



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об абсциссе абсолютной сходимости одного класса обобщенных произведений Эйлера

Н. Н. Добровольский

Ключевые слова: дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13002>

1. Введение. В теории рядов Дирихле и в теории дзета-функции Римана различные произведения Эйлера играют значительную роль на протяжении почти трех столетий со времен Л. Эйлера до наших дней (см., например [1]–[3]).

В работе [4] для произвольного моноида M натуральных чисел определена дзета-функция моноида $\zeta(M|\alpha)$:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

σ_M – абсцисса абсолютной сходимости. Ясно, что справедливы неравенства $0 \leq \sigma_M \leq 1$, если $M \neq \{1\}$. При $M = \mathbb{Z}$ получаем обычную дзета-функцию Римана. Если $M = \{mk + 1 | k \geq 0\}$, то получаем хорошо известные примеры моноидов, которые изучались со времен Дирихле. Другим примером моноида является множество всех квадратичных вычетов по произвольному модулю q .

В работе [4] определена экспоненциальная последовательность простых чисел. Пусть $q \geq 2$ – произвольное натуральное число; тогда бесконечную последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ будем называть *экспоненциальной*, если выполняются соотношения $q \leq p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ ($\nu \geq 2$).

В силу постулата Бертрана, доказанного Чебышевым (см. [5]) для любого $q \geq 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел. Доказана теорема

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $q \geq 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

В работе [6] доказано, что дзета-функция $\zeta(M(PE))|\alpha$ имеет мнимую ось в качестве особой линии, которая является границей естественной области голоморфности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-41-710005_p_a.

ТЕОРЕМА 2. Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE) | \alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$.

Там же даются и другие примеры моноидов с такой же областью голоморфности.

В работе [7] показано, что для любого σ_0 при $\sigma_0 \geq 3$ существует бесконечно много σ_0 -последовательностей простых чисел \mathbb{P}_{σ_0} таких, что дзета-функция $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha)$, $\alpha = \sigma + it$ имеет абсциссу абсолютной сходимости $1/\sigma_0$ и такую же абсциссу абсолютной сходимости имеет дзета-функция $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}) | \alpha)$ моноида $M(\mathbb{P}_{\sigma_0})$. Определение σ_0 -последовательностей простых чисел более сложное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность \mathbb{P}_σ простых чисел называется σ -последовательностью, если $\mathbb{P}_\sigma = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots\}$ и найдется N_σ такое, что для любого $n > N_\sigma$ выполняются неравенства $n^\sigma \leq p_n < (n + 1)^\sigma$.

Существование таких последовательностей при $\sigma \geq 3$ следует из теоремы Ингама о простых числах в следующей формулировке (см. [8; с. 66]).

ТЕОРЕМА 3. Существует $X_I > 1$ такое, что для любого $x > X_I$ найдется простое число p_x , для которого выполнены неравенства $x^3 \leq p_x \leq (x + 1)^3$.

При $1 \leq \sigma_0 < 3$ существует бесконечно много σ_0 -последовательностей простых чисел второго рода $\mathbb{P}_{\sigma_0}^*$, для которых дзета-функция $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha)$, $\alpha = \sigma + it$, имеет абсциссу абсолютной сходимости $1/\sigma_0$ и такую же абсциссу абсолютной сходимости имеет дзета-функция $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}^*) | \alpha)$ моноида $M(\mathbb{P}_{\sigma_0}^*)$. Определение σ_0 -последовательностей простых чисел второго рода двухступенчатое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность \mathbb{N}_σ натуральных чисел называется σ -последовательностью, если $\mathbb{N}_\sigma = \{m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots\}$ и найдется σ такое, что для любого n выполняются неравенства $n^\sigma \leq m_n < (n + 1)^\sigma$.

Очевидно, что σ -последовательности натуральных чисел существуют для любого $\sigma \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Последовательность \mathbb{P}_σ^* простых чисел называется σ -последовательностью второго рода, если $\mathbb{P}_\sigma^* = \{p_{m_1} < p_{m_2} < \dots < p_{m_n} < \dots\}$ и множество номеров m_n образуют σ -последовательность \mathbb{N}_σ натуральных чисел.

Для исследования таких последовательностей используется теорема Россера о простых числах в следующей формулировке (см. [9]).

ТЕОРЕМА 4. Для любого $n > 1$ и простого p_n выполнены неравенства $n \ln n < p_n < n(\ln n + 2 \ln \ln n)$.

Так как моноиды $M(\mathbb{P}_{\sigma_0})$ и $M(\mathbb{P}_{\sigma_0}^*)$ относятся к числу моноидов с однозначным разложением на простые множители, то для них имеет место разложение дзета-функции в Эйлерово произведение:

$$\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}) | \alpha) = \prod_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}, \quad \zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}^*) | \alpha) = \prod_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}^*} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Равенства справедливы при $\sigma > 1/\sigma_0$, при этом в точке $\alpha = 1/\sigma_0$ полюс первого порядка.

Как хорошо известно (см. [10; с. 79–81]), главное значение $(\ln(1 - z))$ логарифма при $|z| < 1$ представляется сходящимся степенным рядом

$$(\ln(1 - z)) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Если положить $z = 1/p^\alpha$, $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 0$, то для любого простого p имеем $|z| < 1$ и справедливо равенство для главного логарифма

$$\left(\ln \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right)^{-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

Обозначим через $S_N(p, \alpha)$ и $R_N(p, \alpha)$ частичную сумму и остаточный ряд, соответственно,

$$S_N(p, \alpha) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{np^{n\alpha}}, \quad R_N(p, \alpha) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

Рассмотрим множитель $M_N(p, \alpha)$, заданный равенством

$$M_N(p, \alpha) = \prod_{n=1}^N e^{-1/np^{n\alpha}}.$$

Очевидно, что $\ln M_N(p, \alpha) = -S_N(p, \alpha)$. Заметим, что, вообще говоря, нельзя утверждать, что данное значение будет главным при всех значениях N и α (см. [4]).

Обозначим через $E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha)$ и $E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha)$ обобщенные произведения Эйлера

$$E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha) = \prod_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{M_N(p, \alpha)}{1 - 1/p^\alpha}, \quad E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha) = \prod_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}^*} \frac{M_N(p, \alpha)}{1 - 1/p^\alpha}. \quad (1)$$

Цель данной заметки – показать, что оба произведения Эйлера имеют абсциссу абсолютной сходимости, равную $1/((N+1)\sigma_0)$.

Важность изучения этих вопросов можно пояснить на следующих примерах.

Если для произвольного моноида M натуральных чисел рассмотреть моноид M^{-1} , определяемый условиями $M \cdot M^{-1} = \mathbb{N}$, $M \cap M^{-1} = \{1\}$, то будем иметь равенство

$$\zeta(\alpha) = \zeta(M | \alpha) \zeta(M^{-1} | \alpha).$$

Ясно, что если $0 < \sigma_M < 1$, то $\sigma_{M^{-1}} = 1$, но в точке $\alpha = \sigma_M$ дзета-функция $\zeta(M^{-1} | \alpha)$ будет иметь ноль, так как у $\zeta(M | \alpha)$ в этой точке полюс.

Если моноид M с однозначным разложением на простые множители и $P(M)$ – множество его простых элементов, то из (1) следует, что абсциссы абсолютной сходимости для дзета-функций $\zeta(M | \alpha)$ и $\zeta(P(M) | \alpha)$ совпадают. Дальше возникает вопрос о совпадении их областей аналитического продолжения.

Наконец, можно поставить вопрос об аналоге гипотезы Римана для дзета-функции произвольного моноида с однозначным разложением на простые множители.

2. Леммы об остаточном ряде.

ЛЕММА 1. Для любого $\alpha = \sigma + it$ при $\sigma > 0$ справедливо неравенство $|R_N(p, \alpha)| \leq R_N(p, \sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любого вещественного значения σ имеем равенство $|1/p^{n\alpha}| = 1/p^{n\sigma}$. Отсюда следует, что если $\alpha = \sigma + it$ и $\sigma > 0$, то

$$|R_N(p, \alpha)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{np^{n\alpha}} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{np^{n\sigma}} = R_N(p, \sigma),$$

что и доказывает утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Для любого $\sigma > 0$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{(N+1)p^{(N+1)\sigma}} < R_N(p, \sigma) < \frac{1}{p^{(N+1)\sigma}} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma \ln p} \right).$$

Доказательство. Действительно, при $n > N + 1$ имеем

$$\frac{1}{\sigma \ln p} \left(\frac{1}{p^{(n-1)\sigma}} - \frac{1}{p^{n\sigma}} \right) = \int_{n-1}^n \frac{dx}{p^{x\sigma}} > \frac{1}{p^{n\sigma}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{(N+1)p^{(N+1)\sigma}} &< R_N(p, \sigma) < \frac{1}{(N+1)p^{(N+1)\sigma}} + \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{1}{n\sigma \ln p} \left(\frac{1}{p^{(n-1)\sigma}} - \frac{1}{p^{n\sigma}} \right) \\ &= \frac{1}{(N+1)p^{(N+1)\sigma}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sigma \ln p} \frac{1}{p^{n\sigma}} - \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{1}{n\sigma \ln p} \frac{1}{p^{n\sigma}} \\ &= \frac{1}{p^{(N+1)\sigma}} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma \ln p} \right) - \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\sigma \ln p} \frac{1}{p^{n\sigma}} \\ &< \frac{1}{p^{(N+1)\sigma}} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma \ln p} \right), \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение леммы.

3. Основной результат. Для любого множества A натуральных чисел будем через $\zeta(A | \alpha)$ обозначать дзета-функцию множества A , заданную равенством

$$\zeta(A | \alpha) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Лемма 3. Для любого σ из области сходимости дзета-функций $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha)$ и $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha)$ справедливы неравенства

$$\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma) < \ln \zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}) | \sigma) < \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma) \left(1 + \frac{1}{2\sigma \ln 2} \right), \tag{2}$$

$$\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma) < \ln \zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}^*) | \sigma) < \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma) \left(1 + \frac{1}{2\sigma \ln 2} \right). \tag{3}$$

Доказательство. Действительно, из определения остаточного ряда следует, что

$$\ln \zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}) | \sigma) = \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} R_0(p, \sigma), \quad \ln \zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}^*) | \sigma) = \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}^*} R_0(p, \sigma).$$

Применяя лемму 3, получим

$$\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma) = \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{1}{p^\sigma} < \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} R_0(p, \sigma) < \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{1}{p^\sigma} \left(1 + \frac{1}{2\sigma \ln p} \right) < \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma) \left(1 + \frac{1}{2\sigma \ln 2} \right),$$

$$\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma) < \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}^*} R_0(p, \sigma) < \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma) \left(1 + \frac{1}{2\sigma \ln 2} \right),$$

что и доказывает утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 5. Ряды для $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha)$, $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha)$, $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}) | \alpha)$ и $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}^*) | \alpha)$ имеют одну и ту же абсциссу абсолютной сходимости, равную $1/\sigma_0$.

Доказательство. Так как абсцисса абсолютной сходимости ряда, имеющего эйлерово произведение, и его логарифма совпадают, то утверждение теоремы следует из леммы 4.

ЛЕММА 4. Для любого σ из области абсолютной сходимости для логарифмов обобщенных эйлеровых произведений $E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma)$ и $E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma)$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{N+1} \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma(N+1)) < \ln E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma) < \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma(N+1)) \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma \ln 2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{1}{N+1} \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma(N+1)) < \ln E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma) < \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma(N+1)) \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma \ln 2} \right). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения обобщенного эйлерова произведения и остаточного ряда следует, что

$$\ln E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma) = \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} R_N(p, \sigma), \quad \ln E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma) = \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}^*} R_N(p, \sigma).$$

Применяя лемму 3, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{N+1} \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma(N+1)) &= \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{1}{(N+1)p^{(N+1)\sigma}} < \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} R_N(p, \sigma) \\ &< \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{1}{p^{(N+1)\sigma}} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma \ln p} \right) \\ &< \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \sigma(N+1)) \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma \ln 2} \right), \\ \frac{1}{N+1} \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma(N+1)) &< \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}^*} R_N(p, \sigma) < \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \sigma(N+1)) \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+2)\sigma \ln 2} \right), \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 6. Обобщенные произведения Эйлера $E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha)$ и $E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha)$ имеют одну и ту же абсциссу абсолютной сходимости, равную $1/((N+1)\sigma_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как абсцисса абсолютной сходимости эйлерова произведения и его логарифма совпадают, то утверждение теоремы следует из леммы 4.

4. Заключение. Если ввести два множителя $M_N(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha)$ и $M_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha)$, заданные равенствами

$$\begin{aligned} M_N(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha) &= \prod_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} M_N(p, \alpha) = e^{-\sum_{n=1}^N \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha)/n}, \\ M_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha) &= \prod_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}^*} M_N(p, \alpha) = e^{-\sum_{n=1}^N \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha)/n}, \end{aligned}$$

то для обобщенных эйлеровых произведений в области абсолютной сходимости дзета-функций $\sigma > 1/\sigma_0$ будут справедливы равенства

$$E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha) = M_N(\mathbb{P}_{\sigma_0} | \alpha) \zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}) | \alpha), \quad E_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha) = M_N(\mathbb{P}_{\sigma_0}^* | \alpha) \zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}^*) | \alpha).$$

Последние равенства перестают быть верными в области $1/((N+1)\sigma_0) < \sigma \leq 1/\sigma_0$, так как оба сомножителя в правых частях равенства расходятся.

Остаются открытыми вопросы об аналитическом продолжении в левую полуплоскость $\sigma \leq 1/\sigma_0$ дзета-функций $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}) | \alpha)$ и $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0}^*) | \alpha)$.

В заключении автор выражает свою глубокую признательность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. В. Матиясевич, *Аналитическая теория чисел*, Тр. МИАН, **299**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2017, 192–202. [2] А. Лауринчикас, Р. Мацайтене, *Аналитическая теория чисел*, Тр. МИАН, **299**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2017, 155–169. [3] J. C. Andrade, S. M. Gonek, J. P. Keating, *Mathematika*, **64**:1 (2018), 137–158. [4] Н. Н. Добровольский, *Чебышевский сб.*, **18**:4 (2017), 188–208. [5] К. Чандрасекхаран, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Мир, М., 1974. [6] Н. Н. Добровольский, *Чебышевский сб.*, **20**:1 (2019), 148–163. [7] Н. Н. Добровольский, *Чебышевский сб.*, **19**:2 (2018), 142–150. [8] Э. Трост, *Простые числа*, Физматлит, М., 1959. [9] В. Rosser, *Proc. London Math. Soc.* (2), **45**:1 (2019), 21–44. [10] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, М., 1968.

Н. Н. Добровольский

Тульский государственный университет;
Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого
E-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Поступило

16.10.2020

Принято к публикации

22.10.2020