Ю. Е. Гликлих, Н. В. Винокурова, Уравнение Ньютона–Нельсона на расслоениях со связностями, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2015, том 20, выпуск 3, 61–81

Уравнение Ньютона—Нельсона на расслоениях со связностями*

Ю. Е. ГЛИКЛИХ
Воронежский государственный университет
e-mail: yeg@math.vsu.ru

Н. В. ВИНОКУРОВА
Курский государственный университет
e-mail: vinoknata@mail.ru

УДК 514.8+519.216.2

Ключевые слова: расслоённые пространства, связности, калибровочные поля, уравнение Ньютона—Нельсона, движение классической частицы в калибровочном поле, движение квантовой частицы в калибровочном поле.

Аннотация

Статья представляет собой обзор и модификацию результатов по исследованию так называемого уравнения Ньютона—Нельсона (уравнения движения стохастической механики Нельсона) на пространстве расслоения со связностью в двух случаях: когда база расслоения — риманово многообразие и само расслоение вещественно и когда база расслоения — лоренцево многообразие и само расслоение комплексно. В последнем случае описывается связь с уравнением движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле, в роли которого выступает указанная выше связность. Также описано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на расслоении со связностью, которое интерпретируется как уравнение движения классической частицы в классическом калибровочном поле.

Abstract

Yu. E. Gliklikh, N. V. Vinokurova, The Newton–Nelson equation on fiber bundles with connections, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 3, pp. 61—81.

The paper is a survey with modifications on the research of the so-called Newton—Nelson equation (the equation of motion in Nelson's stochastic mechanics) on the total space of a bundle in two cases: where the base of the bundle is a Riemannian manifold and the bundle is real and where the base of the bundle is a Lorentz manifold and the bundle is complex. In the latter case, we describe the relations with the equation of motion of the quantum particle in the classical gauge field (the above-mentioned connection). Besides, a certain second-order ordinary differential equation on the bundle with connection that is interpreted as the equation of motion of the classical particle in the classical gauge field is described.

*Исследование частично поддержано грантами РФФИ 12-01-00183 и 13-01-00041.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 3, с. 61—81.

Введение

Настоящая статья представляет собой подробный обзор (с некоторыми модификациями) работ [8—10]. Тематика статьи — так называемая стохастическая механика Нельсона.

Стохастическая механика Нельсона — это математическая теория, основанная на классической физике, но дающая те же предсказания, что и квантовая механика, для широкого класса задач, в которых и та и другая теории применимы. Можно считать, что стохастическая механика является особым способом квантования, отличным от гамильтонова и лагранжева (в терминах интегралов по траекториям) способов. Одной из главных отличительных черт стохастической механики является то, что в ней квантуется второй закон Ньютона, а не уравнения Гамильтона или Лагранжа. Стохастический аналог закона Ньютона известен как уравнение Ньютона—Нельсона.

К настоящему времени на языке стохастической механики исследовано большое число задач квантовой теории. Однако не было описано движение квантовой частицы в калибровочном поле, по-видимому из-за того что ранее не было известно описание классической частицы в калибровочном поле в терминах второго закона Ньютона. Такое описание было предложено в [8] (см. также [2]): было построено и изучено специальное уравнение второго порядка на расслоённом пространстве со связностью, которое интерпретировалось как второй закон Ньютона, описывающий движение классической частицы в классическом калибровочном поле. На основе этого в настоящей статье, следуя [9, 10], мы изучаем соответствующее уравнение Ньютона—Нельсона на расслоениях со связностями. Рассматриваются два случая: когда база расслоения — риманово многообразие и само расслоение (главное и векторное) вещественно и когда база расслоения — пространство-время общей теории относительности и расслоение комплексно. Последний случай интерпретируется как описание движения квантовой релятивистской частицы в классическом калибровочном поле. Для частного случая группы симметрий $U(1)$ исследуется связь с квантовой электродинамикой.

1. Необходимые факты из геометрии многообразий

Напомним, что на каждом расслоении $E \to M$ над многообразием M, в каждом касательном пространстве $T_{(m,x)}E$ к пространству расслоения E имеется специальное подпространство $\mathsf{V}_{(m,x)}$, называемое *вертикальным*, которое состоит из векторов, касательных к слою E_m в точке (m,x), $m \in M$. Векторы из подпространств $\mathsf{V}_{(m,x)}$ называются вертикальными. *Связность* H на E — это набор подпространств в касательном пространстве к E, такой что $T_{(m,x)}E = \mathsf{H}_{(m,x)} \oplus \mathsf{V}_{(m,x)}$ в каждой точке $(m,x) \in E$ и этот набор удовлетворяет некоторым дополнительным условиям гладкости и инвариантности: на главных расслоениях распределение H инвариантно относительно правого действия структурной группы расслоения, а на векторных расслоениях — относительно так называемого действия числовой прямой (см. подробности, например, в [2]).

Пусть M — вещественное риманово или псевдориманово многообразие с метрическим тензором $g(\cdot,\cdot)$. Пусть $\Pi\colon \mathcal{E} \to M$ — главное расслоение над M со структурной группой G. Через $\mathfrak{g}$ мы обозначаем алгебру Ли группы Ли G. Пусть на $\mathcal{E}$ задана связность H с формой связности θ и формой кривизны $\Phi = D\theta$. Здесь D — ковариантный дифференциал: $D\theta(X) = d\theta(\mathsf{H}X)$ (см. подробности, например, в [1]). Напомним, что 1-форма θ и 2-форма Φ эквивариантны, принимают значения в алгебре $\mathfrak{g}$ и Φ горизонтальна (принимает нулевые значения на вертикальных векторах). Предполагается, что форма кривизны удовлетворяет уравнениям

$$D\Phi = 0, \quad D * \Phi = *J \tag{1}$$

(первое — классическое тождество Бьянки), где J — некоторая 1-форма на $\mathcal{E}$ со значениями в $\mathfrak{g}$.

Мы предполагаем, что G является группой $\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ (или $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$) невырожденных матриц размера $k \times k$ с вещественными (комплексными) коэффициентами или какой-нибудь её подгруппой. Пусть $\mathcal{F}$ — k-мерное вещественное (соответственно комплексное) векторное пространство, на котором G действует слева, и пусть на $\mathcal{F}$ задано скалярное произведение $h(\cdot,\cdot)$, инвариантное относительно действия G. Мы предполагаем, что задано некоторое отображение $e\colon \mathcal{F} \to \mathfrak{g}^*$ (где $\mathfrak{g}^*$ — коалгебра), которое постоянно на орбитах группы G. Это отображение называется *зарядом*.

Рассмотрим векторное расслоение $\pi\colon Q \to M$ со стандартным слоем $\mathcal{F}$, ассоциированное с $\mathcal{E}$. Точки пространства расслоения Q мы обозначаем (m,q), где $m \in M$, $q \in Q_m$, Q_m — слой в точке m. Обозначим через $\lambda\colon \mathcal{E} \times \mathcal{F} \to Q$ факторизацию, которая определяет расслоение Q (см. [1]). Касательное отображение $T\lambda$ переносит связность H из касательных пространств к $\mathcal{E}$ в касательные пространства к Q. Полученную связность на Q мы обозначаем H^π. Векторы, лежащие в пространствах H^π, называются горизонтальными. Напомним, что пространства связности являются ядрами так называемого отображения связности $K^\pi\colon TQ \to Q$, которое строится следующим образом. Рассмотрим разложение касательного вектора $X \in T_{(m,q)}Q$ в $(m,q) \in Q$ на горизонтальную и вертикальную компоненту: $X = \mathsf{H}X + \mathsf{V}X$, где $\mathsf{H}X \in \mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$ и $\mathsf{V}X \in \mathsf{V}_{(m,q)}$. Введём оператор $\mathbf{p}\colon \mathsf{V}_{(m,q)} \to Q_m$ — естественный изоморфизм линейного касательного пространства $\mathsf{V}_{(m,q)} = T_qQ_m$ к слою Q_m на сам слой (векторное пространство) Q_m. Тогда $K^\pi X = \mathbf{p}\mathsf{V}X$.

На многообразии Q (пространстве расслоения) построим риманову метрику g^Q следующим образом: в горизонтальных подпространствах H^π введём её как обратный образ $T\pi^*g$, в вертикальных пространствах V — как h и положим, что H^π и V ортогональны друг другу. Отметим, что в комплексном случае построенная метрика может называться римановой в весьма обобщённом смысле.

Обозначим проекцию касательного расслоения TM на M через $\tau\colon TM \to M$. Введём связность Леви-Чивита H^τ метрики g на M. Её отображение связности

$K^\tau \colon T^2M \to TM$ строится аналогично случаю K^π, где Q заменяется на TM и TQ — на $T^2M = TTM$.

Напомним стандартную конструкцию связности на пространстве расслоения Q, основанную на связностях H^π и H^τ (см., например, [2, 3]). Отображение этой связности $K^Q \colon T^2Q \to TQ$ имеет вид $K^Q = K^{\mathrm{H}} + K^{\mathrm{V}}$, где $K^{\mathrm{H}} \colon T^2Q \to \mathsf{H}^\pi$ и $K^{\mathrm{V}} \colon T^2Q \to \mathsf{V}$, а последние отображения задаются формулами $K^{\mathrm{H}} = T\pi^{-1} \circ K^\tau \circ T^2\pi$, где $T^2\pi = T(T\pi) \colon T^2Q \to T^2M$, $T\pi^{-1}$ — линейный изоморфизм касательных пространств к M на пространства связностей H^π; $K^{\mathrm{V}} = \mathbf{p}^{-1} \circ K^\pi \circ TK^\pi$.

Напомним, что λ взаимно-однозначно отображает стандартный слой $\mathcal{F}$ на слои расслоения Q, поэтому заряд e корректно определён на всём Q. Поскольку $T\lambda$ является также взаимно-однозначным отображением связностей и Φ-эквивариантно, можно ввести дифференциальную форму $\tilde{\Phi}$ на Q со значениями в $\mathfrak{g}$ следующим образом. Рассмотрим $(m,q) = \lambda\big((m,p), f\big)$, где $(m,p) \in \mathcal{E}$ и $f \in \mathcal{F}$. Для $X, Y \in T_{(m,q)}Q$ обозначим через $\mathsf{H}X$ и $\mathsf{H}Y$ их горизонтальные компоненты. Затем определим

$$\tilde{\Phi}_{(m,q)}(X,Y) = \Phi_{(m,p)}(T\lambda^{-1}\mathsf{H}X, T\lambda^{-1}\mathsf{H}Y).$$

Обозначим через $\bullet$ спаривание элементов из $\mathfrak{g}$ и из $\mathfrak{g}^*$. Пусть $\big((m,q), X\big)$ — вектор, касательный к Q в (m,q). Понятно, что $e\big((m,q)\big) \bullet \tilde{\Phi}_{(m,q)}(\cdot, X)$ является обычной 1-формой (т. е. дифференциальной формой со значениями в вещественных числах). Обозначим через $\overline{e\big((m,q)\big) \bullet \tilde{\Phi}_{(m,q)}(\cdot, X)}$ касательный вектор к Q, физически эквивалентный 1-форме $e\big((m,q)\big) \bullet \tilde{\Phi}_{(m,q)}(\cdot, X)$, т. е. полученный поднятием индексов с использованием римановой метрики g^Q.

Лемма 1 [8]. *Векторное поле* $\overline{e\big((m,q)\big) \bullet \tilde{\Phi}_{(m,q)}(\cdot, X)}$ *горизонтально, т. е. принадлежит пространствам связности* H^π.

Введём ковариантную производную

$$\frac{D^Q}{dt} = K^Q \frac{d}{dt}$$

на пространстве расслоения Q. В [8] введено и исследовано уравнение

$$\frac{D^Q}{dt}\dot{q} = \overline{e\big((m,q)\big) \bullet \tilde{\Phi}_{(m,q)}(\cdot, \dot{q})}, \tag{2}$$

которое может быть интерпретировано как уравнение движения классической частицы в классическом калибровочном поле.

Ниже нам потребуются следующие свойства связности H^Q.

Теорема 2 [9]. *Пусть* $\big(m(t), q(t)\big)$ *— гладкая кривая в* Q. *Пусть* $X(t)$ *— параллельный перенос вектора* $X \in T_{(m(t_0), q(t_0))}Q$ *относительно связности* H^Q *вдоль* $\big(m(t), q(t)\big)$.

1. *И горизонтальная* $\mathsf{H}X(t)$, *и вертикальная* $\mathsf{V}X(t)$ *компоненты вектора* $X(t)$ *являются параллельными векторными полями вдоль* $\big(m(t), q(t)\big)$ *относительно* H^Q, *причём параллельный перенос горизонтальных векторов сохраняет нормы и скалярные произведения относительно* g^Q.
2. *Векторное поле* $T\pi X(t)$ *является параллельным вдоль* $m(t)$ *на* M *относительно связности* H^τ.

Доказательство. Уравнение параллельного векторного поля относительно H^Q имеет вид
$$\frac{D^Q}{dt}X(t) = 0.$$
Оно эквивалентно системе
$$\frac{D^{\mathrm{H}}}{dt}X(t) = 0, \qquad \frac{D^{\mathrm{V}}}{dt}X(t) = 0.$$
Поскольку
$$\frac{D^{\mathrm{H}}}{dt}X(t) = K^{\mathrm{H}}\frac{d}{dt}X(t)$$
и $K^{\mathrm{H}} = T\pi^{-1} \circ K^\tau \circ T^2\pi$, нетрудно убедиться, что
$$K^\tau \circ T^2\pi\frac{d}{dt}X(t) = 0.$$
Так как
$$T^2\pi\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}T\pi X(t),$$
то
$$\frac{D}{dt}T\pi X(t) = K^\tau\frac{d}{dt}T\pi X(t) = 0.$$
В частности, это означает что векторное поле $T\pi X(t)$ является параллельным вдоль $m(t)$ в M относительно H^τ. Поскольку параллельный перенос относительно связности Леви-Чивита сохраняет нормы и скалярные произведения в метрике g, а g^Q на пространствах H^π является обратным образом g, отсюда следует, что параллельный перенос горизонтальных векторов относительно H^Q сохраняет нормы и скалярные произведения относительно g^Q.

По построению $T\pi X(t) = T\pi\mathsf{H}X(t)$. Поэтому
$$\frac{D^{\mathrm{H}}}{dt}\mathsf{H}X(t) = K^{\mathrm{H}}\frac{d}{dt}\mathsf{H}X(t) = T\pi^{-1}\circ K^\tau\circ T^2\pi\frac{d}{dt}\mathsf{H}X(t) = T\pi^{-1}\circ K^\tau\frac{d}{dt}T\pi\mathsf{H}X(t) = 0.$$

Поскольку $\mathsf{H}X(t)$ горизонтально, $K^\pi\mathsf{H}X(t) = 0$ при всех t из области определения кривой $\big(m(t), q(t)\big)$. Это означает, что
$$\frac{d}{dt}K^\pi\mathsf{H}X(t)$$
горизонтально (не имеет вертикальной компоненты), т. е.
$$K^\pi\frac{d}{dt}K^\pi\mathsf{H}X(t) = 0.$$

Но
$$\frac{d}{dt}K^\pi \mathsf{H}X(t) = TK^\pi \frac{d}{dt}\mathsf{H}X(t).$$
Так что
$$\frac{D^{\mathrm{V}}}{dt}\mathsf{H}X(t) = K^{\mathrm{V}}\frac{d}{dt}\mathsf{H}X(t) = \mathbf{p}^{-1}\circ K^\pi \circ TK^\pi \frac{d}{dt}\mathsf{H}X(t) = \mathbf{p}^{-1}\circ K^\pi \frac{d}{dt}K^\pi \mathsf{H}X(t) = 0.$$
Так как мы показали выше, что
$$\frac{D^{\mathrm{H}}}{dt}\mathsf{H}X(t) = 0,$$
это означает, что
$$\frac{D^Q}{dt}\mathsf{H}X(t) = 0.$$

По условию
$$\frac{D^Q}{dt}X(t) = 0.$$
С другой стороны,
$$\frac{D^Q}{dt}X(t) = \frac{D^Q}{dt}\mathsf{H}X(t) + \frac{D^Q}{dt}\mathsf{V}X(t)$$
и
$$\frac{D^Q}{dt}\mathsf{H}X(t) = 0.$$
Следовательно,
$$\frac{D^Q}{dt}\mathsf{V}X(t) = 0. \qquad \square$$

Замечание 1. Как сказано выше, мы будем иметь дело с двумя технически различающимися случаями: вещественными расслоениями над римановыми многообразиями и комплексными расслоениями над лоренцевыми многообразия. Чтобы различать формулы, соответствующие этим случаям, мы сохраним обозначения связностей H^π, H^τ и H^Q для первого случая и введём обозначения $\bar{\mathsf{H}}^\pi$, $\bar{\mathsf{H}}^\tau$ и $\bar{\mathsf{H}}^Q$ соответственно для второго. Подчеркнём, что все конструкции и результаты настоящего раздела верны в обоих случаях.

2. Случай вещественных расслоений над римановыми многообразиями

2.1. Производные в среднем на римановом многообразии

В этом разделе мы рассматриваем римановы многообразия. Случай лоренцевых (т. е. специальный случай псевдоримановых) многообразий, на которых, из-за того что необходима инвариантность относительно группы Лоренца, производные в среднем вводятся по-другому, будет рассмотрен в дальнейших разделах.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ со значениями в римановом многообразии M, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$. Через $\mathfrak{N}_t^\xi$ мы обозначаем минимальную σ-подалгебру σ-алгебры $\mathfrak{F}$, порождённую прообразами борелевских множеств в M при отображении $\xi(t)\colon \Omega \to M$ («настоящее» процесса $\xi(t)$), и через $E_t^\xi = E(\cdot|\mathfrak{N}_t^\xi)$ — условное математическое ожидание относительно $\mathfrak{N}_t^\xi$. Напомним, что условное математическое ожидание случайного элемента ϑ относительно $\mathfrak{N}_t^\xi$ может быть представлено как $\Theta\big(\xi(t)\big)$, где Θ — измеримое по Борелю отображение, так называемая *регрессия*, которая обычно обозначается $\Theta(m) = E(\vartheta \mid \xi(t) = m)$ (см., например, [4]).

Выберем точку $m \in M$ и рассмотрим нормальную карту U_m в этой точке относительно экспоненциального отображения связности Леви-Чивита на M. Построим в U_m регрессии

$$Y^{U_m}(t, m') = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \;\Big|\; \xi(t) = m'\right), \tag{3}$$

$$Y_*^{U_m}(t, m') = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \;\Big|\; \xi(t) = m'\right). \tag{4}$$

Введём $X^0(t,m) = Y^{U_m}(t,m)$ и $X_*^0(t,m) = Y_*^{U_m}(t,m)$. Отметим, что $X^0(t,m)$ и $X_*^0(t,m)$ являются векторными полями на M, т. е. при заменах координат они преобразуются как сечения касательного расслоения TM.

Производные в среднем справа и слева процесса $\xi(t)$ определяются соответственно формулами

$$D\xi(t) = X^0\big(t, \xi(t)\big), \quad D_*\xi(t) = X_*^0\big(t, \xi(t)\big). \tag{5}$$

Вектор

$$v^\xi(t) = \frac{1}{2}(D + D_*)\xi(t)$$

называется *текущей скоростью* процесса $\xi(t)$. Из свойств условного математического ожидания следует, что существует регрессия, т. е. векторное поле $v^\xi(t,m)$ на M, такое что $v^\xi(t) = v^\xi\big(t, \xi(t)\big)$.

Введём приращения процесса $\xi(t)$

$$\Delta\xi(t) = E_t^\xi\big(\xi(t+\Delta t) - \xi(t)\big)$$

и так называемую квадратичную производную в среднем D_2

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta\tau \downarrow 0} E_t^\xi \frac{\Delta\xi(t) \otimes \Delta\xi(t)}{\Delta t}.$$

Если она существует, то принимает значения в симметрических неотрицательно определённых $(2,0)$-тензорах (см. подробности в [2]).

Всюду далее мы будем иметь дело с процессами, вдоль которых корректно определён параллельный перенос относительно соответствующей связности. Сейчас мы предполагаем, что корректно определён параллельный перенос вдоль $\xi(\cdot)$ относительно H^τ. Это предположение выполнено, например, если $\xi(t)$ является процессом Ито на M, т. е. развёрткой Ито некоторого процесса Ито в каком-нибудь касательном пространстве к M (см. [2]). Обозначим через $\Gamma_{t,s}$ оператор указанного параллельного переноса векторов из (случайной) точки $\xi(s)$ процесса в (случайную) точку $\xi(t)$.

Для векторного поля $Z(t,m)$ на M его ковариантные производные в среднем справа $\mathbf{D}Z\big(t,\xi(t)\big)$ и слева $\mathbf{D}_*Z\big(t,\xi(t)\big)$ вдоль $\xi(\cdot)$ строятся по формулам

$$\mathbf{D}Z\big(t,\xi(t)\big)=\lim_{\Delta t\downarrow 0} E\left(\frac{\Gamma_{t,t+\Delta t}Z\big(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)\big)-Z\big(t,\xi(t)\big)}{\Delta t}\;\Bigg|\;\mathfrak{N}_t^{\xi}\right), \tag{6}$$

$$\mathbf{D}_*Z\big(t,\xi(t)\big)=\lim_{\Delta t\downarrow 0} E_t^{\xi}\left(\frac{Z\big(t,\xi(t)\big)-\Gamma_{t,t-\Delta t}Z\big(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t)\big)}{\Delta t}\;\Bigg|\;\mathfrak{N}_t^{\xi}\right). \tag{7}$$

Из формул (3), (4), (6) и (7) очевидным образом следует, что $T\pi\mathbf{D}Z\big(t,\xi(t)\big)= = D\xi(t)$ и $T\pi\mathbf{D}_*Z\big(t,\xi(t)\big)=D_*\xi(t)$.

Уравнением Ньютона—Нельсона с силовым полем $\alpha(m,X)$, $X\in T_mM$, на римановом многообразии мы называем систему вида

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\mathbf{D}D_*+\mathbf{D}_*D)\xi(t)=\bar{\alpha}\big(\xi(t),v^{\xi}(t)\big),\\[2mm] D_2\xi(t)=\dfrac{\hbar}{\mathrm{m}}I,\end{cases} \tag{8}$$

где $\hbar=h/(2\pi)$, h — постоянная Планка, а m — масса частицы. Связь этого уравнения с квантовой механикой описана, например, в [2, 12, 13]. Обычно в правой части этого уравнения на римановом многообразии имеется дополнительное слагаемое в терминах кривизны Риччи. Мы используем уравнение Ньютона—Нельсона в форме (8), имея в виду дальнейшее применение его в релятивистской теории, в которой указанное дополнительное слагаемое не используется. Мы отсылаем читателя к [2, 12, 13], где проведено исследование этого уравнения. Если силовое поле α потенциально с потенциалом V, то волновая функция, соответствующая уравнению Шрёдингера с потенциалом V, и решения уравнения (8) при некоторых естественных дополнительных условиях выражаются друг через друга. Отметим, что в нашем случае в уравнение Шрёдингера входит оператор Лапласа—Бельтрами $\nabla\nabla^*$, где ∇ — ковариантная производная, а в случае с дополнительным слагаемым с тензором Риччи — оператор Лапласа—де Рама $d\delta+\delta d$.

2.2. Производные в среднем на вещественном векторном расслоении над римановым многообразием

В этом разделе мы модифицируем аппарат производных в среднем из раздела 2.1 так, что его удаётся использовать нужным для нас образом для процессов на пространстве вещественного векторного расслоения Q над римановым многообразием M.

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t)$ на пространстве вещественного векторного расслоения Q и процесс $\xi(t)=\pi\eta(t)$ на M. Здесь мы обозначаем через

$\Gamma^{\pi}_{t,s}$ параллельный перенос случайных векторов из слоя $Q_{\xi(s)}$ в слой $Q_{\xi(t)}$ вдоль $\xi(\cdot)$ относительно связности H^{π}. Для $\eta(t)$ мы вводим ковариантные производные в среднем формулами

$$\mathbf{D}\eta(t) = \lim_{\Delta t\downarrow 0} E^{\xi}_t \left(\frac{\Gamma^{\pi}_{t,t+\Delta t}\eta(t+\Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} \right), \tag{9}$$

$$\mathbf{D}_*\eta(t) = \lim_{\Delta t\downarrow 0} E^{\xi}_t \left(\frac{\eta(t) - \Gamma^{\pi}_{t,t-\Delta t}\eta(t-\Delta t)}{\Delta t} \right) \tag{10}$$

(по аналогии с (6) и (7)). Как и выше,

$$v^{\eta}(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}_*)\eta(t) \,—$$

текущая скорость процесса $\eta(t)$. Подчеркнём, что в формулах (9) и (10) используется условное математическое ожидание относительно «настоящего» процесса $\xi(t)$, а не $\eta(t)$.

Лемма 3.

1. $T\pi\mathbf{D}\eta(t) = D\xi(t)$.
2. $T\pi\mathbf{D}_*\eta(t) = D_*\xi(t)$.
3. $T\pi v^{\eta} = v^{\xi}$.

Чтобы задать производные в среднем векторного поля вдоль $\eta(t)$ на Q, мы используем оператор параллельного переноса $\Gamma^{Q}_{t,s}$ векторов, касательных к Q в точке $\eta(s)$, в векторы, касательные к Q в точке $\eta(t)$, вдоль $\eta(\cdot)$ относительно связности H^{Q}. Аналогично формулам (6) и (7) для векторного поля $Z\big(t,(m,q)\big)$ на Q мы вводим ковариантные производные формулами

$$\mathbf{D}^{Q}Z\big(t,\eta(t)\big) = \lim_{\Delta t\downarrow 0} E^{\xi}_t \left(\frac{\Gamma^{Q}_{t,t+\Delta t}Z\big(t+\Delta t,\eta(t+\Delta t)\big) - Z\big(t,\eta(t)\big)}{\Delta t} \right), \tag{11}$$

$$\mathbf{D}^{Q}_*Z\big(t,\eta(t)\big) = \lim_{\Delta t\downarrow 0} E^{\xi}_t \left(\frac{Z\big(t,\eta(t)\big) - \Gamma^{Q}_{t,t-\Delta t}Z\big(t-\Delta t,\eta(t-\Delta t)\big)}{\Delta t} \right). \tag{12}$$

Лемма 4. $\Gamma^{Q}_{t,s}$ *переводит* $\mathsf{H}^{\pi}_{\eta(s)}$ *на* $\mathsf{H}^{\pi}_{\eta(t)}$, *а* $\mathsf{V}_{\eta(s)}$ *— на* $\mathsf{V}_{\eta(t)}$, *и при этом параллельный перенос горизонтальных компонент сохраняет нормы и скалярные произведения относительно метрики* g^{Q}.

Утверждение леммы 4 следует из теоремы 2 и факта (см. [2, 3]), что параллельный перенос вдоль случайного процесса может быть описан как предел параллельных переносов вдоль процессов, выборочные траектории которых являются кусочно-геодезическими (т. е., в частности, кусочно-гладкими) аппроксимациями выборочных траекторий рассматриваемого процесса.

Через $\mathbf{D}^{\mathrm{H}}$ и $\mathbf{D}^{\mathrm{H}}_*$ мы обозначаем производные, введённые формулами (11) и (12) соответственно, для горизонтальных компонент векторов (т. е.

принимающие значения в H^π), а через $\mathbf{D}^{\mathrm{V}}$ и $\mathbf{D}_*^{\mathrm{V}}$ — для вертикальных компонент (т. е. принимающие значения в V). Таким образом, $\mathbf{D}^Q = \mathbf{D}^{\mathrm{H}} + \mathbf{D}^{\mathrm{V}}$ и $\mathbf{D}_*^Q = \mathbf{D}_*^{\mathrm{H}} + \mathbf{D}_*^{\mathrm{V}}$.

Вектор

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^Q\mathbf{D}_* + \mathbf{D}_*^Q\mathbf{D})\eta$$

называется *ускорением* процесса η в пространстве расслоения Q.

2.3. Уравнение Ньютона—Нельсона на пространстве вещественного векторного расслоения над римановым многообразием

В соответствии с общей идеологией стохастической механики уравнение Ньютона—Нельсона, соответствующее закону Ньютона (2), имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\mathbf{D}^Q\mathbf{D}_* + \mathbf{D}_*^Q\mathbf{D})\eta(t) = \overline{e\bigl(\eta(t)\bigr) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}\bigl(\cdot, v^\eta(t)\bigr)}, \\ D_2\xi(t) = \dfrac{\hbar}{\mathrm{m}} I, \end{cases} \tag{13}$$

где $\xi(t) = \pi\eta(t)$.

Разложим текущую скорость v^η в правой части (13) в сумму вертикальной и горизонтальной компонент: $v^\eta = v_\eta^{\mathrm{H}} + v_\eta^{\mathrm{V}}$, где $v_\eta^{\mathrm{H}} \in \mathsf{H}^\pi$ и $v_\eta^{\mathrm{V}} \in \mathsf{V}$. Из того что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot,\cdot)$ линейна по обоим аргументам, следует, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^\eta) = \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^{\mathrm{H}}) + \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^{\mathrm{V}})$, а из того что эта форма горизонтальна (см. лемму 1) — что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^{\mathrm{V}}) = 0$. Таким образом, первое уравнение системы (13) эквивалентно следующей системе:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^{\mathrm{H}}\mathbf{D}_* + \mathbf{D}_*^{\mathrm{H}}\mathbf{D})\eta(t) = \overline{e\bigl(\eta(t)\bigr) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}\bigl(\cdot, v_\eta^{\mathrm{H}}(t)\bigr)}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^{\mathrm{V}}\mathbf{D}_* + \mathbf{D}_*^{\mathrm{V}}\mathbf{D})\eta(t) = 0. \tag{15}$$

Для удобства изложения обозначим $\overline{e\bigl(\eta(t)\bigr) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}\bigl(\cdot, v_\eta^{\mathrm{H}}(t)\bigr)}$ через $\alpha_{(t,\eta(t))}v_\eta^{\mathrm{H}}$, где по построению $\alpha_{(t,(m',q'))}(\cdot)$ — линейный оператор в $\mathsf{H}^\pi_{(m',q')}$ ($(1,1)$-тензор).

Введём горизонтальное $(1,2)$-тензорное поле $\nabla^{\mathrm{H}}\alpha(\cdot,\cdot) = K^{\mathrm{H}}T\alpha(\cdot)$ на Q. Вектор $\operatorname{tr}\nabla^{\mathrm{H}}\alpha(\alpha\cdot,\cdot)$ также горизонтален по построению.

Теорема 5. *Пусть для тензорного поля $\alpha_{(t,(m,q))}(\cdot)$ существует константа $C > 0$, такая что*

$$\int_0^T \bigl(\bigl\|\alpha_{(t,x(t))}(\cdot)\bigr\|^2 + \bigl\|\operatorname{tr}\nabla^{\mathrm{H}}\alpha_{(t,x(t))}(\alpha\cdot,\cdot)\bigr\|^2\bigr)\,dt < C \tag{16}$$

для некоторого выбранного $T > 0$ и любой непрерывной кривой $x(t)$ в Q, $t \in [0,T]$, где $\|\alpha_{(t,x)}(\cdot)\|$ — операторная норма (все нормы порождены g^Q). Пусть *обе связности* H^τ *и* H^π *стохастически полны* (см. [2]). *Тогда для любой точки* (m,q) *в* Q, *любого вектора* $\beta_0 \in \mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$ *и любого момента времени* $t_0 > 0$ *существует случайный процесс* $\eta(t)$ *в* Q, *такой что*

— *он корректно определён на* $[0,T]$;
— $\eta(0) = (m,q)$ *и* $D\eta(0) = \beta_0$;
— *для всех* $t \in (t_0, T)$ *процессы* $\eta(t)$ *и* $\xi(t) = \pi\eta(t)$ *удовлетворяют* (13);
— *вдоль* $\eta(t)$ *заряд* $e\big(\eta(t)\big)$ *имеет постоянное значение.*

Доказательство. Без потери общности мы для простоты положим

$$\frac{\hbar}{\mathrm{m}} = 1.$$

На пространстве непрерывных кривых $C^0([0,T], T_mM)$ рассмотрим фильтрацию $\mathcal{P}_t$, где при каждом $t \in [0,T]$ σ-алгебра $\mathcal{P}_t$ порождена цилиндрическими множествами с основаниями на $[0,t]$. Зададим меру Винера ν на измеримом пространстве $(C^0([0,T], T_mM), \mathcal{P}_T)$ и рассмотрим в T_mM стандартный винеровский процесс $W_m(t)$ — координатный процесс на вероятностном пространстве $(C^0([0,T], T_mM), \mathcal{P}_T, \nu)$. Поскольку H^τ стохастически полно, развёртка Ито $W^M(t)$ процесса $W_m(t)$ относительно H^τ на M корректно определена. Поскольку H^π также стохастически полно, горизонтальный подъём $W^Q(t)$ на Q относительно H^π с начальным условием (m,q) также корректно определён. Подробное описание конструкции процессов $W^M(t)$ и $W^Q(t)$ имеется в [2].

Так как $T\pi\colon \mathsf{H}^\pi_{(m,q)} \to T_mM$ — линейный изоморфизм, который определяет метрический тензор g^Q в $\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$ переносом g из T_mM, перенесём в $\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$ меру Винера и винеровский процесс из T_mM в $\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$. Обозначим полученный винеровский процесс $W(t)$. Это координатный процесс на пространстве непрерывных кривых в $\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$ с σ-алгеброй $\mathcal{P}_T$, заданный мерой Винера.

Для $t \geqslant 0$ введём вещественную функцию

$$t_0(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0} & \text{при } t < t_0, \\ \dfrac{1}{t} & \text{при } t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{17}$$

Её производная $t_0'(t)$ равна 0 при $t < t_0$ и $-1/t^2$ при $t \geqslant t_0$.

Теперь рассмотрим в $\mathsf{H}^\pi_{(m,q)}$ следующее уравнение в форме Ито:

$$\beta(t) = \beta_0 + \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma^Q_{0,s} \operatorname{tr} \nabla^{\mathrm{H}} \alpha_{(s,W^Q(s))}(\alpha\cdot,\cdot)\, ds + \int_0^t \Gamma^Q_{0,s} \alpha_{(s,W^Q(s))}\, dW(s) - \\ - \frac{1}{2}\int_0^t t_0(s)\beta(s)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^t t_0'(s) W(s)\, ds. \tag{18}$$

Поскольку уравнение (18) линейно по β, оно имеет сильное и сильно единственное решение $\beta(t)$. Так как это решение сильное, оно определено на любом вероятностном пространстве, на котором корректно определён винеровский процесс, в частности на пространстве непрерывных кривых в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$, снабжённом мерой Винера. Рассмотрим на этом вероятностном пространстве плотность вида

$$\theta(l) = \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\int\limits_0^T \beta(s)^2\,ds + \int\limits_0^T \big(\beta(s)\cdot\, dW(s)\big)\Bigg). \tag{19}$$

Из формулы (16) и леммы 4 следует, что плотность (19) корректно определена. Введём меру, имеющую плотность (19) относительно меры Винера. Хорошо известно, что после такой замены меры координатный процесс принимает вид

$$\zeta(t) = \int\limits_0^t \beta(s)\,ds + w(t),$$

где $w(t)$ — некоторый винеровский процесс, не упреждающий относительно $\mathcal{P}_t$. Обозначим процесс $W^Q(t)$, рассматриваемый относительно новой меры, через $\eta(t)$ и введём процесс $\xi(t) = \pi\eta(t)$. Процесс $\xi(t)$ получен из $W^M(t)$ заменой меры. Уравнение (18) при этом превращается в

$$\beta(t) = \beta_0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Gamma^Q_{0,s}\,\mathrm{tr}\,\nabla^{\mathrm{H}}\alpha_{(s,\eta(t))}(\alpha\cdot,\cdot)\,ds + \int\limits_0^t \Gamma^Q_{0,s}\alpha_{(s,\eta(s))}\beta(s)\,ds +$$
$$+\int\limits_0^t \left(\Gamma^Q_{0,s}\alpha_{(s,\eta(s))}(\cdot) + \frac{1}{2}t_0(s)\right)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t t_0(s)\beta(s)\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_0^t t_0'(t)\zeta(t)\,ds. \tag{20}$$

По построению $\eta(0) = (m,q)$ и $D\eta(t) = \beta_0$. Процесс $\eta(t)$ удовлетворяет равенству (15) также по построению. Тот факт, что при $t \in (t_0, T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t) = \pi\eta(t)$ удовлетворяют (14) и что $D_2\xi(t) = I$, следует из формул для производных в среднем, найденных в [2, главы 12 и 18].

Очевидным образом $\eta(t)$ является горизонтальным подъёмом процесса $\xi(t)$ относительно связности H^{π} с начальным условием (m,q). Напомним, что горизонтальный подъём $\eta(t)$ процесса $\xi(t)$ является параллельным переносом (m,q) вдоль $\xi(\cdot)$ относительно H^{π}. Следовательно, он может быть представлен в виде $\big(\xi(t), b_t(f)\big)$, где b_t — горизонтальный подъём процесса $\xi(t)$ на $\mathcal{E}$ относительно связности H, а f — некоторый вектор стандартного слоя $\mathcal{F}$ (см. раздел 1). Таким образом, выборочные траектории процесса $\eta(t)$ лежат в орбите группы G, и следовательно, заряд e является постоянным вдоль $\eta(t)$. □

3. Случай комплексных расслоений над лоренцевыми многообразиями

3.1. Введение в релятивистскую стохастическую механику на лоренцевых многообразиях

Здесь мы используем релятивистскую версию стохастической механики, предложенную в [5, 11, 14, 15] с небольшими усовершенствованиями из [2]. Необходимость специальных конструкций для релятивистского случая вызвано тем, что введённые для случая римановых многообразий и расслоений над ними производные в среднем оказываются нековариантными относительно группы Лоренца.

Из соображений удобства изложения здесь мы изменим обозначения: лоренцево многообразие будем обозначать через $\mathcal{M}$ (это позволит читателю не путать случаи риманова и лоренцева многообразий) и не будем использовать сокращённое обозначение для условного математического ожидания относительно σ-алгебры «настоящее».

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ со значениями в лоренцевом многообразии $\mathcal{M}$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$. Как и выше, через $\mathfrak{N}_t^\xi$ мы обозначаем минимальную σ-подалгебру σ-алгебры $\mathfrak{F}$, порождённую прообразами борелевских множеств в $\mathcal{M}$ при отображении $\xi(t)\colon \Omega \to \mathcal{M}$ («настоящее» процесса $\xi(t)$), а через $E(\cdot|\mathfrak{N}_t^\xi)$ — условное математическое ожидание относительно $\mathfrak{N}_t^\xi$. Здесь t — инвариантный параметр, который может играть роль собственного времени. Напомним (см. выше), что условное математическое ожидание случайного элемента ϑ относительно $\mathfrak{N}_t^\xi$ может быть представлено как $\Theta\bigl(\xi(t)\bigr)$, где Θ — так называемая *регрессия*, которая вводится формулой $\Theta(m) = E(\theta \mid \xi(t) = m)$ (см., например, [4]).

Выберем событие (т. е. точку в $\mathcal{M}$) и рассмотрим нормальную карту U_m в этой точке относительно экспоненциального отображения связности Леви-Чивита на $\mathcal{M}$. Эту карту можно считать областью в касательном пространстве $T_m\mathcal{M}$, в которой метрический тензор g задаёт структуру пространства Минковского. В U_m построим следующие регрессии:

$$\begin{aligned} Y_+^{U_m}(t,m') &= \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\biggl(\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\biggm| \xi(t)=m',\ \bigl(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\bigr)^2 \leqslant 0\biggr) \\ &\quad + \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\biggl(\frac{\xi(t)-\xi(t-\Delta t)}{\Delta t}\biggm| \xi(t)=m',\ \bigl(\xi(t)-\xi(t-\Delta t)\bigr)^2 \geqslant 0\biggr); \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} Y_-^{U_m}(t,m') &= \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\biggl(\frac{\xi(t)-\xi(t-\Delta t)}{\Delta t}\biggm| \xi(t)=m',\ \bigl(\xi(t)-\xi(t-\Delta t)\bigr)^2 \leqslant 0\biggr) \\ &\quad + \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\biggl(\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\biggm| \xi(t)=m',\ \bigl(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\bigr)^2 \geqslant 0\biggr). \end{aligned} \tag{22}$$

Введём $X^0_+(t,m) = Y^{U_m}_+(t,m)$ и $X^0_-(t,m) = Y^{U_m}_-(t,m)$. Отметим, что $X^0_+(t,m)$ и $X^0_-(t,m)$ — векторные поля на $\mathcal{M}$, т. е. при заменах координат они преобразуются как сечения касательного расслоения $T\mathcal{M}$.

Релятивистские производные в среднем справа и слева процесса $\xi(t)$ определяются формулами

$$D_+\xi(t) = X^0_+\big(t,\xi(t)\big), \quad D_-\xi(t) = X^0_-\big(t,\xi(t)\big). \tag{23}$$

Вектор

$$v^\xi(t) = \frac{1}{2}(D_+ + D_-)\xi(t)$$

называется *текущей скоростью* процесса $\xi(t)$. Из свойств условного математического ожидания следует, что существуют измеримые по Борелю векторные поля (регрессии) $v^\xi(t,m)$ на $\mathcal{M}$, такие что $v^\xi(t) = v^\xi\big(t,\xi(t)\big)$.

Введём «релятивистские» приращения процесса $\xi(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta_+\xi(t) = E\big(\xi(t+\Delta t) - \xi(t) \mid \big(\xi(t+\Delta t) - \xi(t)\big)^2 \leqslant 0\big) + \\ + E\big(\xi(t) - \xi(t-\Delta t) \mid \big(\xi(t) - \xi(t-\Delta t)\big)^2 \geqslant 0\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_-\xi(\tau) = E\big(\xi(t) - \xi(t-\Delta t) \mid \big(\xi(t) - \xi(t-\Delta t)\big)^2 \geqslant 0\big) + \\ + E\big(\xi(t+\Delta t) - \xi(t) \mid \big(\xi(t+\Delta t) - \xi(t)\big)^2 \leqslant 0\big).\end{aligned}$$

Теперь, следуя [2], мы вводим релятивистскую квадратичную производную в среднем D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta\tau\downarrow 0} E\bigg(\frac{\Delta_+\xi(t)\otimes\Delta_+\xi(t)}{\Delta t}\ \bigg|\ \mathfrak{N}^\xi_t\bigg) = \lim_{\Delta\tau\downarrow 0} E\bigg(\frac{\Delta_-\xi(t)\otimes\Delta_-\xi(t)}{\Delta t}\ \bigg|\ \mathfrak{N}^\xi_t\bigg).$$

Как и ранее, если она существует, то принимает значения в $(2,0)$-тензорах.

Везде ниже мы имеем дело с процессами, вдоль которых корректно определён параллельный перенос относительно некоторой связности. В данном случае мы работаем с $\xi(\cdot)$ и параллельным переносом относительно связности H^τ и сформулированное предположение выполняется, если, например, $\xi(t)$ — процесс Ито на $\mathcal{M}$, т. е. развёртка Ито процесса Ито в некотором касательном пространстве к $\mathcal{M}$ (см. [2]). Обозначим через $\bar\Gamma_{t,s}$ оператор такого параллельного переноса векторов из (случайной) точки $\xi(s)$ процесса в (случайную) точку $\xi(t)$.

Замечание 2. Начиная с настоящего момента мы используем параллельный перенос в комплексных расслоениях относительно связностей H^π, H^τ и H^Q (см. замечание 1). Чтобы отличать эти параллельные переносы от тех, которые были использованы для случая вещественных расслоений, соответствующие операторы параллельного переноса мы будем помечать чертой над символом оператора.

Для векторного поля $Z(t,m)$ на $\mathcal{M}$ релятивистские производные в среднем справа и слева $\mathbf{D}_+Z\big(t,\xi(t)\big)$ и $\mathbf{D}_-Z\big(t,\xi(t)\big)$ строятся по формулам

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{D}_+ Z\bigl(t,\xi(t)\bigr) = \\
&= \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\biggl(\frac{\bar\Gamma_{t,t+\Delta t} Z\bigl(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)\bigr) - Z\bigl(t,\xi(t)\bigr)}{\Delta t}\,\bigg|\,\mathcal{N}_t^\xi,\ \bigl(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\bigr)^2 \leqslant 0\biggr) + \\
&+ \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\biggl(\frac{Z\bigl(t,\xi(t)\bigr) - \bar\Gamma_{t,t-\Delta t} Z\bigl(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t)\bigr)}{\Delta t}\,\bigg|\,\mathcal{N}_t^\xi,\ \bigl(\xi(t)-\xi(t-\Delta t)\bigr)^2 \geqslant 0\biggr),
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{D}_- Z\bigl(t,\xi(t)\bigr) = \\
&= \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\biggl(\frac{Z\bigl(t,\xi(t)\bigr) - \bar\Gamma_{t,t-\Delta t} Z\bigl(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t)\bigr)}{\Delta t}\,\bigg|\,\mathcal{N}_t^\xi,\ \bigl(\xi(t)-\xi(t-\Delta t)\bigr)^2 \leqslant 0\biggr) + \\
&+ \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\biggl(\frac{\bar\Gamma_{t,t+\Delta t} Z\bigl(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)\bigr) - Z\bigl(t,\xi(t)\bigr)}{\Delta t}\,\bigg|\,\mathcal{N}_t^\xi,\ \bigl(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\bigr)^2 \geqslant 0).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Релятивистское уравнение Ньютона—Нельсона имеет вид

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2}(\mathbf{D}_+ D_- + \mathbf{D}_- D_+)\xi(t) = \bar\alpha\bigl(\xi(t), v^\xi(t)\bigr), \\
D_2\xi(t) = \dfrac{\hbar}{\mathrm{m}} I,
\end{cases}
\tag{26}
$$

где $\hbar = h/(2\pi)$, h — постоянная Планка и m — масса (масса покоя) частицы.

В [2] показано, что, если связность Леви-Чивита метрики g стохастически полна, при некоторых условиях типа ограниченности силового поля уравнение (26) имеет слабое решение с подходящими начальными условиями для силового поля вида $\alpha\bigl(\xi(t), v^\xi(t)\bigr) = \bar\alpha\bigl(\xi(t)\bigr)v^\xi$, где $\bar\alpha(m)\colon T_m\mathcal{M} \to T_m\mathcal{M}$ — линейный оператор. Естественные соотношения между (26) и уравнением Клейна—Гордона в некоторых случаях описаны в [5, 11, 14, 15].

3.2. Производные в среднем на комплексных векторных расслоениях над лоренцевым многообразием

В этом разделе мы модифицируем аппарат раздела 3.1 так, что его удаётся использовать на пространстве комплексного векторного расслоения Q над лоренцевым многообразием $\mathcal{M}$.

Рассмотрим стохастический процесс $\eta(t)$ на пространстве расслоения Q и введём процесс $\xi(t) = \pi\eta(t)$ на $\mathcal{M}$. Через $\bar\Gamma^\pi_{t,s}$ мы обозначаем параллельный перенос случайных векторов из слоя $Q_{\xi(s)}$ в слой $Q_{\xi(t)}$ вдоль $\xi(\cdot)$ относительно связности H^π (ср. раздел 3.1). Для $\eta(t)$ мы вводим ковариантные производные в среднем формулами

$$\mathbf{D}_+\eta(t)=\lim_{\Delta t\downarrow 0}E\Big(\frac{\bar\Gamma^{\pi}_{t,t+\Delta t}\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t}\;\Big|\;\mathcal{N}^{\xi}_t,\;\big(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\big)^2\leqslant 0\Big)$$
$$+\lim_{\Delta t\downarrow 0}E\Big(\frac{\eta(t)-\bar\Gamma^{\pi}_{t,t-\Delta t}\eta(t-\Delta t)}{\Delta t}\;\Big|\;\mathcal{N}^{\xi}_t,\;\big(\xi(t)-\xi(t-\Delta t)\big)^2\geqslant 0\Big),\qquad(27)$$

$$\mathbf{D}_-\eta(t)=\lim_{\Delta t\downarrow 0}E\Big(\frac{\eta(t)-\bar\Gamma^{\pi}_{t,t-\Delta t}\eta(t-\Delta t)}{\Delta t}\;\Big|\;\mathcal{N}^{\xi}_t,\;\big(\xi(t)-\xi(t-\Delta t)\big)^2\leqslant 0\Big)$$
$$+\lim_{\Delta t\downarrow 0}E\Big(\frac{\bar\Gamma^{\pi}_{t,t+\Delta t}\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t}\;\Big|\;\mathcal{N}^{\xi}_t,\;\big(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\big)^2\geqslant 0\Big)\qquad(28)$$

(аналоги (24) и (25)). Как и выше,

$$v^{\eta}(t)=\frac{1}{2}(\mathbf{D}_++\mathbf{D}_-)\eta(t)$$

называется *текущей скоростью* процесса $\eta(t)$.

Лемма 6.

1. $T\pi\mathbf{D}_+\eta(t)=D_+\xi(t)$.
2. $T\pi\mathbf{D}_-\eta(t)=D_-\xi(t)$.
3. $T\pi v^{\eta}=v^{\xi}$.

Утверждение леммы 6 следует из формул (21), (22), (27) и (28) и из определения текущей скорости.

Для задания производных в среднем векторных полей вдоль $\eta(t)$ на Q мы используем параллельный перенос $\bar\Gamma^{Q}_{t,s}$ векторов, касательных к Q в $\eta(s)$, в векторы, касательные к Q в $\eta(t)$, вдоль $\eta(\cdot)$ относительно связности H^Q. Аналогично формулам (24) и (25) для векторного поля $Z\big(t,(m,q)\big)$ на Q введём ковариантные производные в среднем формулами

$$\mathbf{D}^Q_+Z\big(t,\eta(t)\big)=$$
$$=\lim_{\Delta t\downarrow 0}E\Big(\frac{\bar\Gamma^{Q}_{t,t+\Delta t}Z\big(t+\Delta t,\eta(t+\Delta t)\big)-Z\big(t,\eta(t)\big)}{\Delta t}\;\Big|\;\mathcal{N}^{\xi}_t,\;\big(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\big)^2\leqslant 0\Big)+$$
$$+\lim_{\Delta t\downarrow 0}E\Big(\frac{Z\big(t,\eta(t)\big)-\bar\Gamma^{Q}_{t,t-\Delta t}Z\big(t-\Delta t,\eta(t-\Delta t)\big)}{\Delta t}\;\Big|\;\mathcal{N}^{\xi}_t,\;\big(\xi(t)-\xi(t-\Delta t)\big)^2\geqslant 0),\qquad(29)$$

$$\mathbf{D}^Q_-Z\big(t,\eta(t)\big)=$$
$$=\lim_{\Delta t\downarrow 0}E\Big(\frac{Z\big(t,\eta(t)\big)-\bar\Gamma^{Q}_{t,t-\Delta t}Z\big(t-\Delta t,\eta(t-\Delta t)\big)}{\Delta t}\;\Big|\;\mathcal{N}^{\xi}_t,\;\big(\xi(t)-\xi(t-\Delta t)\big)^2\leqslant 0\Big)+$$
$$+\lim_{\Delta t\downarrow 0}E\Big(\frac{\bar\Gamma^{Q}_{t,t+\Delta t}Z\big(t+\Delta t,\eta(t+\Delta t)\big)-Z\big(t,\eta(t)\big)}{\Delta t}\;\Big|\;\mathcal{N}^{\xi}_t,\;\big(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\big)^2\geqslant 0\Big).\qquad(30)$$

Напомним (см., например, [2,3]), что параллельный перенос вдоль случайного процесса может быть представлен как предел параллельных переносов вдоль процессов, выборочные траектории которых являются кусочно-геодезическими (т. е. кусочно-гладкими) аппроксимациями выборочных траекторий первоначального процесса. Таким образом, из теоремы 2 следует, что параллельный перенос относительно H^Q сохраняет распределения H^π и V инвариантными, т. е. $\bar{\Gamma}^Q_{t,s}$ переводит $\mathsf{H}^\pi_{\eta(s)}$ на $\mathsf{H}^\pi_{\eta(t)}$ и $\mathsf{V}_{\eta(s)}$ на $\mathsf{V}_{\eta(t)}$ соответственно. Обозначим через $\mathbf{D}^{\mathrm{H}}_+$ и $\mathbf{D}^{\mathrm{H}}_-$ производные, введённые формулами (29) и (30) соответственно, для горизонтальных компонент векторов (т. е. принимающих значения в H^π), а через $\mathbf{D}^{\mathrm{V}}_+$ и $\mathbf{D}^{\mathrm{V}}_-$ — для вертикальных компонент векторов (т. е. принимающих значения в V). Таким образом, $\mathbf{D}^Q_+ = \mathbf{D}^{\mathrm{H}}_+ + \mathbf{D}^{\mathrm{V}}_+$ и $\mathbf{D}^Q_- = \mathbf{D}^{\mathrm{H}}_- + \mathbf{D}^{\mathrm{V}}_-$.

Вектор

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^Q_+\mathbf{D}_- + \mathbf{D}^Q_-\mathbf{D}_+)\eta$$

называется 4-*ускорением* процесса η в пространстве расслоения Q.

3.3. Движение квантовой частицы в классическом калибровочном поле

По общей идеологии стохастической механики уравнение Ньютона—Нельсона, соответствующее закону Ньютона (2), имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{D}^Q_+\mathbf{D}_- + \mathbf{D}^Q_-\mathbf{D}_+)\eta(t) = \overline{e\big(\eta(t)\big) * \tilde{\Phi}_{\eta(t)}\big(\cdot, v^\eta(t)\big)}, \\ D_2\xi(t) = \dfrac{\hbar}{\mathrm{m}} I, \end{cases} \tag{31}$$

где $\xi(t) = \pi\eta(t)$. Мы интерпретируем (31) как уравнение движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле.

Текущая скорость v^η в правой части (31) раскладывается в сумму её вертикальной и горизонтальной компонент: $v^\eta = v^{\mathrm{H}}_\eta + v^{\mathrm{V}}_\eta$, где $v^{\mathrm{H}}_\eta \in \mathsf{H}^\pi$ и $v^{\mathrm{V}}_\eta \in \mathsf{V}$. Из того, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot,\cdot)$ линейно по обоим аргументам, следует, что

$$\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^\eta) = \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^{\mathrm{H}}_\eta) + \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^{\mathrm{V}}_\eta),$$

а из того, что эта форма горизонтальна (см. лемму 1), что

$$\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^{\mathrm{V}}_\eta) = 0.$$

Поэтому первое уравнение системы (31) эквивалентно системе

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^{\mathrm{H}}_+\mathbf{D}_- + \mathbf{D}^{\mathrm{H}}_-\mathbf{D}_+)\eta(t) = \overline{e\big(\eta(t)\big) * \tilde{\Phi}_{\eta(t)}\big(\cdot, v^{\mathrm{H}}_\eta(t)\big)}, \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^{\mathrm{V}}_+\mathbf{D}_- + \mathbf{D}^{\mathrm{V}}_-\mathbf{D}_+)\eta(t) = 0. \tag{33}$$

Поскольку Φ — 2-форма,

$$e\big(\eta(t)\big) * \tilde{\Phi}_{\eta(t)}\big(v^{\mathrm{H}}_{\eta}(t), v^{\mathrm{H}}_{\eta}(t)\big) = 0,$$

т. е. $\overline{e\big(\eta(t)\big) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}\big(\cdot, v^{\mathrm{H}}_{\eta}(t)\big)}$ ортогонально $v^{\mathrm{H}}_{\eta}(t)$ относительно g^{Q}.

Для простоты изложения обозначим $\overline{e\big(\eta(t)\big) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}\big(\cdot, v^{\mathrm{H}}_{\eta}(t)\big)}$ через $\alpha_{(t,\eta(t))}v^{\mathrm{H}}_{\eta}$, где $\alpha_{(t,(m',q'))}(\cdot)$ — линейный оператор в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m',q')}$ ($(1,1)$-тензор) по построению.

Введём горизонтальное $(1,2)$-тензорное поле $\nabla^{\mathrm{H}}\alpha(\cdot,\cdot) = K^{\mathrm{H}}T\alpha(\cdot)$ на Q. Векторное поле $\operatorname{tr}\nabla^{\mathrm{H}}\alpha(\alpha\cdot,\cdot)$ также горизонтально по построению.

Предположим, что H^{τ} и H^{π} стохастически полны (см. [2]). Выберем точку $(m,q) \in Q$ и в $T_m\mathcal{M}$ зафиксируем лоренц-ортогональный репер, состоящий из векторов X_0, X_1, X_2, X_3, где X_0 времениподобный, а остальные векторы пространственноподобные. Введём в $T_m\mathcal{M}$ евклидову метрику, изменив знак X_0^2 с минуса на плюс. Тогда $T_m\mathcal{M}$ становится евклидовым пространством.

Зафиксируем $T > 0$. на банаховом пространстве $C^0([0,T], T_m\mathcal{M})$ введём σ-алгебру $\mathcal{P}$, порождённую цилиндрическими множествами, и семейство её подалгебр $\mathcal{P}_t$, порождённое цилиндрическими множествами с основаниями на $[0,t]$. Поскольку $T_m\mathcal{M}$ теперь имеет структуру евклидова пространства, мы можем определить меру Винера ν на $(C^0([0,T], T_m\mathcal{M}), \mathcal{P})$ и, таким образом, рассмотреть стандартный винеровский процесс $W_m(t)$ в $T_m\mathcal{M}$ — координатный процесс на $(C^0([0,T], T_m\mathcal{M}), \mathcal{P}, \nu)$. Мы предполагаем все $\mathcal{P}_t$ полными, т. е. содержащими все множества нулевой меры ν.

Так как связность H^{τ} стохастически полна, развёртка Ито $W^{\mathcal{M}}(t)$ процесса $W_m(t)$ относительно H^{τ} на $\mathcal{M}$ определена корректно. Поскольку H^{π} также стохастически полна, горизонтальный подъём процесса $W^{Q}(t)$ на Q относительно H^{π}, начинающийся в (m,q), также определён корректно. Более подробно построение процессов $W^{\mathcal{M}}(t)$ и $W^{Q}(t)$ описано в [2]. Вдоль W^{Q} рассмотрим элементы $\alpha^{i}_{j}(t,x)$ матрицы $\alpha_{t,x}(\cdot)$ и координаты $V^{k}(t,x)$ вектора $\operatorname{tr}\nabla^{\mathrm{H}}\alpha_{t,x}(\alpha_{t,x}\cdot,\cdot)$ относительно базисов, полученных как горизонтальный подъём параллельного переноса репера $X_0,\dots,X_3$.

Отметим, что условие (16) не имеет в данном случае естественного физически осмысленного аналога. Вместо него мы делаем следующее предположение.

Предположение 7. Вдоль выборочных траекторий $x(t)$ процесса W^{Q} для некоторого $C > 0$ ν-почти достоверно выполняется неравенство

$$\int\limits_{0}^{T} \Big(\big(\alpha^{i}_{j}\big(t,x(t)\big)\big)^{2} + V^{k}\big(t,x(t)\big)^{2}\Big)\,dt < C$$

Теорема 8. *Пусть обе связности H^{τ} и H^{π} стохастически полны и выполнено предположение 7. Тогда для любого вектора $\beta_0 \in \mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$ и любого момента времени $t_0 > 0$ существует процесс $\eta(t)$ в Q, такой что*

— *он корректно определён на $[0,T]$;*

— *$\eta(0) = (m,q)$ и $\mathbf{D}_{+}\eta(0) = \beta_0$;*

— *для* $t \in (t_0, T)$ *процессы* $\eta(t)$ *и* $\xi(t) = \pi\eta(t)$ *удовлетворяют уравнению* (31);
— *вдоль* $\eta(t)$ *заряд* $e\big(\eta(t)\big)$ *имеет постоянное значение.*

Замечание 3. Из физических соображений вектор β_0 следует выбирать как горизонтальный подъём времениподобного вектора в $T_m\mathcal{M}$, направленного в будущее.

Доказательство теоремы 8. Для простоты и без потери общности мы полагаем, что $\hbar/\mathrm{m} = 1$.

Поскольку $T\pi\colon \mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)} \to T_m\mathcal{M}$ — линейный изоморфизм, мы можем перенести и евклидову метрику, и винеровский процесс из $T_m\mathcal{M}$ в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$. Обозначим последний винеровский процесс через $W(t)$. Это координатный процесс на вероятностном пространстве $\big(C^0\big([0,T], \mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}\big), \mathcal{P}, \nu\big)$.

Далее мы будем использовать функцию $t_0(t)$, введённую формулой (17), и её производную.

Теперь рассмотрим в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$ следующее стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито:

$$\beta(t) = \beta_0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \bar{\Gamma}^Q_{0,s} \operatorname{tr} \nabla^{\mathrm{H}} \alpha_{(s, W^Q(s))}(\alpha\cdot, \cdot)\, ds + \\ + \int\limits_0^t \bar{\Gamma}^Q_{0,s} \alpha_{(s,W^Q(s))}\, dW(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t t_0(s)\beta(s)\, ds - \frac{1}{2}\int\limits_0^t t_0'(s) W(s)\, ds. \quad (34)$$

Отметим, что, несмотря на то что вид уравнения (34) практически совпадает с (18), в этих уравнениях задействованы разные связности и разные операторы параллельного переноса. Тем не менее рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 5, в основном остаются верными.

Из предположения 7 следует, что (34) корректно определено. Из линейности уравнения (34) следует, что оно имеет сильное и сильно единственное решение $\beta(t)$. После замены меры Винера на $\big(C^0\big([0,T], \mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}\big), \mathcal{P}\big)$ на меру с плотностью

$$\theta(l) = \exp\bigg(-\frac{1}{2}\int\limits_0^T \beta(s)^2\, ds + \int\limits_0^T \big(\beta(s)\cdot dW(s)\big)\bigg) \quad (35)$$

относительно ν (где β^2 и $\beta(s)\cdot dW(s)$ найдены относительно евклидова скалярного произведения в $\mathsf{H}^{\pi}_{(m,q)}$; из предположения 7 следует, что плотность (35) задана корректно) мы получаем уравнение

$$\beta(t) = \beta_0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \bar{\Gamma}^Q_{0,s} \operatorname{tr} \nabla^{\mathrm{H}} \alpha_{(s,\eta(t))}(\alpha\cdot, \cdot)\, ds + \int\limits_0^t \bar{\Gamma}^Q_{0,s} \alpha_{(s,\eta(s))}\beta(s)\, ds + \\ + \int\limits_0^t \bar{\Gamma}^Q_{0,s} \alpha_{(s,\eta(s))}\, dw(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t t_0(s)\beta(s)\, ds - \frac{1}{2}\int\limits_0^t t_0'(s)\zeta(s)\, ds. \quad (36)$$

По построению $\eta(0) = (m, q)$ и $\mathbf{D}_+\eta(t) = \beta_0$. Равенство (33) выполнено для $\eta(t)$ и $\xi(t) = \pi\eta(t)$ также по построению. То, что при $t \in (t_0, T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ удовлетворяют (32) и что $D_2\xi(t) = I$, вытекает из формул производных в среднем, выведенных в [2, гл. 12 и 18] (см. также [7, гл. 9 и 15]).

Тот факт, что заряд e является постоянным вдоль решения, показывается в точности так же, как в доказательстве теоремы 5. $\square$

Частные случаи группы G, равной $U(1)$, $SU(2)$ или $SU(3)$, и $\mathcal{F}$, являющегося комплексным линейным пространством соответствующей размерности, представляют особый интерес. Они описывают калибровочные поля, изучаемые в современной физике. Рассмотрим случай $G = U(1)$ и $\mathcal{F} = \mathbb{C}^1$ с $h(X, Y) = X\bar{Y}$ (черта означает комплексное сопряжение).

Алгебра Ли $\mathfrak{u}(1)$ — это вещественная прямая, следовательно, заряд превращается в вещественнозначную функцию, а θ и Φ — в обычные дифференциальные формы со значениями в $\mathbb{R}$. Из структурных уравнений (1) и из того, что $U(1)$ — коммутативная группа, мы выводим, что $\Phi = D\theta = d\theta$. Это означает, что, во-первых, Φ является подъёмом некоторой 2-формы Ψ с $\mathcal{M}$ на $\mathcal{E}$ и, во-вторых, уравнения (1) превращаются в обычные уравнения Максвелла в геометрически инвариантной форме (см., например, [2]). Если мы (как обычно) предположим, что замкнутая форма Ψ точна, т. е. $\Psi = dA$, где A — 1-форма на $\mathcal{M}$, то 1-форму A можно считать 4-потенциалом, а Ψ — электромагнитным полем. Напомним, что на пространстве Минковского все замкнутые формы точны.

Так как значение заряда e вдоль решения, построенного в теореме 5, постоянно, легко убедиться, что $\overline{e \bullet \tilde{\Phi}}$ превращается в подъём вектора $e\bar{\Psi}$ с $\mathcal{M}$ на Q. Таким образом, уравнение (31) сводится к уравнению Ньютона—Нельсона на $\mathcal{M}$, которое соответствует классическому уравнению Лоренца движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Отметим, что в [5, 11, 14, 15] установлены соотношения между этим уравнением Ньютона—Нельсона и уравнением Клейна—Гордона.

Литература

[1] Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж. Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.

[2] Гликлих Ю. Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики. — М.: Комкнига, 2005.

[3] Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. — Киев: Выща школа, 1989.

[4] Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. — М.: Мир, 1988.

[5] Dohrn D., Guerra F., Ruggiero P. Spinning particles and relativistic particles in framework of Nelson's stochastic mechanics // Feynman Path Integrals. Proc. Int. Colloq. Held in Marseille, May 1978. — (Lect. Notes Phys.; Vol. 106). — Berlin: Springer, 1979. — P. 165—181.

[6] Elworthy K. D. Stochastic Differential Equations on Manifolds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.

[7] Gliklikh Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. — London: Springer, 2011.

[8] Gliklikh Yu. E., Ratiner P. S. On a certain type of second order differential equations on total spaces of fiber bundles with connections // Nonlinear Analysis in Geometry and Topology. — Palm Harbor: Hadronic Press, 2000. — P. 99—106.

[9] Gliklikh Yu. E., Vinokurova N. V. On the motion of a quantum particle in the classical gauge field in the language of stochastic mechanics // Commun. Statistics Theory Methods. — 2011. — Vol. 40, no. 19-20. — P. 3630—3640.

[10] Gliklikh Yu. E., Vinokurova N. V. On the Newton—Nelson type equations on vector bundles with connections // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. — In print.

[11] Guerra F., Ruggiero P. A note on relativistic Markov processes // Lett. Nuovo Cimento. — 1978. — Vol. 23. — P. 529—534.

[12] Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics // Phys. Rev. — 1966. — Vol. 150, no. 4. — P. 1079—1085.

[13] Nelson E. Quantum Fluctuations. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1985.

[14] Zastawniak T. A relativistic version of Nelson's stochastic mechanics // Europhys. Lett. — 1990. — Vol. 13. — P. 13—17.

[15] Zastawniak T. Markov diffusion in relativistic stochastic mechanics // Proc. of Swansea Conf. on Stochastic Mechanics / Truman A. et al., eds. — Singapore: World Scientific, 1992. — P. 280—297.