

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. M. Finashin, On the topology of real plane algebraic curves
with nondegenerate quadratic singularities,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 6, 186–204

<https://www.mathnet.ru/eng/aa747>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read
and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

April 22, 2025, 09:49:07



О ТОПОЛОГИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ С НЕВЫРОЖДЕННЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© С. М. Финашин

Для вещественной плоской кривой четной степени рассматривается двулистное накрывающее $X \rightarrow \mathbb{C}P^2$ с ветвлением вдоль ее комплексификации и факторпространство $Y = X/\text{conj}$ по инволюции комплексного сопряжения $\text{conj}: X \rightarrow X$. В. И. Арнольд использовал арифметику формы пересечений в X для получения неравенств, содержащих информацию о взаимном расположении вещественных компонент кривой. В работе изучается аналог неравенств Арнольда для кривых с невырожденными квадратичными особенностями. В качестве иллюстрации приведены примеры, описывающие топологию расположения вещественных компонент поверхности X в Y для кривых степени ≤ 6 (в частности, для ряда вещественных КЗ-поверхностей).

§1. Введение

1.1. Неравенства Арнольда и их обобщения. Традиционный метод изучения топологии неособых вещественных плоских алгебраических кривых, восходящий к работе В. И. Арнольда [1], связан с рассмотрением двулистных накрытий $X \rightarrow \mathbb{C}P^2$ с ветвлением вдоль множества комплексных точек этих кривых. Оценка числа компонент вещественной части $X_{\mathbb{R}}$ поверхности X , имеющих положительную (отрицательную) эйлерову характеристику, через соответствующие индексы инерции формы пересечений собственных подпространств инволюции комплексного сопряжения $\text{conj}: X \rightarrow X$ в $H_2(X; \mathbb{Q})$ дает неравенства Арнольда, оказывающиеся весьма эффективным средством при доказательстве невозможности определенных схем расположения овалов вещественных кривых в $\mathbb{R}P^2$.

Обобщения неравенств Арнольда на кривые с особенностями приобретают вид оценок индексов инерции квадратичных форм в $H_2(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Q})$, индуцированных при включении $X_{\mathbb{R}} \subset X$ формой пересечений в X . Последняя

Ключевые слова: вещественная алгебраическая кривая, квадратичная особенность, форма пересечений, двойная плоскость.

определена, если X является рациональным гомологическим многообразием, как, например, в случае кривой A лишь с невырожденными квадратичными особенностями, который и рассматривается в настоящей работе.

Индукцированные квадратичные формы в $H_2(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Q})$ для таких кривых были вычислены О. Я. Виро [2, 3] в терминах комбинаторного расположения компонент дополнения $\mathbb{R}P^2 - A$ кривой A . Виро оценил также верхние границы в обобщениях неравенств Арнольда. Впоследствии оценки Виро были уточнены: см. [9], где приводятся также аналогичные неравенства для поверхностей с невырожденными квадратичными особенностями. По сообщению В. М. Харламова, эти уточнения появились в результате обсуждения с Виро и были также частично мотивированы анализом специального случая (аффинные кривые нечетной степени m , рассматриваемые как проективные кривые степени $m + 1$ с квадратичными особенностями), проделанным В. И. Звониловым [8].

Примечательно, что полученные таким образом неравенства Арнольда-Виро в отличие от других известных оценок, например неравенств Харнака или неравенств Петровского, не утрачивают содержательности даже для сильно вырожденных кривых.

1.2. Результаты. В настоящей работе содержатся новые уточнения неравенств Арнольда-Виро для кривых с невырожденными квадратичными особенностями, а именно, доказана формула (2.3.2), оценивающая дефекты этих неравенств. Она не дает новой информации в случае неособых кривых, но становится тем содержательнее, чем сильнее вырождена кривая. В частности, в экстремальном случае, когда кривая распадается в конфигурацию прямых общего положения (и более общим образом: если кривая не имеет мнимых и эллиптических вещественных двойных точек и распадается на рациональные неприводимые компоненты, среди которых хотя бы одна — нечетной степени), неравенства Арнольда-Виро обращаются в равенства. Другими словами, мы получаем точные значения индексов инерции квадратичных форм, индуцированных в $H_2(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Q})$.

Я посчитал целесообразным привести в работе подробное доказательство варианта формул Виро для индуцированных квадратичных форм и уточненных оценок [9] в неравенствах Арнольда-Виро. Я надеюсь, что это заполнит существующий пробел в литературе, поскольку доказательства Виро (помимо частного случая, рассмотренного Звониловым [8]) так и не были опубликованы.¹ Кроме того, мое доказательство формул Виро использует подход, несколько отличный от исходного. Наиболее существенная модификация — это спуск конструкций в факторпространство $Y = X/\text{con}j$, который

¹Как я узнал недавно, П. Гилмер опубликовал доказательство некоторой версии неравенств Арнольда-Виро в препринте alg-geom/9604016

позволяет упростить последующий анализ за счет того, что при факторизации гиперболические вещественные квадратичные особенности поверхности X сглаживаются и пересечения циклов — компонент вещественной части $X_{\mathbb{R}}$ — становятся трансверсальными в Y . В частности, это делает форму в $H_2(X_{\mathbb{R}})$ целочисленной.

Отмечу, что некоторые из результатов настоящей работы (например, вычисления для конфигураций прямых в теореме 1.3.1) были получены достаточно давно в диссертации [5], однако основная формула (2.3.2) так же, как и сам подход, использующий спуск в факторпространство, новы.

1.3. Частный случай: конфигурации прямых. Формулировки результатов в полной общности требуют некоторой подготовки и будут даны в следующем параграфе. Рассмотренный ниже случай конфигураций прямых иллюстрирует эти результаты на простом примере.

Пусть форма $f(x_0, x_1, x_2)$ степени $2k$ задает кривую, распадающуюся на $2k$ вещественных прямых, никакие три из которых не имеют общей точки. Рассмотрим *многоугольники разбиения*, т.е. замыкания связных компонент дополнения к нашим прямым в $\mathbb{R}P^2$, и разобьем их на два семейства — в зависимости от знака, принимаемого на них формой f . Выберем и обозначим через ω любую из прямых конфигурации, если k четно; при нечетном k положим $\omega = \emptyset$.

Для двух различных многоугольников разбиения Γ и Δ одного знака положим

$$v(\Gamma, \Delta) = \text{ord}(\Gamma \cap \Delta) - 2 \text{ord}(\Gamma \cap \Delta \cap \omega),$$

где ord обозначает число точек. Нетрудно видеть, что при $k \geq 3$ это равносильно тому, что

$$v(\Gamma, \Delta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Gamma \cap \Delta = \emptyset, \\ -1, & \text{если } \Gamma \cap \Delta \cap \omega \neq \emptyset, \\ 1, & \text{если } \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset, \Gamma \cap \Delta \cap \omega = \emptyset. \end{cases}$$

При $k \geq 2$ пусть $v(\Gamma, \Gamma) =$ число сторон многоугольника Γ минус 4, и положим $v(\Gamma, \Gamma) = 0$ при $k = 1$. Матрицы, составленные из элементов $v(\Gamma, \Delta)$, где Γ и Δ пробегает множество всех многоугольников разбиения одного знака, задают квадратичные формы, которые мы обозначим $v^\varepsilon = v^\varepsilon(f)$, $\varepsilon = \pm$.

Пусть $\sigma_+(v^\varepsilon)$, $\sigma_-(v^\varepsilon)$, $\sigma_0(v^\varepsilon)$ обозначают число положительных, отрицательных и нулевых членов диагонализации формы v^ε . Очевидно, что $\sigma_+(v^\varepsilon) + \sigma_-(v^\varepsilon) + \sigma_0(v^\varepsilon) = n^\varepsilon$ есть число многоугольников знака ε . Применительно к конфигурациям результаты автора (см. соотношение (2.3.2) ниже) дают следующее.

Теорема 1.3.1. Значения $\sigma_+(v^\epsilon)$ и $\sigma_0(v^\epsilon)$ зависят лишь от k и не зависят от выбора конфигурации, прямой ω (при четном k) и знака ϵ :

$$\begin{aligned}\sigma_+(v^\epsilon) &= \frac{1}{2}(k-1)(k-2), \\ \sigma_0(v^\epsilon) &= 2k-1, \\ \sigma_-(v^\epsilon) &= n^\epsilon - \frac{1}{2}k(k+1).\end{aligned}$$

1.4. Структура работы. В §2 содержатся формулировки основных результатов. В §3 доказываются варианты формул Виро (2.1.1) и (2.1.2) для квадратичных форм, индуцированных в $H_2(X_{\mathbb{R}})$ из Y . В §4 доказываются неравенства Арнольда–Виро в уточненной форме [9] и основной результат — формула дефектов (2.3.2). В §5 приводится ряд примеров, описывающих топологию расположения $X_{\mathbb{R}}$ в Y в нескольких простых случаях.

1.5. Благодарности. Я выражаю признательность О. Я. Виро, познакомившему меня со своими неопубликованными заметками [3] и сделавшего ряд ценных замечаний по поводу настоящей статьи. Я благодарен также В. М. Харламову за замечания, касающиеся истории неравенств Арнольда–Виро.

§2. Формулировки основных результатов

2.1. Формула для квадратичной формы. Пусть $A \subset \mathbb{C}P^2$ — множество комплексных точек алгебраической кривой, задаваемой вещественной формой $f(z_0, z_1, z_2)$ степени $2k$; $A_{\mathbb{R}} = A \cap \mathbb{R}P^2$ — вещественная часть кривой A . Всюду в дальнейшем предполагается, что A не имеет особенностей, отличных от простых двойных точек (типа A_1).

Как хорошо известно, вещественные двойные точки могут быть двух типов в зависимости от топологии их расположения в $A_{\mathbb{R}}$. Они будут называться эллиптическими (изолированными) и гиперболическими (крестообразные).

Плоскость $\mathbb{R}P^2$, очевидно, распадается в объединение двух множеств

$$W^\pm = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{R}P^2 \mid \pm f(x_0, x_1, x_2) \geq 0\},$$

пересекающихся по $A_{\mathbb{R}}$, их общей границе.

ϵ -Компонентами разбиения кривой A будем называть замыкания компонент внутренности множества W^ϵ , $\epsilon = \pm$.

Определим разделяющую кривую $\omega \subset \mathbb{R}P^2$ следующим образом. Если k нечетно или гомоморфизм включения $H_1(A_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^2)$ тривиален, положим $\omega = \emptyset$. В противном случае выберем в качестве ω простую замкнутую

кусочно-гладкую кривую, содержащуюся в $A_{\mathbb{R}}$ и реализующую нетривиальный элемент группы $H_1(\mathbb{R}P^2)$.

Пусть Γ, Δ — пара ε -компонент. Положим

$$v(\Gamma, \Delta) = \text{ord}(\Gamma \cap \Delta) - 2\omega(\Gamma, \Delta), \quad (2.1.1)$$

где $\omega(\Gamma, \Delta)$ обозначает число точек пересечения $\Gamma \cap \Delta \cap \omega$, в которых ω локально разделяет Γ и Δ , т.е. $\Gamma \cap U$ и $\Delta \cap U$ находятся по разные стороны от $\omega \cap U$ для достаточно малой регулярной окрестности U рассматриваемой точки пересечения Γ и Δ (см. рис. 1).

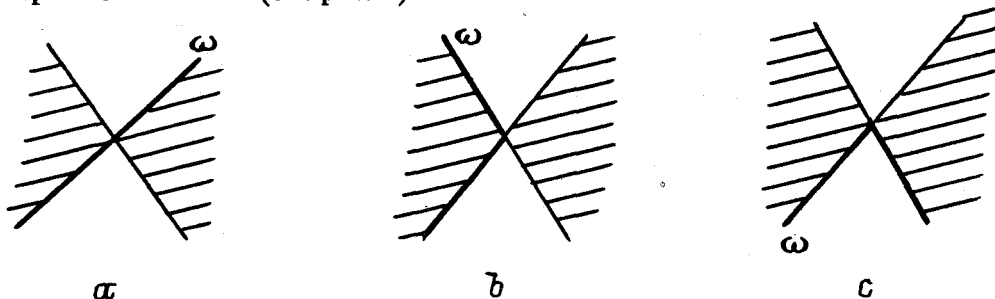


Рис. 1. ω локально разделяет заштрихованные области в случаях (a) и (b), но не разделяет их в случае (c)

Положим далее

$$v(\Gamma, \Gamma) = n(\Gamma) + 4e(\Gamma) - 4\chi(\overset{\circ}{\Gamma}), \quad (2.1.2)$$

где $\overset{\circ}{\Gamma}$ — внутренность компоненты Γ , χ — эйлерова характеристика, $e(\Gamma)$ — число эллиптических точек кривой A , расположенных внутри Γ , а $n(\Gamma)$ — число гиперболических точек на границе Γ , сосчитанных с кратностью 1, если Γ примыкает к ним с одной стороны; с кратностью 0, если примыкает дважды и при этом ω локально разделяет примыкающие части; и с кратностью 4, если ω не разделяет примыкающих частей или вообще не проходит через эту точку.

Обозначим через v^ε квадратичную форму, определенную матрицей $v(\Gamma, \Delta)$, где Γ и Δ пробегает множество всех ε -компонент при k нечетном, и всех ε -компонент, за исключением ε -компоненты, имеющей неориентируемую внутренность (если такая существует), при k четном. Нетрудно видеть, что неориентируемую внутренность может иметь не более чем одна компонента, и такая компонента существует если и только если гомоморфизм включения $H_1(A_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^2)$ тривиален.

2.2. Неравенства Арнольда для кривых с невырожденными квадратичными особенностями. Пусть r обозначает число неприводимых компонент кривой A ; положим $\nu = 0$, если все неприводимые компоненты имеют четную степень, и $\nu = 1$ в противном случае; e, h, i обозначают соответственно число эллиптических и гиперболических двойных точек и пар комплексно-сопряженных мнимых особых точек.

Неравенства Арнольда–Виро для индексов инерции форм v^ϵ выглядят следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_+(v^\epsilon) \leq \frac{1}{2}(k-1)(k-2), \\ \sigma_+(v^\epsilon) + \sigma_0(v^\epsilon) \leq \frac{1}{2}(k-1)(k-2) + r - \nu, \\ \sigma_-(v^\epsilon) \leq \frac{3}{2}k(k-1) + \chi(W^\epsilon) - (e+i), \\ \sigma_-(v^\epsilon) + \sigma_0(v^\epsilon) \leq \frac{3}{2}(k-1) + \chi(W^\epsilon) - (e+i) + r - \nu. \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

2.3. Формула для дефектов. Для чисел

$$\begin{aligned} d_+^\epsilon &= \frac{1}{2}(k-1)(k-2) - \sigma_+(v^\epsilon), \\ d_0^\epsilon &= r - 1 - \sigma_0(v^\epsilon), \\ d_-^\epsilon &= \frac{3}{2}k(k-1) + \chi(W^\epsilon) - (e+i) - \sigma_-(v^\epsilon), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

характеризующих дефекты этих неравенств, мы докажем соотношение

$$d_+^\epsilon + d_0^\epsilon + d_-^\epsilon = D^\epsilon, \quad (2.3.2)$$

где D^ϵ определяется следующим образом.

Пусть e^+ и e^- обозначают число эллиптических особых точек кривой A , лежащих внутри W^+ и W^- ; g — род кривой A , т.е. сумма родов ее неприводимых компонент; l^ϵ — число стягиваемых в $\mathbb{R}P^2$ связанных компонент кривой $A_{\mathbb{R}}$, к которым W^ϵ подходит снаружи. Чтобы прояснить последнее определение, отметим, что дополнение $(\mathbb{R}P^2 - C)$ стягиваемой в $\mathbb{R}P^2$ компоненты $C \subset A_{\mathbb{R}}$ содержит ровно одну неориентируемую компоненту, которая по определению считается подходящей к C снаружи. Для $t = 0, 1$ положим $\chi_t^\epsilon = 1$,

если $\overset{\circ}{W}^\epsilon$ содержит неориентируемую компоненту связности и $k \equiv t \pmod{2}$; в противном случае положим $\varkappa_1^\epsilon = 0$. Положим по определению

$$D^\epsilon = g - l^\epsilon + e^{-\epsilon} + i + \varkappa_0^\epsilon. \quad (2.3.3)$$

2.4. Некоторые следствия. Отметим, что формула (2.3.2) вместе с неравенствами (2.2.1) дает значения индексов инерции формы v^ϵ , если, например, A распадается на рациональные кривые и имеет лишь гиперболические особенности. В этом случае, предположив дополнительно, что $\varkappa_1^\epsilon = 0$, имеем $D^\epsilon = 0$, поскольку либо $l^\epsilon = \varkappa_0^\epsilon = 0$, либо $l^\epsilon = \varkappa_0^\epsilon = 1$. Неравенства (2.2.1) дают $d_+^\epsilon = d_0^\epsilon = d^\epsilon = 0$, если хотя бы одна из неприводимых компонент нечетна. Если все они четны, то при $\varkappa_1^\epsilon = 1$ имеем $l^\epsilon = 1$, $D^\epsilon = -1$, $d_+^\epsilon = d_-^\epsilon = 0$, $d_0^\epsilon = -1$, а при $\varkappa_1^\epsilon = 0$ три возможности: либо $d_+^\epsilon = d_-^\epsilon = d_0^\epsilon = 0$, либо $d_+^\epsilon = 1$, $d_0^\epsilon = -1$, $d_-^\epsilon = 0$, либо $d_+^\epsilon = 0$, $d_0^\epsilon = -1$, $d_-^\epsilon = 1$.

§3. Формы v^ϵ индуцированы формами пересечений

3.1. Подход Арнольда-Виро. Двухлистное накрывающее X над CP^2 с ветвлением вдоль A удобно представлять заданным уравнением $w^2 = f(z_0, z_1, z_2)$ во взвешенном квазипроективном трехмерном пространстве с координатами z_0, z_1, z_2 веса 1 и w веса k ; при этом проекция $p: X \rightarrow CP^2$ — это отображение, забывающее координату w . Инволюцию комплексного сопряжения на CP^2 можно двумя способами поднять в X , получив антиголоморфные инволюции

$$\text{conj}^\epsilon: X \rightarrow X, (z_0 : z_1 : z_2 : w) \mapsto (\bar{z}_0 : \bar{z}_1 : \bar{z}_2 : \pm \bar{w}), \quad \epsilon = \pm.$$

Обозначим через $X_{\mathbb{R}}^\epsilon$ множество неподвижных точек инволюции conj^ϵ , а через $q^\epsilon: X \rightarrow Y^\epsilon$ — проекцию на факторпространство $Y^\epsilon = X/\text{conj}^\epsilon$. Поскольку это не будет приводить к недоразумениям и будет всегда ясно из контекста, мы сохраним обозначение $X_{\mathbb{R}}^\epsilon$ также и для образа этого множества $q^\epsilon(X_{\mathbb{R}}^\epsilon) \subset Y^\epsilon$.

Нетрудно видеть, что $X_{\mathbb{R}}^\epsilon = p^{-1}(W^\epsilon)$, причем проекция p отображает $X_{\mathbb{R}}^\epsilon$ на W^ϵ как двухлистное накрытие с отождествлением листов вдоль $A_{\mathbb{R}}$. Хорошо известно и нетрудно проверить, что это накрытие тривиально при четном k и является ориентирующим накрытием при нечетном. Для ϵ -компоненты разбиения $\Gamma \subset W^\epsilon$ ее прообраз $\tilde{\Gamma} = p^{-1}(\Gamma)$ представляет цикл, определяющий некоторый элемент группы $H_2(X_{\mathbb{R}}^\epsilon)$, за единственным возможным исключением, когда $\overset{\circ}{\Gamma}$ неориентируемо и k четно. При этом ориентация цикла $\tilde{\Gamma}$ при нечетном k определена канонически, а при четном k задается кривой ω как это описывается в данном параграфе ниже.

Поскольку линки невырожденных квадратичных особых точек поверхности X гомеоморфны $\mathbb{R}P^3$, т.е. \mathbb{Q} -гомологической сфере, то X является \mathbb{Q} -гомологическим многообразием и имеет невырожденную форму пересечений $H_2(X; \mathbb{Q}) \times H_2(X; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$. Согласно Виро [3], для любой пары ε -компонент Γ, Δ имеет место равенство

$$\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle_X = \frac{1}{2} v^\varepsilon(\Gamma, \Delta), \quad (3.1.1)$$

где $\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle_X$ обозначает коэффициент пересечения циклов $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\Delta}$.

Ниже мы даем аналогичную, но более элементарную интерпретацию форм v^ε , спуская конструкции в Y . А именно, мы докажем аналогичную (и эквивалентную) формулу

$$\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle_{Y^\varepsilon} = v^\varepsilon(\Gamma, \Delta). \quad (3.1.2)$$

3.2. Спуск в факторпространство. Напомним прежде всего, что если A (и, следовательно, X) не имеет особенностей, то проекция факторизации $q^\varepsilon: X \rightarrow Y^\varepsilon$ является двулистным накрытием, разветвленным вдоль $X_{\mathbb{R}}^\varepsilon$. В частности Y^ε — замкнутое многообразие, которое можно снабдить ориентацией и гладкой структурой так, что q^ε — гладкое отображение, сохраняющее ориентацию. Те же аргументы дают гладкую структуру в дополнении $Y^\varepsilon - q^\varepsilon(S)$, где S — множество особых точек поверхности X . Оказывается, что если $P \in S$ — неизолированная квадратичная особенность, то структура гладкого многообразия на Y^ε может быть продолжена также и в точке P [6]. Это показывает, что Y^ε является многообразием в окрестностях циклов $\tilde{\Gamma}$ для всех ε -компонент Γ . Мы покажем ниже, что $v(\Gamma, \Delta)$ равно индексу пересечения $\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle_{Y^\varepsilon}$ циклов $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\Delta}$ в Y^ε , чем, по сути, дается и доказательство формулы (3.1.1).

Доказательство основывается на следующем наблюдении (см. [6, теоремы 4.1, 4.2]).

Рассмотрим множество X комплексных точек алгебраической поверхности над \mathbb{R} с инволюцией комплексного сопряжения $\text{conj}: X \rightarrow X$ (или, более общо, комплексную поверхность с антиголоморфной инволюцией). Пусть $Y = X/\text{conj}$, $X_{\mathbb{R}} = \text{Fix}(\text{conj})$, $q: X \rightarrow Y$ — проекция, в соответствии с предыдущими обозначениями. Пусть $P \in X_{\mathbb{R}}$ — простая квадратичная особенность поверхности X . Подобно двойной точке на кривой, P может быть либо эллиптической, либо гиперболической. В первом случае P изолирована в $X_{\mathbb{R}}$, во втором — выглядит локально как вершина конуса. Пусть P — гиперболическая точка, U — ее достаточно малая регулярная окрестность в Y ,

$C = U \cap X_{\mathbb{R}}$ — упомянутый конус и C_1, C_2 — его половинки, топологические диски. Пусть X' получено из X малой вещественной деформацией; conj' , $X'_{\mathbb{R}}$, Y' определены так же, как и для X . При этом возможны два вещественно-топологически различных способа сглаживания особенности P , как и для модели — обычного конуса в \mathbb{R}^3 , при возмущении которого получается либо двуполостный, либо однополостный гиперboloид. Очевидно, что дифференциально-топологический результат возмущения особой точки P — так же как и результат ее раздутия для пары $(Y, X_{\mathbb{R}})$ — локален и описывается некоторой перестройкой пары (U, C) (при наличии у X нескольких особенностей каждая из них дает, разумеется, свою локальную перестройку). Согласно [6], эти перестройки описываются алгебраическими моделями. А именно, существует гомеоморфизм $U \rightarrow \mathbb{C}^2$, сохраняющий индуцируемую из X ориентацию в U , переводящий C_1 и C_2 в координатные оси $\mathbb{C} \times 0$ и $0 \times \mathbb{C}$ и дающий продолжение гладкой структуры на Y в точку P . При этом как возмущение особенности в точке P по модели однополостного гиперboloида, так и раздутие в точке P сохраняет U и заменяет пару дисков C_1, C_2 цилиндром, расположенным в U с точностью до изотопии как результат возмущения двойной точки комплексной кривой в \mathbb{C}^2 . В случае же возмущения по образцу двуполостного гиперboloида результатом для пары (U, C) является раздутие в точке P в указанной алгебраической модели для (U, C) .

Этот результат показывает, что каждая общая точка ϵ -компонент Γ и Δ дает вклад ± 1 в индекс пересечения $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta})_{Y^c}$, причем точка $P \in \tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Delta}$ дает вклад $+1$, если ориентации циклов $\tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}$ приходят из ориентации вещественной поверхности, полученной из $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\Delta}$ в результате раздутия в точке P или в результате ее возмущения.

Если P — эллиптическая особая точка, то ее линком в Y является линзовое пространство $L(4, 1)$. В результате ее возмущения, при котором возникает сферическая компонента в $X_{\mathbb{R}}$, происходит замена конуса над $L(4, 1)$ на расслоение над сферой со слоем диск и числом Эйлера -4 . В результате возмущения другого типа, при котором P исчезает, не оставляя в $X_{\mathbb{R}}$ компонент, этот конус заменяется на многообразие, диффеоморфное трубчатой окрестности $\mathbb{R}P^2$ в CP^2 . Некоторые дополнительные подробности можно извлечь из примера 5.2.

3.3. Ориентация циклов $\tilde{\Gamma}$. Опишем теперь наш способ ориентации циклов $\tilde{\Gamma}$. Для этого рассмотрим дополнение $X_{\mathbb{R}}^c - p^{-1}(L)$ бесконечно удаленной прямой $L = \{(0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{R}P^2\}$, которое, очевидно, задается в \mathbb{R}^3 уравнением $f(1, x_1, x_2) = \epsilon w^2$. Для любой ϵ -компоненты $\Gamma \subset W^c$ аффинная часть $\tilde{\Gamma}_a = \tilde{\Gamma} - p^{-1}(L)$ накрывающего ϵ -компоненту Γ цикла $\tilde{\Gamma}$ раскладывается в объединение $\tilde{\Gamma}_a = \tilde{\Gamma}_a^+ \cup \tilde{\Gamma}_a^-$, где $\tilde{\Gamma}_a^\pm$ задается неравенством $\pm w \geq 0$. Зафиксировав стандартную ориентацию в $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}P^2 - L$, ориентируем $\tilde{\Gamma}_a$ таким образом,

что $p|_{\tilde{\Gamma}_a^+}$ сохраняет ориентацию, а $p|_{\tilde{\Gamma}_a^-}$ — обращает. Нетрудно видеть, что эти ориентации согласованы так, что дают положительные индексы пересечения в точках $P \in \tilde{\Gamma}_a \cap \tilde{\Delta}_a$ для пары ϵ -компонент Γ, Δ .

Заметим теперь, что при нечетном k построенные ориентации на $\tilde{\Gamma}_a$ продолжаются до ориентаций циклов $\tilde{\Gamma}$, а при четном — не продолжаютя через $p^{-1}(L)$, поскольку в первом случае компоненты $\tilde{\Gamma}_a^+$ склеиваются вдоль $p^{-1}(L) \cap \tilde{\Gamma}$ с $\tilde{\Gamma}_a^-$, а во втором — $\tilde{\Gamma}_a^+$ склеивается с $\tilde{\Gamma}_a^+$, а $\tilde{\Gamma}_a^-$ — с $\tilde{\Gamma}_a^-$. Это легко следует, например, из того, что в первом случае умножение координат x_0, x_1, x_2, w на -1 не изменяет точки в X , а во втором — заменяет точку из $\tilde{\Gamma}_a^+$ на точку из $\tilde{\Gamma}_a^-$.

Таким образом, при нечетном k ориентации циклов $\tilde{\Gamma}$ уже определены. При четном k предположим сначала, что внутренность $\overset{\circ}{\Gamma}$ любой ϵ -компоненты Γ ориентируема, и воспользуемся кривой ω : ориентируем $\mathbb{R}P^2 - \omega$, рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}P^2 - (L \cup \omega)$, состоящую из точек, в которых ориентации, приходящие из $\mathbb{R}P^2 - L$ и $\mathbb{R}P^2 - \omega$, различны, и изменим ориентацию на $X_{\mathbb{R}}^{\epsilon} \cap p^{-1}(\Omega)$ на противоположную. Теперь ориентации продолжаютя на циклы $\tilde{\Gamma}$, и в точках $P \in \tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Delta} \cap p^{-1}(\omega)$ пересечение циклов $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\Delta}$ равно, очевидно, -1 .

Если для какой-нибудь ϵ -компоненты Γ ее внутренность $\overset{\circ}{\Gamma}$ неориентируема, то выберем простую замкнутую дезориентирующую кривую $\gamma \subset \overset{\circ}{\Gamma}$ и воспользуемся ею как кривой ω выше. Мы получим ориентации циклов $\tilde{\Gamma}$ лишь с положительными индексами пересечений.

3.4. Индексы самопересечений циклов $\tilde{\Gamma}$. В заключение нам осталось найти индексы самопересечений $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma})_{Y^{\epsilon}}$. Для этого возмутим уравнение $f = 0$ кривой A так, чтобы ее особые эллиптические точки исчезли, не порождая новых овалов кривой $A_{\mathbb{R}}$, а гиперболические точки сгладились так, чтобы компонента Γ не слилась с примыкающими ϵ -компонентами. Очевидно, что как гиперболические точки, так и эллиптические, лежащие внутри Γ , накрываются гиперболическими особенностями поверхности X . При этом указанное возмущение кривой A возмутит их по модели двуполостного гиперboloида и, следовательно, даст поверхность X_1 с факторпространством Y_1^{ϵ} , полученным раздутиями из Y^{ϵ} . Раздутие, соответствующее гиперболической точке на границе компоненты Γ , уменьшает индекс самопересечения цикла $\tilde{\Gamma}$ в Y^{ϵ} на 1, если это не точка соприкосновения Γ с собой. В последнем случае в результате раздутия этот индекс уменьшится на 4 или не изменится, в зависимости от знака локального индекса самопересечения цикла $\tilde{\Gamma}$ в этой точке: знак “+” дает 4, знак “-” дает 0. Сглаживание эллиптической точки внутри Γ всегда приводит к уменьшению $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma})_{Y^{\epsilon}}$ на 4, поскольку соответствующий

локальный индекс самопересечения всегда положителен. Таким образом,

$$\langle \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_1 \rangle_{Y_1^\epsilon} = \langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma} \rangle_{Y^\epsilon} - n(\Gamma) - 4e(\Gamma), \quad (3.4.1)$$

где $\tilde{\Gamma}_1$ — цикл, соответствующий $\tilde{\Gamma}$ в пространстве Y_1^ϵ .

Поскольку $\tilde{\Gamma}_1$ — компонента связности вещественной части $X_{1\mathbb{R}}^\epsilon$ неособой поверхности X_1 , то $\langle \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_1 \rangle_{X_1} = -\chi(\tilde{\Gamma}_1)$. Поскольку $X_{1\mathbb{R}}^\epsilon$ — множество ветвления двулистного накрытия $q_1: X_1 \rightarrow Y_1^\epsilon$, то $\langle \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_1 \rangle_{Y_1^\epsilon} = 2\langle \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_1 \rangle_{X_1}$. Наконец, очевидно, $\chi(\tilde{\Gamma}_1) = 2\chi(\tilde{\Gamma})$, и окончательно

$$\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma} \rangle_{Y^\epsilon} = -4\chi(\tilde{\Gamma}) + n(\Gamma) + 4e(\Gamma), \quad (3.4.2)$$

т.е. имеет место формула (2.1.2).

§4. Доказательство неравенств Арнольда–Виро и формулы для суммы дефектов

4.1. Схема доказательства. Неравенства Арнольда–Виро сводятся по сути к интерпретации неравенств

$$\begin{cases} \sigma_{\pm}(v^\epsilon) \leq b_2^{\pm}(Y^\epsilon), \\ \sigma_{\pm}(v^\epsilon) + \sigma_0(v^\epsilon) \leq b_2^{\pm}(Y^\epsilon) + \delta^\epsilon, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

где $b_2^{\pm}(Y^\epsilon)$ — индексы инерции формы пересечений \mathbb{Q} -гомологического многообразия Y^ϵ , $\alpha^\epsilon: H_2(X_{\mathbb{R}}^\epsilon; \mathbb{R}) \rightarrow H_2(Y^\epsilon; \mathbb{R})$ — гомоморфизм включения и $\delta^\epsilon = \dim \ker \alpha^\epsilon$. Неравенства (4.1.1), очевидно, следуют из невырожденности упомянутой формы пересечений и того, что форма v^ϵ индуцирована из нее гомоморфизмом α^ϵ . Неравенства Арнольда–Виро в форме (2.2.1) вытекают из (4.1.1) и следующих двух лемм.

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} b_2^+(Y^\epsilon) &= \frac{1}{2}(k-1)(k-2), \\ b_2^-(Y^\epsilon) &= \frac{3}{2}k(k-1) + \chi(W^\epsilon) - (e+i). \end{aligned}$$

Лемма 2. $\delta^\epsilon \leq r - \nu$.

4.2. Доказательство леммы 1. Предположим сперва, что кривая A неособа. Применяя формулы Римана-Гурвица и Хирцебруха к разветвленным накрытиям $p: X \rightarrow \mathbb{C}P^2$ и $q^\epsilon: X \rightarrow Y^\epsilon$, получим соответственно

$$\begin{aligned}\chi(X) &= 2\chi(\mathbb{C}P^2) - \chi(A) = 4k^2 - 6k + 6, \\ \sigma(X) &= 2\sigma(\mathbb{C}P^2) - \langle A, A \rangle_X = 2 - 2k^2, \\ \chi(X) &= 2\chi(Y^\epsilon) - \chi(X_{\mathbb{R}}^\epsilon), \\ \sigma(X) &= 2\sigma(Y^\epsilon) - \langle X_{\mathbb{R}}^\epsilon, X_{\mathbb{R}}^\epsilon \rangle_X = 2\sigma(Y^\epsilon) + \chi(X_{\mathbb{R}}^\epsilon).\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $b_1(Y^\epsilon) = b_3(Y^\epsilon) = 0$ и, более того, что Y^ϵ односвязно, если $A_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$. Это дает нам

$$\begin{aligned}b_2^+(Y^\epsilon) &= \frac{1}{2}(k-1)(k-2), \\ b_2^-(Y^\epsilon) &= \frac{3}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}\chi(X_{\mathbb{R}}^\epsilon) = \frac{3}{2}k(k-1) + \chi(W^\epsilon).\end{aligned}$$

Пусть теперь A имеет особенности — простые двойные точки — и неособая кривая A_1 получена из A таким возмущением, при котором смежные ϵ -компоненты разбиения кривой A сливаются в каждой гиперболической особой точке, эллиптические особенности, расположенные внутри W^ϵ , дают по компоненте — овалу в $A_{1\mathbb{R}}$, а расположенные снаружи — исчезают. Для соответствующего кривой A_1 факторпространства Y_1^ϵ имеем

$$\begin{cases} b_2^+(Y_1^\epsilon) = \frac{1}{2}(k-1)(k-2), \\ b_2^-(Y_1^\epsilon) = \frac{3}{2}k(k-1) + \chi(W_1^\epsilon) = \frac{3}{2}k(k-1) + \chi(W^\epsilon) - e. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Заметим теперь, что гиперболические особые точки и эллиптические особенности внутри W^ϵ накрываются гиперболическими особенностями поверхности X и при указанном выше способе их возмущения топологический тип Y^ϵ не меняется (см. §3). При возмущении пары комплексно сопряженных мнимых точек на Y^ϵ происходит перестройка, заменяющая рациональный диск — конус над $\mathbb{R}P^3$ — на трубчатую окрестность исчезающего цикла — сферы с индексом самопересечения -2 . При этом, очевидно, $b_2^+(Y^\epsilon)$ не меняется, а $b_2^-(Y^\epsilon)$ увеличивается на 1. При указанном выше способе возмущения

эллиптической особенности, расположенной вне W^ϵ , рациональный диск в Y^ϵ заменяется на другой рациональный диск, как это указано в §3, что не изменяет $b_2^\pm(Y^\epsilon)$. Таким образом, $b_2^+(Y_1^\epsilon) = b_2^+(Y^\epsilon)$ и $b_2^-(Y_1^\epsilon) = b_2^+(Y^\epsilon) - i$, что вместе с (4.2.1) доказывает утверждение леммы. •

4.3. Доказательство леммы 2. Из точности гомологической последовательности пары (CP^2, A) с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_3(CP^2) & \longrightarrow & H_3(CP^2, A) & \longrightarrow & H_2(A) \longrightarrow H_2(CP^2) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & 0 & & (\mathbb{Z}/2)^r & & \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

следует, что $H_3(CP^2, A; \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^{r-\nu}$.

Рассмотрим отрезок последовательности Смита для автоморфизма накрытия $X \rightarrow CP^2$ (тоже с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$):

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z}/2 & & & & \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ H_4(X) & \xrightarrow{0} & H_4(CP^2, A) & \longrightarrow & H_3(CP^2, A) & & \\ & & \longrightarrow & H_3(X) & \longrightarrow & H_3(CP^2, A) & \longrightarrow H_2(CP^2, A) \oplus H_2(A) \end{array}$$

В нем последний гомоморфизм мономорфен, так как мономорфен гомоморфизм $H_3(CP^2, A; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_2(A; \mathbb{Z}/2)$. Это дает короткую точную последовательность групп гомологий (с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_4(CP^2, A) & \longrightarrow & H_3(CP^2; A) & \longrightarrow & H_3(X) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathbb{Z}/2 & & (\mathbb{Z}/2)^{r-\nu} & & \end{array}$$

откуда следует, что $H_3(X; \mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)^{r-1-\nu}$.

Из точности отрезка последовательности Смита (с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$) для инволюции conj^ϵ

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_4(Y^\epsilon, X_{\mathbb{R}}^\epsilon) & \longrightarrow & H_3(Y^\epsilon, X_{\mathbb{R}}^\epsilon) & \longrightarrow & H_3(X) \longrightarrow \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathbb{Z}/2 & & (\mathbb{Z}/2)^{r-1-\nu} & & \end{array}$$

следует, что $\dim_{\mathbb{Z}/2} H_3(Y^\epsilon, X_{\mathbb{R}}^\epsilon; \mathbb{Z}/2) \leq r - \nu$, а из формулы универсальных коэффициентов для пары $(Y^\epsilon, X_{\mathbb{R}}^\epsilon)$ — что

$$\dim_{\mathbb{R}} H_3(Y^\epsilon, X_{\mathbb{R}}^\epsilon; \mathbb{R}) \leq \dim_{\mathbb{Z}/2} H_3(Y^\epsilon, X_{\mathbb{R}}^\epsilon; \mathbb{Z}/2).$$

Наконец, последовательность пары $(Y^\epsilon, X_{\mathbb{R}}^\epsilon)$

$$H_3(Y^\epsilon, X_{\mathbb{R}}^\epsilon; \mathbb{R}) \rightarrow H_2(X_{\mathbb{R}}^\epsilon; \mathbb{R}) \xrightarrow{\alpha^\epsilon} H_2(Y^\epsilon; \mathbb{R})$$

дает оценку $\delta^\epsilon \leq \dim_{\mathbb{R}} H_3(Y^\epsilon, X_{\mathbb{R}}^\epsilon; \mathbb{R})$, что вместе с двумя предыдущими неравенствами влечет требуемый результат.

4.4. Доказательство формулы (2.3.2). В заключение параграфа докажем формулу (2.3.2) для дефектов неравенств Арнольда-Виро. Для этого нам потребуются лишь следующие элементарные соотношения.

Лемма 3. Пусть n^ϵ — число ϵ -компонент разбиения кривой A . Тогда

$$\chi(W^\epsilon) = n^\epsilon - h + e^{-\epsilon} - l^\epsilon, \tag{1}$$

$$g + e + h + 2i = 2k^2 - 3k + r, \tag{2}$$

$$\sigma_+(v) + \sigma_-(v^\epsilon) + \sigma_0(v^\epsilon) = n^\epsilon - \varkappa_0^\epsilon. \tag{3}$$

Доказательство. (1) — элементарное упражнение, которое мы оставляем читателю. (2) следует из того, что при возмущении каждой двойной точки род g увеличивается на 1 или число компонент r уменьшается на 1. Наконец, (3) выражает то, что среди общего числа ϵ -компонент, равного n^ϵ , при определении формы v^ϵ мы исключили из рассмотрения лишь одну — в точности, когда $\varkappa_0^\epsilon = 1$.

Используя тождества последней леммы, получаем

$$\begin{aligned} & d_+^\epsilon + d_0^\epsilon + d_-^\epsilon \\ &= \frac{1}{2}(k-1)(k-2) + r - 1 + \frac{3}{2}k(k-1) \\ & \quad + \chi(W^\epsilon) - (e+i) - (\sigma_+(v^\epsilon) + \sigma_0(v^\epsilon) + \sigma_-(v^\epsilon)) \\ &= 2k^2 - 3k + r + (n^\epsilon - h + e^{-\epsilon} - l^\epsilon) - (e+i) - (n^\epsilon - \varkappa_0^\epsilon) \\ &= g + e + h + 2i - h + e^{-\epsilon} - l^\epsilon - e - i + \varkappa_0^\epsilon = g + i + e^{-\epsilon} - l^\epsilon + \varkappa_0^\epsilon \\ &= D^\epsilon. \end{aligned}$$

§5. Топология расположения $X_{\mathbb{R}}^{\epsilon}$ в Y^{ϵ} : несколько примеров

Описание формы пересечений ϵ -циклов в Y^{ϵ} , данное в настоящей работе, можно рассматривать как первый шаг на пути топологического описания расположения $X_{\mathbb{R}}^{\epsilon}$ в Y^{ϵ} . В общем случае это весьма нетривиальная задача, поскольку уже дифференциальный тип многообразия Y неизвестен для значительной части кривых A степени $2k \geq 8$. Однако для кривых, распадающихся в конфигурации вещественных прямых общего положения, Y^{ϵ} диффеоморфно (напомним, что Y^{ϵ} сглаживаемо) связной сумме $\#_p \mathbb{C}P^2 \#_q \overline{\mathbb{C}P^2}$, где

$$p = p_g(X) = \frac{1}{2}(k-1)(k-2) = \sigma^+(v^{\epsilon}), \quad q = n^{\epsilon} - \frac{1}{2}k(k+1) = \sigma^-(v^{\epsilon})$$

или $\#_p(S^2 \times S^2)$, где p — то же, что и выше (см. [6]). Ниже дается описание топологии расположения $X_{\mathbb{R}}^{\epsilon}$ в Y^{ϵ} для всех конфигураций с $k \leq 3$. Доказательство основано на анализе линий уровня в $\mathbb{R}P^2 \cup (A/\text{conj})$ для морсовской функции расстояния в $S^4 = \mathbb{C}P^2/\text{conj}$ до точки из $\mathbb{R}P^2$. При $k = 3$ приведенное описание является также следствием наблюдения Доналдсона [7], согласно которому $X_{\mathbb{R}}^{\epsilon}$ становится алгебраической кривой при подходящем выборе структуры рациональной поверхности в Y^{ϵ} .

5.1. Пара вещественных прямых. Коника A распадается в пару вещественных прямых. В этом случае Y^{ϵ} диффеоморфно сфере S^4 , а X^{ϵ} изотопно стандартно погруженной сфере, имеющей единственную двойную точку с положительным индексом локального самопересечения. При сглаживании особенности коники A , в зависимости от его типа, происходит либо раздутие, либо сглаживание в точке самопересечения поверхности $X_{\mathbb{R}}^{\epsilon}$. Раздутие дает пару $(Y^{\epsilon}, X_{\mathbb{R}}^{\epsilon})$, диффеоморфную паре $(\overline{\mathbb{C}P^2}, \text{неособая квадратика})$. Сглаживание дает пару $(S^4, \text{стандартно вложенный тор})$.

5.2. Пара мнимых прямых. Коника A распадается на пару мнимых сопряженных прямых. Положим для определенности $W^- = \mathbb{R}P^2$. Тогда пара $(Y^-, X_{\mathbb{R}}^-)$ имеет тот же дифференциально-топологический тип, что и в предыдущем примере. При возмущении особенности коники с появлением в $A_{\mathbb{R}}$ овала происходит сглаживание двойной точки в $X_{\mathbb{R}}^-$, а при возмущении, дающем $A_{\mathbb{R}} = \emptyset$, — ее раздутие.

Пару $(Y^+, X_{\mathbb{R}}^+)$ можно представлять себе как пространство Тома (с отмеченной точкой) касательного расслоения к $\mathbb{R}P^2$ или, эквивалентно, нормального расслоения к $\mathbb{R}P^2$ в $\overline{\mathbb{C}P^2}$, снабженное естественной ориентацией. Говоря иными словами, Y^+ получается из $\overline{\mathbb{C}P^2}$ стягиванием неособой коники в точку. Возмущение кривой A , сопровождаемое появлением у нее вещественной

компоненты, приводит к раздутию особой точки в Y^+ , дающему $\overline{CP^2}$. При возмущении, дающем $A_{\mathbb{R}} = \emptyset$, в Y^+ на место регулярной окрестности точки $X_{\mathbb{R}}^+$ вклеивается копия ее дополнения.

5.3. Четверка прямых. Квартика A распадается на четыре вещественных прямых в общем положении. Для определенности предположим, что „+“-компонентами разбиения являются 3 четырехугольника, а „-“-компонентами — 4 треугольника. Тогда Y^+ диффеоморфно S^4 , а $X_{\mathbb{R}}^+$ распадается на 3 сферические компоненты, незаузленные в S^4 и попарно трансверсально пересекающиеся в двух точках для каждой пары.

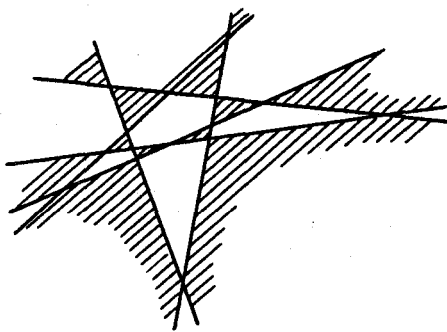
Y^- диффеоморфно $\overline{CP^2}$, а $X_{\mathbb{R}}^-$ изотопно четверке прямых общего положения. Это дает интересную двойственность между парами (CP^2, A) и $(Y^-, X_{\mathbb{R}}^-)$.

Отметим, что из этого примера получается описание дифференциального типа пар $(Y^e, X_{\mathbb{R}}^e)$ для всех неособых вещественных кватрик A с непустой вещественной частью, $A_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$, поскольку все их жесткие изотопические типы получаются возмущением распадающейся на прямые кривой A .

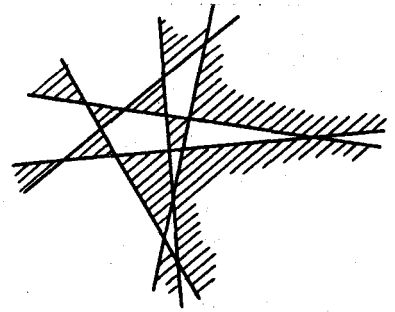
5.4. Икосаэдрическая конфигурация. Рассмотрим секстику A , распадающуюся на 6 вещественных прямых общего положения. Среди четырех возможных комбинаторно различных расположений шестерки прямых (см. рис. 2) рассмотрим то, при котором $\mathbb{R}P^2 - A$ распадается на 6 пятиугольников и 10 треугольников (рис. 2d). Для определенности будем считать пятиугольники „+“-компонентами, а треугольники „-“-компонентами. Тогда Y^+ диффеоморфно CP^2 , а шесть компонент вещественной части $X_{\mathbb{R}}^+$ расположены в Y^+ как шестерка комплексных прямых, так что пары $(Y^+, X_{\mathbb{R}}^+)$ и (CP^2, A) диффеоморфны; при этом, в отличие от предыдущего примера, с сохранением ориентаций. Последнее обеспечивает изменение топологии пары $(Y^+, X_{\mathbb{R}}^+)$ в соответствии с алгебраическими моделями при возмущении особенностей кривой A . Это дает диффеоморфность пар $(Y^+, X_{\mathbb{R}}^+)$ парам (рациональная поверхность, алгебраическая кривая) и определяет, в частности, новую алгебраическую структуру на накрывающей CP^2 $K3$ -поверхности X , для которой conj^+ становится голоморфной инволюцией.

Далее, Y^- диффеоморфно $CP^2 \# 4\overline{CP^2}$, причем 10 компонент поверхности $X_{\mathbb{R}}^-$ представляют 10 исключительных кривых поверхности дель Пеццо степени 5, изображенных на рис. 3.

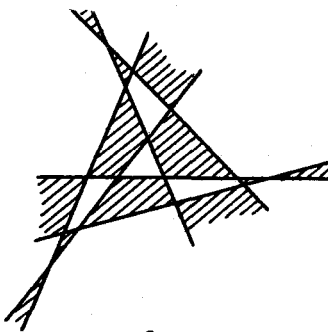
5.5. Гексагональная конфигурация. Секстика A распадается на конфигурацию прямых с шестиугольником в разбиении. Пусть W^+ содержит этот шестиугольник и еще шесть четырехугольников (см. рис. 2a). Тогда $Y^+ \cong S^2 \times S^2$ и шестиугольник представляет неособую кривую бистепени $(1, 1)$. Три попарно несмежных четырехугольника представлены образующими вида $S^2 \times \{pt\}$, три других — образующими вида $\{pt\} \times S^2$.



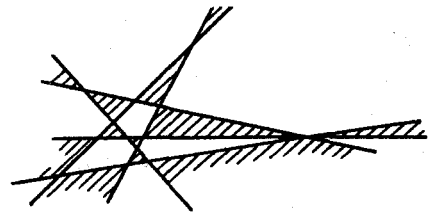
$$a \quad Y^+ \cong \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1; \quad Y^- \cong \mathbb{C}P^2 \# 3\overline{\mathbb{C}P^2}$$



$$b \quad Y^+ \cong Y^- \cong \mathbb{C}P^2 \# 2\overline{\mathbb{C}P^2}$$



$$c \quad Y^+ \cong \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}; \quad Y^- \cong \mathbb{C}P^2 \# 3\overline{\mathbb{C}P^2}$$



$$d \quad Y^+ \cong \mathbb{C}P^2; \quad Y^- \cong \mathbb{C}P^2 \# 4\overline{\mathbb{C}P^2}$$

Рис. 2. Четыре возможных комбинаторных типа конфигураций шести прямых общего положения. Закрашенная область представляет W^- .

5.6. Другие конфигурации. Во всех оставшихся примерах, когда секстика A распадается на прямые общего положения, имеем $Y^\varepsilon \cong \mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P^2}$, где $1 \leq k \leq 4$, $k = n^\varepsilon - 6$. Циклы $\tilde{\Gamma}$ для ε -многоугольников разбиения Γ могут быть представлены рациональными алгебраическими кривыми в $\mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P^2}$, причем треугольники соответствуют в точности исключительным кривым (т.е. полным прообразам раздуваемых точек $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{C}P^2$ и собственным прообразам прямых, проходящих через пары этих точек). Четырехугольники представлены собственными прообразами прямых, проходящих ровно через одну из точек P_i , пятиугольники — собственными прообразами прямых, не проходящих через эти точки. Все получающиеся таким образом конфигурации в Y^ε можно представить себе, рассмотрев конфигурацию шести прямых, попарно соединяющих четыре точки $P_1, \dots, P_4 \in \mathbb{C}P^2$ общего положения, раздув точки P_1, \dots, P_k и пошевелив те из прямых, которые проходят не более чем

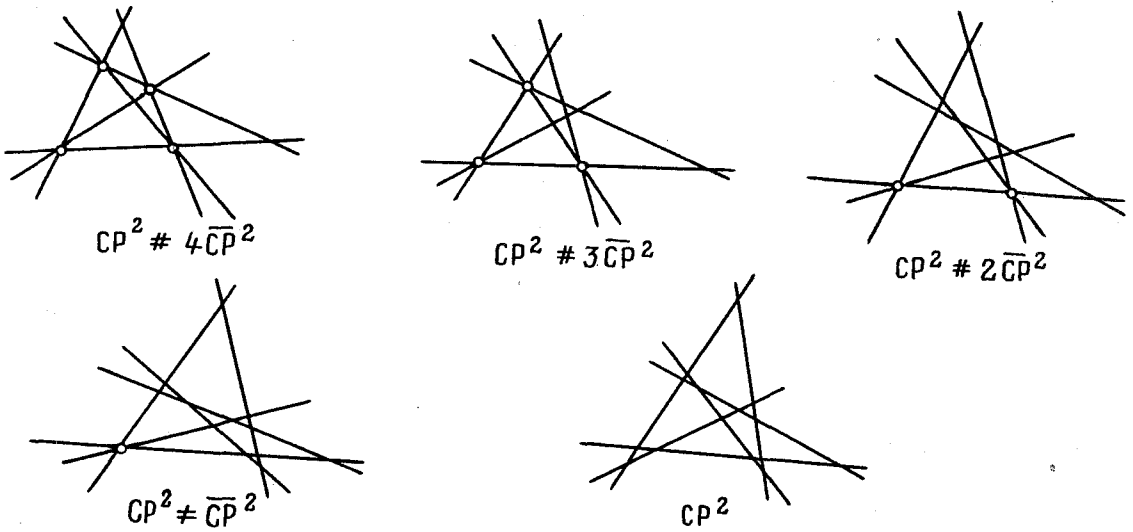


Рис. 3. Геометрия конфигураций рациональных кривых $\tilde{\Gamma} \subset Y^\epsilon$.

через одну из точек P_1, \dots, P_k , так чтобы устранились тройные пересечения в P_{k+1}, \dots, P_4 (см. рис. 3). Это описание следует из того, что $X_{\mathbb{R}}^\epsilon$ представляет алгебраическую кривую в Y^ϵ (наблюдение Доналдсона), и того, что элементарным движениям конфигураций прямых соответствуют раздутия и сдутия факторпространства Y^ϵ (см. рис. 4).

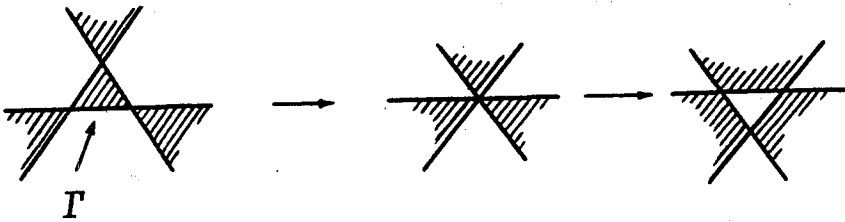


Рис. 4. Элементарное преобразование конфигурации: стягивание треугольника Γ сопровождается сдутием накрывающего цикла $\tilde{\Gamma} \subset Y^\epsilon$.

5.7. Неособые секстики. Описанная топология расположения $X_{\mathbb{R}}^\epsilon$ в Y^ϵ для секстик A , распадающихся в конфигурации прямых, дает также, очевидно, описание этой топологии и для неособых кривых, полученных малым возмущением кривых A (см. §3).

Эти кривые включают секстики типа 2 с вещественными схемами $\langle 10 \rangle$, $\langle 6 \perp 1(1) \rangle$, $\langle 4 \perp 1(2) \rangle$, $\langle 3 \perp 1(3) \rangle$, $\langle 1 \perp 1(4) \rangle$, $\langle 1(6) \rangle$ и получающиеся из них упрощениями (слияниями овалов), а также секстики типа 1 со схемами $\langle 9 \rangle$, $\langle 2 \perp 1(2) \rangle$, $\langle 1(4) \rangle$ и $\langle 1(1(1)) \rangle$ (обозначения и классификацию см. в [4]).

Список литературы

- [1] Арнольд В. И., *О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм*, Функци. анализ и его прил. 5 (1971), № 3, 1-9.
- [2] Виро О. Я., *Обобщение неравенств Петровского и Арнольда на кривые с особенностями*, Успехи мат. наук 33 (1978), № 3, 145-146.
- [3] Виро О. Я., *Рукописные заметки*, 1978.
- [4] Виро О. Я., *Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет*, Успехи мат. наук 41 (1986), № 3, 45-67.
- [5] Финашин С. М., *Проективные конфигурации и вещественные алгебраические кривые*, Дисс. канд. физ.-мат. наук, ЛГУ, Ленинград, 1985.
- [6] Finashin S. M., *Rokhlin conjecture and quotients of complex surfaces by complex conjugation*, J. Reine Angew. Math. (в печати).
- [7] Donaldson S., *Yang-Mills invariants of four-manifolds*, Geometry of Low-Dimensional Manifolds, 1 (Durham, 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 150, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, pp. 5-40.
- [8] Звонилов В. И., *Усиленные неравенства Петровского и Арнольда для кривых нечетной степени*, Функци. анализ и его прил. 13 (1979), № 4, 31-39.
- [9] Харламов В. М., *Топология действительных алгебраических многообразий*, И. Г. Петровский, Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия, Наука, М., 1986, сс. 465-493.

С.-Петербургский
электротехнический университет

Поступило 15 сентября 1995 г.

Middle East Tech. Univ.
Ankara 06531
Turkey

E-mail: serge@rorqual.cc.metu.edu.tr