Д. Г. Мартиросян, Зона действия граничных условий в модели классического изинговского ферромагнетика, *УМН*, 1979, том 34, выпуск 5, 225–226

https://www.mathnet.ru/rm4129

ЗОНА ДЕЙСТВИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В МОДЕЛИ КЛАССИЧЕСКОГО ИЗИНГОВСКОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

Д. Г. Мартиросян

Рассмотрим ν-мерную целочисленную решетку $T = Z^\nu$, $\nu \geqslant 2$ и пусть $X = \{-1, +1\}$. Для $V \subset T$ через $\overline{V}$ будем обозначать дополнение V в T, а через $\mathfrak{M}(V)$ — множество функций $\{x_t\colon V \to X,\ t \in V\}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(T)$. Элементы множества $\mathfrak{M}(V)$ будем называть конфигурациями решетчатой модели на V.

Расстояние между двумя точками решетки $t, t' \in T$, $t = (t_1, \ldots, t_\nu)$, $t' = (t'_1, \ldots, t'_\nu)$, положим равным $\rho(t, t') = \sum_{k=1}^{\nu} |t_k - t'_k|$.

Потенциал парного взаимодействия $U(x_t, x_{t'})$, $t, t' \in T$, $x_t, x_{t'} \in X$ для модели классического изинговского ферромагнетика определяется следующим образом: $U(x_t, x_{t'}) = x_t \cdot x_{t'}$, если $\rho(t, t') = 1$ и $U = 0$ в противном случае.

Распределением Гиббса (см. [1]) в конечном объеме $V \subset T$ с граничными условиями $\overline{x_t} \in \mathfrak{M}(\overline{V})$, отвечающим потенциалу U и параметрам $\mu \in R^1$ —«химическому потенциалу», и $\beta > 0$ —«обратной температуре», называется распределение вероятностей $q_{V|\overline{x}_t}(\cdot)$ на $\mathfrak{M}(V)$, определенное формулой

$$(1)\qquad \begin{cases} U_{V|\overline{x}_t}(x_t) = -\mu \sum\limits_{t\in V} x_t + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{s,\, t\in V} U(x_s, x_t) + \sum\limits_{s\in V,\, t\notin V} U(x_s, x_t), \\ q_{V|\overline{x}_t}(x_t) = \dfrac{1}{Z_{V|\overline{x}_t}} \exp\{-\beta U_{V|\overline{x}_t}(x_t)\}, \end{cases}$$

где $Z_{V|\overline{x}_t}$ — нормирующий множитель. Величину $h = \beta\mu$ будем называть внешним полем.

Нас будут интересовать свойства распределения (1) при $h \neq 0$ и достаточно большом β. Заметим, что если известно какое-либо свойство распределения (1) при $h > 0$, то, заменяя h на $-h$, а x_t и $\overline{x}_t$ на $-x_t$ и $-\overline{x}_t$ соответственно, мы получим аналогичное свойство распределения (1) при $h < 0$. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая $h > 0$.

Приведем некоторые определения, необходимые для формулировки основной теоремы.

Кубом V_k, $k \in Z^+$ на решетке T назовем множество точек $\{(t_1, \ldots, t_\nu) \in T\colon \max\limits_{1\leqslant j\leqslant\nu} |t_j| \leqslant k\}$, $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, $\bigcup V_i = T$. Множество точек $A \subset T$ назовем связным, если для любых двух точек $t', t'' \in A$ можно найти последовательность точек $t_1, \ldots, t_n \in A$ такую, что $t_1 = t'$, $t_n = t''$, и $\rho(t_s, t_{s+1}) = 1$ для $s = 1, \ldots, n-1$. Конечное связное множество $A \subset T$ назовем односвязным, если его дополнение $\overline{A}$ связно. Для конечного связного множества A через $\varphi(A)$ будем обозначать наименьшее односвязное множество, содержащее A.

Для конфигурации $x_t \in \mathfrak{M}(V_k)$ через $B_k^\pm(x_t)$ обозначим множество тех точек из V_k, в которых $x_t = \pm 1$. Пусть $B_k^\pm(x_t) = A_1^\pm(x_t) \cup \ldots \cup A_p^\pm(x_t)$ — разбиение $B_k^\pm(x_t)$ на связные компоненты, где число связных компонент p зависит от конфигурации x_t. Для $c > 0$ и $k \in Z^+$ через $\mathfrak{M}_k^\pm(c)$ обозначим множество всех тех конфигураций $x_t \in \mathfrak{M}(V_k)$, для которых одна из связных компонент $A_s^\pm(x_t)$, $1 \leqslant s \leqslant p$, множества $B_k^\pm(x_t)$ обладает свойством $\varphi(A_s^\pm(x_t)) \supset V_{k-c\ln k}$.

Теорема 1. *При некотором $\beta_0 > 0$ справедливо следующее утверждение. Для любых $\beta > \beta_0$ и $h > 0$ найдется такое $c(\beta, h) > 0$, что вероятность события $\mathfrak{M}_k^-(c(\beta, h))$, вычисленная в соответствии с распределением Гиббса $q_{V_k|\overline{x}_t^{(k)}}(\cdot)$ в объеме V_k с граничными* *условиями* $\bar{x}_t^{(k)} \in \mathfrak{M}(\bar{V}_k)$ *и параметрами* β, h, *стремится к* 1 *при* $k \to \infty$ *для любой последовательности граничных условий* $\bar{x}_t^{(k)} \in \mathfrak{M}(\bar{V}_k)$.

Пусть теперь $t_1, \ldots, t_n \in T$, $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \in X$; $V \subset T$ — конечное множество, и $\bar{x}_t \in \mathfrak{M}(\bar{V})$. Через $q_{V|\bar{x}_t}(t_1, \ldots, t_n, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ обозначим корреляционную функцию, равную вероятности множества тех конфигураций $x_t \in \mathfrak{M}(V)$, которые в точках t_p, $1 \leqslant p \leqslant n$, принимают значения $x^{(p)}$ соответственно. В работе [2] показано, что при $\beta > 0$ и $h \neq 0$ предельное распределение Гиббса единственно, откуда вытекает, что для этих значений параметров корреляционная функция $q_{V_k|\bar{x}_t^{(k)}}(t_1, \ldots, t_n, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ при $k \to \infty$ сходится к некоторому пределу $q(t_1, \ldots, t_n, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$, не зависящему от выбора последовательности граничных условий $\bar{x}_t^{(k)} \in \mathfrak{M}(\bar{V}_k)$; при этом

$$q(t_1 + t, \ldots, t_n + t, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = q(t_1, \ldots, t_n, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$$

для всех $t \in T$.

Таким образом, при $k \to \infty$ действие граничных условий ослабевает в любой конечной фиксированной области $T_1 \subset T$ и в формулируемой ниже теореме этот результат уточняется, а именно, приводятся асимптотические оценки зоны действия граничных условий для куба V_k при $k \to \infty$, т. е. выделяется то подмножество куба V_k, в котором влияние граничных условий достаточно мало́.

Теорема 2. *Пусть* $t_1, \ldots, t_n \in T$; $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \in X$ *и* $\beta_0 > 0$ — *то же, что и в теореме* 1. *Для любых* $\beta > \beta_0$ *и* $h \neq 0$ *найдется* $c_1(\beta, h) > 0$, *не зависящее от* $t_1, \ldots, t_n$ *и* $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ *такое, что при* $k \to \infty$

$$\sup | q_{V_k|\bar{x}_t^{(k)}}(t_1 + t, \ldots, t_n + t, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) - q(t_1 + t, \ldots, t_n + t, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) |$$

стремится к нулю, где sup *берется по всем граничным условиям* $\bar{x}_t^{(k)} \in \mathfrak{M}(\bar{V}_k)$ *и тем* $t \in T$, *для которых все точки* $t_1 + t, \ldots, t_n + t$ *лежат в кубе* $V_{k - c_1(\beta, h) \ln k}$.

Замечание. Возьмем в качестве X произвольное конечное множество, и пусть относительный потенциал H' имеет вид $H' = H_0 + hH_1$ (см. определения работы [3]), где H_0 — относительный потенциал с двумя основными состояниями, а H_1 снимает вырождение основного состояния H_0. Эти модели, являющиеся обобщением модели классического изинговского ферромагнетика, изучены в [3] в области значений параметров β, h с $\beta > \beta_0$, $|h| < h_0$, для некоторых h_0 и $\beta_0 > 0$. При этом в [3] доказано существование непрерывной функции $h(\beta)$, $|h(\beta)| < h_0$, определенной при $\beta > \beta_0$, такой, что при значениях параметров β, $h(\beta)$ есть по крайней мере два различных предельных распределения Гиббса. При всех остальных допустимых значениях параметров β, h, т. е. при $\beta > \beta_0$, $|h| < h_0, h \neq h(\beta)$, метод доказательства теорем 1 и 2 позволяет установить аналогичные им теоремы уже для моделей с относительным потенциалом H'.

В заключение автор благодарит Я. Г. Синая за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Л. Добрушин, Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, Функц. анализ 2:4 (1968), 31—43.

[2] D. Ruelle, On the use of «small external field» in the problem of symmetry breakdown in statistical mechanics, Ann. of Physics 69:2 (1972), 364—374.

[3] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай, Фазовые диаграммы классических решетчатых систем, Теорет. и матем. физика 25:3 (1975), 358—369.

Поступило в Правление общества 5 марта 1979 г.