_k}) + V(p^{N_k}).$$

(По поводу вычисления интегралов см. [2].) Отсюда, принимая во внимание оценку (6.3), выводим

$$(\tilde{A}\varphi^2_{2-N_k,1,1},\varphi^2_{2-N_k,1,1}) \leqslant \sup_{k\geqslant 1}\tilde{a}(p^{2-N_k}) + M = C, \quad k=1,2,\ldots \tag{6.5}$$

Так как $\lambda_k(A)\to\infty$, $k\to\infty$, то из (6.5) следует, что множество функций (6.4) компактно в $\mathscr{L}^2(G)$ (см., например, [10]). Но это противоречит ортогональности бесконечной системы функций (6.4). Полученное противоречие и доказывает (6.1).

Аналогично рассматривается и случай $p=2$.

Пусть теперь $G\subset Q_p$ — M-инвариантное открыто-замкнутое множество II типа, так что множество m содержит все целые точки отрезка $(-\infty, -N]$. Докажем предельное соотношение (6.3). Пусть оно не имеет места, т. е. существуют число $M>0$ и возрастающая последовательность N_k, $k=1, 2, \ldots$, $N_k\to\infty$, $k\to\infty$, такая, что

$$\tilde{a}(p^{N_k})\leqslant M, \quad k=1, 2, \ldots$$

Рассмотрим бесконечную ортонормальную в $\mathscr{L}^2(G)$ систему собственных функций оператора D^α, $\alpha>0$ (см. § 2),

$$\{\varphi^2_{N_k,1,1}(x), k=1,2,\ldots\}, \tag{6.6}$$

для которой, как и выше, равенство

$$(\tilde{A}\varphi^2_{N_k,1,1},\varphi^2_{N_k,1,1}) = \tilde{a}(p^{N_k}) + V(p^{2-N_k}), \quad N_k \geqslant \max(1, N-2),$$

приводит к противоречию. Предельное соотношение (6.2) доказано.

В случае $n>1$ доказательство проводится аналогично. В качестве ортонормальных систем функций (6.4) или (6.6) нужно взять произведения таких функций с различными аргументами. ▶

Замечание. Для случая $G=Q_p^n$ предельное соотношение (6.1) было доказано в работе [2].

Будем говорить, что M-инвариантный символ

$$\tilde{a}(|\xi|_p)+V(|x|_p), \quad \xi\in Q_p, \quad x\in G, \tag{6.7}$$

удовлетворяет условию (B), если при всех $\gamma\in m$, $k=1, 2, \ldots$ уравнение

$$\tilde{a}(p^{y-x})+V(p^x)=\tilde{a}(p^{k-1})+V(p^1) \tag{6.8}$$

имеет лишь конечное число целых решений $x\in m$, $y=1, 2, \ldots$

Примерами символов, удовлетворяющих условию (B), являются символы (6.7), для которых $\tilde{a}(|\xi|_p)\to+\infty$, $|\xi|_p\to\infty$ и $V(|x|_p)\to+\infty$, $|x|_p\to\to\infty$, $x\in G$.

Как и в § 4, обозначим через $\tilde{A}_0$ сужение оператора $\tilde{A}$ (с символом (6.7)) на подпространство $\mathscr{L}_0^2(G)$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть G — M-инвариантное открыто-замкнутое множество в Q_p и символ* (6.7) *удовлетворяет условию* (B). *Если $\lambda_k(A_0)\to+\infty$, $k\to\infty$, то*

$$V(|x|_p)\to+\infty,\quad |x|_p\to\infty,\quad x\in G, \tag{6.9}$$

если G — неограниченное множество;

$$\tilde{a}(|\xi|_p)\to+\infty,\quad |\xi|_p\to\infty, \tag{6.10}$$

если G II типа.

Доказательство. Так как $\lambda_k(A_0)\to+\infty$ при $k\to\infty$, то спектр оператора $\tilde{A}_0$ дискретный и состоит из собственных значений $\mu_k=\lambda_k(\tilde{A}_0)$, $k=0, 1, \ldots$, соответствующие собственные функции $\{\psi_k(|x|_p),\ k=0, 1, \ldots\}$ образуют базис в $\mathscr{L}_0^2(G)$ (см. [2, 10]). Эти функции также являются и собственными функциями оператора $\tilde{A}$. Далее, функции (4.2) (при $p=2$—(4.2′)) также являются собственными функциями оператора $\tilde{A}$, которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_\gamma^k=\tilde{a}(p^{k-\gamma})+V(p^\gamma),\quad k=1, 2, \ldots,\quad \gamma\in m.$$

В силу условия (B) каждое собственное значение λ_γ^k и μ_k конечной кратности. Итак, построен ортонормальный базис собственных функций (это функции (4.2) и функции $\psi_k(|x|_p)$, $k=0, 1, \ldots$) оператора $\tilde{A}$. Соответствующие собственные значения λ_k, $k=0, 1, \ldots$, полученные в результате упорядочивания чисел λ_γ^k, $k=1, 2, \ldots$, $\gamma\in m$, и μ_k, $k=0, 1, \ldots$,— конечной кратности и $\lambda_k\to\infty$, $k\to\infty$. По теореме XIII.64 из [10, т. 4] (см. также [2] применительно к полю Q_p) минимакс-числа $\lambda_k(A)\to+\infty$ при $k\to\infty$. По теореме 6 справедливы предельные соотношения (6.9) и (6.10). ▶

ТЕОРЕМА 8. *Пусть G — M-инвариантное открыто-замкнутое множество в Q_p, символ $\tilde{a}(\xi)+V(x)$ оператора A таков, что символ*

$$M[\tilde{a}](|\xi|_p)+M[V](|x|_p),\quad \xi\in Q_p,\quad x\in G, \tag{6.11}$$

удовлетворяет условию (B). *Если $\lambda_k(A)\to+\infty$, $k\to\infty$, то*

$$M[V](|x|_p)\to+\infty,\quad |x|_p\to\infty,\quad x\in G, \tag{6.12}$$

если G — неограниченное множество;

$$M[\tilde{a}](|\xi|_p)\to+\infty,\quad |\xi|_p\to\infty, \tag{6.13}$$

если G II типа.

Доказательство. Обозначим через $M[A]$ псевдодифференциальный оператор типа Шрёдингера в G с символом (6.11), удовлетворяющим условиям § 1, причем функции $M[\tilde{a}]$ и $M[V]$ M-инвариантны в Q_p и G соответственно. Обозначим через $M[A]_0$ сужение оператора $M[A]$ на подпространство $\mathscr{L}_0^2(G)$ (ср. § 4). Для доказательства теоремы в силу теоре-

мы 7 достаточно установить неравенство

$$\lambda_k(A) \leqslant \lambda_k(M[A]_0), \quad k=0, 1, \ldots, \tag{6.14}$$

из которого будет следовать, что $\lambda_k(M[A]_0) \to +\infty$, $k \to \infty$.

Неравенство (6.14) следует из минимакс-принципа (1.4), в силу формул (3.3) и (3.10). Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ — произвольные функции из $\mathscr{L}_0^2(G) \subset \mathscr{L}^2(G)$. Тогда

$$\lambda_k(A) \leqslant \inf_{\substack{(\psi, \varphi_j)=0,\ j=0,\ldots,\ k-1 \\ \psi \in Q(A)}} \frac{A(\psi, \psi)}{\|\psi\|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\substack{(\psi, \varphi_j)=0,\ j=0,\ldots,\ k-1 \\ \psi \in Q(A) \cap \mathscr{L}_0^2(G)}} \frac{1}{\|\psi\|^2} \left[\int_{Q_p} \tilde{a}(\xi) |\tilde{\psi}(|\xi|_p)|^2 d\xi + \int_G V(x) |\psi(|x|_p)|^2 dx \right] =$$

$$= \inf_{\substack{(\psi, \varphi_j)_0=0,\ j=0,\ldots,\ k-1 \\ \psi \in Q(M[A]_0)}} \frac{1}{\|\psi\|_0^2} \left[\int_{Q_p} M[\tilde{a}](|\xi|_p) |\tilde{\psi}(|\xi|_p)|^2 d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_G M[V](|x|_p) |\psi(|x|_p)|^2 dx \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1} \\ \varphi_j \in \mathscr{L}_0^2(G)}} \inf_{\substack{(\psi, \varphi_j)_0=0 \\ \psi \in Q(M[A]_0)}} \frac{M[A]_0(\psi, \psi)}{\|\psi\|_0^2} = \lambda_k(M[A]_0). \blacktriangleright$$

Список литературы

1. *Владимиров В. С.* О спектре некоторых псевдодифференциальных операторов над полем p-адических чисел // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, вып. 8. С. 107–124.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции над полем p-адических чисел // УМН. 1988. Т. 43, вып. 5. С. 17–53.
3. *Vladimirov V. S., Volovich I. V.* P-Adic Quantum Mechanics // Communs Math. Phys. 1989. V. 123. P. 659–676.
4. *Vladimirov V. S.* P-Adic Analysis and p-Adic Quantum Mechanics // Ann. of the New York Ac. of Sc.: Symposium in Frontiers of Math. 1988. N. Y.
5. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. С. 275–302.
6. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Применение p-адических чисел в математической физике // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 88–99.
7. *Aref'eva I. Ya, Volovich I. V.* Quantum Group Particles and Non-Archimedean Geometry // Phys. Lett. B. 1991. V. 268. P. 179–187.
8. *Кочубей А. Н.* Оператор типа Шрёдингера над полем p-адических чисел // Теор. матем. физика. 1991. Т. 86, № 3. С. 323–333.
9. *Кочубей А. Н.* Оператор дифференцирования на подмножествах поля p-адических чисел / Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56, № 5.
10. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию
14.I.1992