



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. S. Rakhimov, Sampling sums of dependent variables, mixtures of infinitely divisible laws, and branching random processes, *Diskr. Mat.*, 1991, Volume 3, Issue 2, 128–147

<https://www.mathnet.ru/eng/dm796>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.83

April 26, 2025, 21:33:24



УДК 519.21

## ВЫБОРОЧНЫЕ СУММЫ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН, СМЕСИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ И ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

И. Ра х и м о в

Доказываются предельные теоремы о сходимости к смеси безгранично делимых законов распределения суммы

$$\sum_{k=1}^n v_k(n) X_k(n),$$

где  $X_k(n)$  – некоторые (вообще говоря, зависимые) случайные величины, а  $v_k(n)$  – случайные величины, принимающие значения 0 и 1. Полученные результаты применяются в двух задачах: при исследовании ветвящихся процессов с иммиграцией, в которых допускается зависимость процессов размножения и иммиграции, и при доказательстве предельных теорем для выборочных сумм из конечной совокупности зависимых случайных величин.

### Введение

Рассмотрим семейство случайных величин  $\{X_i(n), (i, n) \in \mathbb{N}^2\}$ ,  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ , определенных на вероятностном пространстве  $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ , и семейство  $\{\mathcal{F}_i(n), (i, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}\}$ ,  $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $\sigma$ -подалгебр  $\mathcal{A}$  таких, что для любой пары  $(i, n)$  величина  $X_i(n)$  измерима относительно  $\mathcal{F}_i(n)$ ;  $\mathcal{F}_0(n)$  – некоторая  $\sigma$ -алгебра.

Нас будет интересовать предельное распределение случайных величин

$$S_n = \sum_{i=1}^n v_i(n) X_i(n), \quad (1)$$

где  $v_i(n)$  – случайные величины, принимающие значения 0 и 1 и такие, что для любой пары  $(i, n)$  величина  $v_i(n)$  измерима относительно  $\mathcal{F}_{i-1}(n)$ ; здесь и далее

$$F_k(n) = \prod_{j=0}^k \mathcal{F}_j(n).$$

Отметим, что никаких предположений о независимости величин, входящих в  $S_n$ , не делается.

Представление в виде (1) допускает хорошо известная выборочная сумма из конечной совокупности [8–10, 17–24]. Кроме того, ясно, что в (1) содержится обычная схема суммирования случайного числа случайных величин. Формально

сумма (1) является частным случаем двойной суммы

$$S_n^* = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\eta_k(n)} \xi_{i,k}(n), \quad (2)$$

в которой  $\eta_k(n)$  принимают целые неотрицательные значения. Однако ниже будет показано, что из результатов, полученных для  $S_n$ , легко могут быть выведены предельные теоремы для  $S_n^*$ .

Суммы вида (2) ранее изучались в [11, 12] в связи с приложениями в теории ветвящихся случайных процессов в случае, когда  $\xi_{ik}(n)$  независимы по  $i, k$ , имеют одно и то же распределение при разных  $i$  и не зависят от  $\eta_k(n)$ .

В данной работе мы докажем предельные теоремы для  $S_n$ . Как уже было отмечено, обычная схема суммирования случайного числа слагаемых может быть сведена к схеме (1). Покажем теперь, что кратные суммы вида (2) также могут быть выражены через суммы (1). Пусть  $N_n$  — такая последовательность целых чисел, что

$$P\{\mathcal{M}_n\} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \mathcal{M}_n = \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \eta_k^{(n)} \geq N_n \right\},$$

$\chi$  — индикаторная случайная величина. Тогда для любой случайной величины  $\xi$  и любого  $x \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$  справедливо неравенство

$$|P\{\chi\xi < x\} - P\{\xi < x\}| \leq P\{\chi = 0\}.$$

Пусть всюду далее  $\chi(A)$  обозначает индикатор события  $A$ . Положим

$$X_{kN_n+j}(n) = \xi_{jk+1}(n), \quad \nu_{kN_n+j}(n) = \chi(j \leq \eta_{k+1}(n)), \\ j = 1, \dots, N_n, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Соотношение

$$\chi(\bar{\mathcal{M}}_n) S_n^* = \chi(\bar{\mathcal{M}}_n) S_{nN_n}, \quad \bar{\mathcal{M}}_n = \Omega \setminus \mathcal{M}_n,$$

в силу приведенного неравенства и выбора последовательности  $N_n$  показывает, что суммы  $S_n$  и  $S_n^*$  имеют одно и то же предельное распределение.

Ясно, что проведенные выше рассуждения позволяют сводить кратные суммы любой конечной кратности к однократной схеме суммирования (1).

Основная теорема 1 дает общие условия сходимости распределения  $S_n$  к смеси безгранично делимых законов. Теорема 3 относится к случаю конечной дисперсии. Разумеется, с их помощью могут быть получены условия сходимости к смесям различных конкретных безгранично делимых распределений. Из теоремы 3 может быть получен (если положить  $\nu_k(n) \equiv 1$ ) результат Иглсона [1] о сходимости суммы мартингал-разностей к смеси безгранично делимых распределений. Поскольку в (1) содержится обычная схема суммирования случайного числа слагаемых, из теоремы 3 следуют, например, результаты работ [2–4], а из теоремы 1 можно получить результаты [5, 6].

Доказательство теоремы 1 проводится методом стохастических экспонент для семимартингалов [15, 16]. Вспомогательная теорема 2 выводится из теоремы о сходимости условных характеристических функций к характеристической функции процесса с условно независимыми приращениями [15]. Затем с помощью теоремы 2 доказываемся сходимость распределения  $S_n$  к смеси безгранично делимых законов.

Последние параграфы посвящены приложениям доказанных теорем к изучению ветвящихся случайных процессов с иммиграцией [7, 13] и к доказательству предельных теорем для сумм величин, случайно отобранных из конечной совокупности [8–10], [17–24].

Рассматриваемые здесь ветвящиеся процессы с иммиграцией отличаются от традиционных тем, что, во-первых, допускается зависимость процессов размножения

и иммиграции (более точно об этом см. § 3), во-вторых, иммигрирующие частицы могут давать начало как критическим, так и докритическим или надкритическим процессам, в-третьих, эволюция процесса зависит от состояния случайной среды в начале процесса.

Что касается выборочных сумм из конечной совокупности, то оказывается, что с помощью теоремы 3 можно изучить обобщенную схему выбора без возвращения, в которой вопрос о включении данной величины в сумму решается в зависимости от значений предыдущих случайных величин.

### § 1. Формулировка основной теоремы

Пусть  $\tau_i(n)$  – такое семейство неотрицательных случайных величин, что почти всюду

$$|M_{i-1n} [X_i(n) \chi(|X_i(n)| \leq \tau_i(n))]| < \infty. \quad (3)$$

Здесь и всюду в дальнейшем

$$M_{in} [\xi] = M[\xi | F_i(n)].$$

Пусть  $\mathcal{F}_0$  – такая  $\sigma$ -алгебра, что  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_0(n)$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Через  $K = K(x, \omega)$  обозначим функцию, отображающую  $\mathbb{R} \times \Omega$  в  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  и такую, что при любом фиксированном  $x$  она является  $\mathcal{F}_0$ -измеримой случайной величиной, а для почти всех  $\omega \in \Omega$  является неубывающей ограниченной функцией от  $x$ , причем  $K(-\infty, \omega) = 0$ .

Полагая

$$h(t, x) = \begin{cases} \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}, & x \neq 0, \\ -t^2/2, & x = 0, \end{cases}$$

определим функцию

$$\psi(t) = \exp \left\{ it\gamma + \int_{-\infty}^{\infty} h(t, x) dK(x) \right\}, \quad (4)$$

где  $\gamma$  – случайная величина, измеримая относительно  $\mathcal{F}_0$ . Тогда для почти всех  $\omega \in \Omega$  функции  $\psi(t)$  будет характеристической функцией безгранично делимого распределения [14].

Теперь введем обозначения, необходимые для формулировки основного результата. Пусть

$$\theta_i(n) = M_{i-1n} [X_i(n) \chi(|X_i(n)| \leq \tau_i(n))], \quad Y_i(n) = X_i(n) - \theta_i(n),$$

$$f_j^{(n)}(t) = M_{j-1n} e^{itX_j(n)}, \quad \varphi_j^{(n)}(t) = M_{j-1n} e^{itY_j(n)},$$

$$B_i(n) = M_{i-1n} \frac{Y_i(n)}{1+Y_i^2(n)}, \quad D_i(n) = M_{i-1n} \frac{Y_i^2(n)}{1+Y_i^2(n)}.$$

Введем следующие условия: для любой точки  $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  и некоторой  $\mathcal{F}_0$ -измеримой функции  $K(x)$  при  $n \rightarrow \infty$

$$K_n(x) = \sum_{i=1}^n v_i(n) M_{i-1n} \left[ \frac{Y_i^2(n)}{1+Y_i^2(n)} \chi(Y_i(n) < x) \right] \xrightarrow{\mathbf{P}} K(x) \quad (5)$$

для некоторого семейства  $C_i(n)$  случайных величин таких, что при любом  $(i, n) \in \mathbb{N}^2$  величина  $C_i(n)$  измерима относительно  $F_{i-1}(n)$ , и для некоторой  $\mathcal{F}_0$ -измеримой

случайной величины  $\gamma$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^n v_i(n) [\theta_i(n) + B_i(n) - C_i(n)] \xrightarrow{P} \gamma; \tag{6}$$

$$\epsilon_n(t) = \sum_{i=1}^n v_i(n) |1 - \varphi_i^{(n)}(t)|^2 \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{7}$$

**Теорема 1.** Если для любого  $i = 1, \dots, n$  случайная величина  $v_i(n)$  измерима относительно  $F_{i-1}(n)$  и для семейства  $F_{i-1}(n)$ -измеримых случайных величин  $C_i(n)$  выполнены условия (5)–(7), то при  $n \rightarrow \infty$

$$S_n - \sum_{i=1}^n v_i(n) C_i(n) \xrightarrow{D} W,$$

где распределение  $W$  является смесью безгранично делимых законов, характеристическая функция которой равна  $M\psi(t)$ ,  $\psi(t)$  – функция, определенная соотношением (4).

### § 2. Доказательство основной теоремы

Следующее утверждение, по существу, является вспомогательным при доказательстве теоремы 1. Ввиду того, что оно представляет и независимый интерес, выделим его в качестве теоремы.

**Теорема 2.** Пусть для любого  $i = 1, \dots, n$  величина  $v_i(n)$  измерима относительно  $F_{i-1}(n)$  и для семейства  $F_{i-1}(n)$ -измеримых случайных величин  $L_i(n)$  и некоторого действительного  $t$

$$\prod_{j=1}^n \{ e^{-itL_j(n)} f_j^{(n)}(t) \} v_j(n) \xrightarrow{P} \varphi(t), \quad n \rightarrow \infty, \tag{8}$$

где  $\varphi(t)$  – комплексная  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина с почти всюду положительным модулем. Тогда

$$M[\exp \{ it(S_n - \sum_{j=1}^n L_j(n) v_j(n)) \} | \mathcal{F}_0] \xrightarrow{P} \varphi(t), \quad n \rightarrow \infty. \tag{9}$$

**Доказательство теоремы 2.** Положим

$$V_\tau^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n\tau]} v_k(n) X_k(n), \quad \tau \in \mathbf{R}_+ = [0, \infty), \quad X_0^{(n)} = 0, \quad v_0(n) = 0. \tag{10}$$

Процесс  $V_\tau^{(n)}$  можно представить в виде разности двух процессов с неубывающими траекториями:

$$V_\tau^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n\tau]} v_k(n) X_k^+(n) - \sum_{k=0}^{[n\tau]} v_k(n) X_k^-(n) = {}_1V_\tau^{(n)} - {}_2V_\tau^{(n)},$$

где

$$X_k^+(n) = X_k(n) \vee 0, \quad X_k^-(n) = -(X_k(n) \wedge 0).$$

Поскольку

$$\text{Var}(V^{(n)})_\tau = \int_0^\tau |dV_s^{(n)}| = {}_1V_\tau^{(n)} + {}_2V_\tau^{(n)}$$

и величины  $X_k(n)$  собственные, траектории процесса  $V_s^{(n)}$  имеют ограниченные

вариации в любом конечном отрезке  $[0, \tau]$ . Значит,  $(V_\tau^{(n)}, F_{\lfloor n\tau \rfloor}(n))$  является семимартингалом [15, 16]. Вычислим триплет  $T^n = (B^n, C^n, \pi^n)$ . Находим, что мера скачков  $V_\tau^{(n)}$  равна

$$\mu^{(n)}((0, \tau] \times \Gamma) = \sum_{k=0}^{\lfloor n\tau \rfloor} \chi(\nu_k(n) X_k(n) \in \Gamma), \quad (11)$$

где  $\Gamma$  — борелевское множество из  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

Для любого борелевского множества  $\Gamma$ , не содержащего точку 0,

$$\{\nu_k(n) X_k(n) \in \Gamma\} = \{\nu_k(n) = 1\} \cap \{X_k(n) \in \Gamma\}.$$

Поэтому

$$\mu^{(n)}((0, \tau] \times \Gamma) = \sum_{k=0}^{\lfloor n\tau \rfloor} \nu_k(n) \chi(X_k(n) \in \Gamma), \quad (12)$$

и компенсатор этой меры скачков равен

$$\pi^{(n)}((0, \tau] \times \Gamma) = \sum_{k=0}^{\lfloor n\tau \rfloor} \nu_k(n) \mathbf{P}\{X_k(n) \in \Gamma | F_{k-1}(n)\}. \quad (13)$$

Здесь  $F_{-1}(n) = \{\phi, \Omega\}$ . Поэтому

$$B_\tau^{(n)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n\tau \rfloor} \nu_k(n) \mathbf{M}[X_k(n) \chi(|X_k(n)| \leq 1) | F_{k-1}(n)]. \quad (14)$$

Поскольку непрерывная часть семимартингала  $V_\tau^{(n)}$  равна нулю,  $C_\tau^{(n)} \equiv 0$ .

Вычислим теперь стохастическую экспоненту  $V_\tau^{(n)}$ . Пусть

$$\pi_{kn}(x) = \mathbf{P}\{X_k(n) \leq x | F_{k-1}(n)\}.$$

Тогда (см. [15, с. 256]) учитывая (13), получим, что

$$G_\tau^n(t) = itB_\tau^n + \sum_{k=0}^{\lfloor n\tau \rfloor} \nu_k(n) \int_{R_0} (e^{itx} - 1 - itx \chi(|x| \leq 1)) \pi_{kn}(dx). \quad (15)$$

Легко видеть, что почти всюду

$$\int_{R_0} x \chi(|x| \leq 1) \pi_{kn}(dx) = \mathbf{M}[X_k(n) \chi(|X_k(n)| \leq 1) | F_{k-1}(n)] \quad (16)$$

$$\int_{R_0} (e^{itx} - 1) \pi_{kn}(dx) = \mathbf{M}[(e^{itX_k(n)} - 1) | F_{k-1}(n)]. \quad (17)$$

Из соотношений (15)–(17) следует, что

$$G_\tau^n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor n\tau \rfloor} \nu_k(n) \mathbf{M}[(e^{itX_k(n)} - 1) | F_{k-1}(n)].$$

Отсюда, по определению стохастической экспоненты, получим, что

$$\begin{aligned} \epsilon_\tau(G_\tau^n(t)) &= e^{G_\tau^n(t)} \prod_{0 \leq s \leq \tau} (1 + \Delta G_s^n(t)) e^{-\Delta G_s^n(t)} = \\ &= \prod_{k=0}^{\lfloor n\tau \rfloor} [1 + \nu_k(n) \mathbf{M}[(e^{itX_k(n)} - 1) | F_{k-1}(n)]] . \end{aligned}$$

Очевидно, что случайная величина под знаком произведения при всех  $\omega \in \Omega$  равна

$f_{kn}^{\nu_k(n)}(t)$ . Поэтому

$$\epsilon_\tau(G_\tau^n(t)) = \prod_{k=0}^{\lfloor n\tau \rfloor} f_{kn}^{\nu_k(n)}(t). \quad (18)$$

Значит, в силу условия (8)

$$\epsilon_1(G_1^n(t)) \xrightarrow{P} \varphi(t).$$

Так как функция  $\varphi(t)$  измерима относительно  $\mathcal{F}_0$ , в силу [15, теорема 4.4.1] семимартингал  $V_\tau$  с такой стохастической экспонентой является процессом с  $\mathcal{F}_0$ -независимыми приращениями. Поэтому ([15, с. 256])

$$\varphi(t) = \epsilon_1(G_1(t)) = M[e^{itV_1} | \mathcal{F}_0].$$

Далее, в силу [15, теорема 5.1.1]

$$M[e^{itV_1^{(n)}} | F_{n-1}(n)] \xrightarrow{P} \varphi(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из теоремы о сходимости под знаком условных математических ожиданий ([25], с. 232) получаем, что при  $n \rightarrow \infty$

$$M[e^{itS_n} | \mathcal{F}_0] \xrightarrow{P} \varphi(t),$$

что и требовалось доказать.

**Доказательство теоремы 1.** В силу теоремы 2 достаточно доказать, что при условиях (5) – (7) для любого  $t$

$$\prod_{k=1}^n \{e^{-itC_k(n)} f_k^{\nu_k(n)}(t)\} \xrightarrow{P} \psi(t) \quad (19)$$

при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\psi(t)$  при любом  $t$  –  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина, определенная в (4).

Из условия (5) следует, что найдется такая положительная  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина  $T$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sum_{k=1}^n \nu_k(n) D_k(n) > T \right\} = 0 \quad (20)$$

(достаточно взять  $T > 2K(+\infty)$  почти всюду).

Введем события

$$\mathcal{B}_k(n) = \left\{ \sum_{i=1}^k \nu_i(n) D_i(n) \leq T \right\}$$

и определим случайные величины  $Y_k^*(n) = Y_k(n) \chi(\mathcal{B}_k(n))$ . Ясно, что для любого  $k \leq n$  и  $n \in \mathbb{N}$   $\mathcal{B}_k(n) \in F_{k-1}(n)$  и  $\mathcal{B}_k(n) \subseteq \mathcal{B}_{k-1}(n)$ . Введем обозначения для характеристик  $Y_k^*(n)$ , снабдив соответствующие характеристики  $Y_k(n)$  звездочкой. Покажем, что для любых  $n$  и  $m \leq n$

$$\sum_{k=1}^m \nu_k(n) D_k^*(n) \leq T \quad (21)$$

почти всюду. Из определения величин  $Y_k^*(n)$  следует равенство

$$\sum_{k=1}^m \nu_k(n) D_k^*(n) = \sum_{k=1}^m \nu_k(n) \chi(\mathcal{B}_k(n)) D_k(n). \quad (22)$$

Очевидно, что

$$\nu_1(n) D_1^*(n) = \nu_1(n) D_1(n) \chi(\mathcal{B}_1(n)) \leq T$$

почти всюду. Если (21) выполняется для некоторого  $m < n$ , то из соотношения

$$\sum_{k=1}^{m+1} \nu_k(n) D_k^*(n) = \sum_{k=1}^m \nu_k(n) D_k^*(n) + \nu_{m+1}(n) \chi(\mathfrak{B}_{m+1}(n)) D_{m+1}(n)$$

с учетом (22) и того, что  $\mathfrak{B}_{m+1}(n) \subset \mathfrak{B}_m(n) \subset \dots \subset \mathfrak{B}_1(n)$ , следует справедливость (21) для  $m+1$ . Таким образом, (21) верно для любого  $m \leq n$ .

Покажем теперь, что для  $Y_k^*(n)$  выполняются условия (5)–(7). В соотношении

$$K_n^*(x) = K_n(x) - \sum_{k=1}^n \nu_k(n) M_{k-1} n \left[ \frac{Y_k^2(n)}{1 + Y_k^2(n)} \chi(Y_k(n) < x) \chi(\overline{\mathfrak{B}}_k(n)) \right]$$

второе слагаемое правой части при  $n \rightarrow \infty$  по вероятности сходится к нулю. Действительно,  $\overline{\mathfrak{B}}_k(n) \in F_{k-1}(n)$  и для любого  $k \leq n$

$$\overline{\mathfrak{B}}_k(n) \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^n \nu_j(n) D_j(n) > T \right\},$$

а вероятность последнего события стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Далее, так как для  $k \leq n$

$$\theta_k^*(n) = \chi(\mathfrak{B}_k(n)) \theta_k(n), \quad B_k^*(n) = \chi(\mathfrak{B}_k(n)) B_k(n), \quad (23)$$

то при  $C_k^*(n) = \chi(\mathfrak{B}_k(n)) C_k(n)$  справедливы неравенства

$$0 \leq \gamma_n - \gamma_n^* \leq \chi\left(\sum_{j=1}^n \nu_j(n) D_j(n) > T\right) \gamma_n,$$

и условие (6) выполняется для  $\gamma_n^*$ . Используя тождество

$$\varphi_k^{(n)*}(t) = \chi(\mathfrak{B}_k(n)) \varphi_k^{(n)}(t) + \chi(\overline{\mathfrak{B}}_k(n)), \quad (24)$$

убедимся в том, что условие (7) также выполняется для  $\varphi_k^{(n)*}(t)$ .

Положим  $f_k^{(n)*}(t) = M_{k-1} n e^{it X_k^*(n)}$ ,  $X_k^*(n) = X_k(n) \chi(\mathfrak{B}_k(n))$ ; из определения величин  $C_k^*(n)$  следует, что

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{k=1}^n \left\{ e^{-it C_k^*(n)} f_k^{(n)*}(t) \right\}^{\nu_k(n)} \neq \prod_{k=1}^n \left\{ e^{-it C_k(n)} f_k^{(n)}(t) \right\}^{\nu_k(n)} \right\} \subseteq \\ & \subseteq \bigcup_{k=1}^n \left\{ \nu_k(n) = 1 \right\} \cap \left\{ \left\{ X_k^*(n) \neq X_k(n) \right\} \cup \left\{ C_k^*(n) \neq C_k(n) \right\} \right\} \subseteq \\ & \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^n \nu_j(n) D_j(n) > T \right\}. \end{aligned}$$

Значит, достаточно доказать сходимость

$$H_n(t) = \prod_{k=1}^n \left\{ e^{-it C_k^*(n)} f_k^{(n)*}(t) \right\}^{\nu_k(n)} \xrightarrow{P} \psi(t) \quad (25)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Используя соотношение

$$f_k^{(n)*}(t) = \exp \{ it \theta_k^*(n) \} \varphi_k^{(n)*}(t),$$

с помощью элементарных преобразований получим равенство

$$\ln H_n(t) = it \gamma_n^* + \epsilon_1(n) + \sum_{k=1}^n \nu_k(n) M_{k-1} n \left[ h(t, Y_k^*(n)) \frac{Y_k^{*2}(n)}{1 + Y_k^{*2}(n)} \right], \quad (26)$$



где  $|\epsilon_1(n)| \leq \epsilon^*(n)$ ,  $\epsilon^*(n)$  – сумма из аналога условия (7) для  $\varphi_k^{(n)*}(t)$ . Из условий (6) и (7) следует, что сумма первых двух слагаемых в (26) при  $n \rightarrow \infty$  по вероятности сходится к  $it\gamma$ . Нам остается доказать, что третье слагаемое в (26) при  $n \rightarrow \infty$  по вероятности сходится к стохастическому интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t, x) dK(x). \tag{27}$$

Ввиду непрерывности и ограниченности  $h(t, x)$  по  $x$ , интеграл Лебега–Стилтьеса (27) может быть рассмотрен как несобственный интеграл Римана–Стилтьеса.

Пусть  $\epsilon_1, \epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  – некоторые сколь угодно малые положительные числа, натуральное число  $m$  и точки  $x_k \in \mathbf{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , таковы, что  $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ ,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j - x_{j-1}| < \epsilon_1, \quad \max_{1 \leq j \leq m} |h(t, x_j) - h(t, x_{j-1})| < \epsilon_2, \\ K(x_0) < \epsilon_2, \quad K(+\infty) - K(x_m) < \epsilon_2, \\ \left| \sum_{j=1}^m h(t, x_{j-1}) [K(x_j) - K(x_{j-1})] - \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, x) dK(x) \right| < \epsilon_3 \end{aligned} \tag{28}$$

почти всюду. Ввиду ограниченности  $h(t, x)$  найдется такое  $C(t)$ , что  $|h(t, x)| \leq C(t)$  для всех  $x$  при фиксированном  $t$ .

Представим сумму в (26) в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \nu_k(n) M_{k-1n} \left[ h(t, Y_k^*(n)) \frac{Y_k^{*2}(n)}{1 + Y_k^{*2}(n)} \chi(Y_k^*(n) \leq x_0) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^n \nu_k(n) M_{k-1n} \left[ h(t, Y_k^*(n)) \frac{Y_k^{*2}(n)}{1 + Y_k^{*2}(n)} \chi(Y_k^*(n) > x_m) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^n \nu_k(n) \sum_{j=1}^m M_{k-1n} \left[ h(t, Y_k^*(n)) \frac{Y_k^{*2}(n)}{1 + Y_k^{*2}(n)} \chi(E_k(n, j)) \right], \end{aligned} \tag{29}$$

где  $E_k(n, j) = \{x_{j-1} < Y_k^*(n) \leq x_j\}$ . Модуль первого слагаемого в (29) почти всюду меньше величины  $C(t) K_n^*(x_0)$ , которая сходится по вероятности при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированном  $x_0$  к величине  $C(t) K(x_0) < C(t) \epsilon_2$ . Аналогично, модуль второго слагаемого почти всюду не превосходит величины  $C[K_n^*(\infty) - K_n^*(x_m)]$ , которая по вероятности сходится к  $C(t) [K(\infty) - K(x_m)] < C(t) \epsilon_2$  при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированном  $x_m$ .

Если через  $\epsilon_2(m, n)$  обозначить разность третьего слагаемого в (29) и интеграла (27), то

$$\epsilon_2(m, n) = \epsilon_3(m, n) + \epsilon_4(m, n) + \epsilon_5(m), \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_3(m, n) = & \sum_{k=1}^n \nu_k(n) \sum_{j=1}^m M_{k-1n} \left[ h(t, Y_k^*(n)) \frac{Y_k^{*2}(n)}{1 + Y_k^{*2}(n)} \chi(E_k(n, j)) \right] - \\ & - \sum_{j=1}^m h(t, x_{j-1}) [K_n^*(x_j) - K_n^*(x_{j-1})], \end{aligned}$$

$$\epsilon_4(m, n) = \sum_{j=1}^m h(t, x_{j-1}) [K_n^*(x_j) - K(x_j) + K_n^*(x_{j-1}) - K(x_{j-1})],$$

$\epsilon_5(m)$  – разность из соотношения (28).

Учитывая выбор точек  $x_j$  и свойство (21) величин  $Y_k^*(n)$ , получим, что почти всюду для всех  $n$

$$|\epsilon_3(m, n)| \leq \epsilon_2 \sum_{k=1}^n \nu_k(n) D_k^*(n) \leq \epsilon_2 T. \quad (31)$$

Наконец, в силу условия (5) при любом фиксированном разбиении и  $n \rightarrow \infty$  величина  $\epsilon_4(n, m)$  по вероятности сходится к нулю. Чтобы получить нужную нам сходимость, сначала выберем разбиение  $x_0, \dots, x_m$  таким, что  $(2C(t) + T)\epsilon_2 + \epsilon_3 < \epsilon$ , затем, зафиксировав это разбиение, устремим  $n$  к бесконечности и получим, что разность третьего слагаемого в (26) и интеграла (27) по вероятности сходится к нулю. Теорема 1 доказана.

Приведем теперь результат в случае конечной дисперсии. Предположим, что для любой пары  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$  почти всюду

$$M_{k-1n}[X_k^2(n)] < \infty. \quad (32)$$

Тогда, если  $Y_k(n) = X_k(n) - M_{k-1n}[X_k(n)]$ , то  $M_{k-1n}[Y_k(n)] = 0$ . Значит, стохастическая последовательность  $(Y_k(n), F_k(n))$ , где  $F_k(n) = \prod_{i=1}^k \mathcal{F}_i(n)$ , образует мартингал-разность.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma_k^2(n) = M_{k-1n}[Y_k^2(n)], \quad \theta_k(n) = M_{k-1n}[X_k(n)],$$

$$L(t, x) = \begin{cases} (e^{itx} - 1 - itx)x^{-2}, & x \neq 0, \\ -t^2/2, & x = 0. \end{cases}$$

Положим также

$$\pi(t) = \exp \left\{ it\gamma + \int_{-\infty}^{\infty} L(t, x) dK(x) \right\},$$

где  $\gamma$  — некоторая  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина,  $K(x)$  — та же функция, что и в (4).

**Теорема 3.** Пусть для любого  $k = 1, \dots, n$  случайная величина  $\nu_k(n)$  измерима относительно  $F_{k-1}(n)$ , для последовательности положительных постоянных  $B_n$  существует конечная  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина  $T$  такая, что при  $n \rightarrow \infty$

$$P \left\{ B_n^{-2} \sum_{k=1}^n \nu_k(n) \sigma_k^2(n) > T \right\} \rightarrow 0, \quad \max_{1 \leq k \leq n} \nu_k(n) \sigma_k^2(n) B_n^{-2} \xrightarrow{P} 0. \quad (33)$$

Тогда, если для некоторого семейства  $F_{k-1}(n)$ -измеримых случайных величин  $C_k(n)$

$$\sum_{k=1}^n \nu_k(n) \left[ \frac{1}{B_n} \theta_k(n) - C_k(n) \right] \xrightarrow{P} \gamma, \quad n \rightarrow \infty, \quad (34)$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \nu_k(n) M_{k-1n}[Y_k^2(n) \chi(Y_k(n) < xB_n)] \xrightarrow{P} K(x) \quad (35)$$

при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ , то

$$\frac{1}{B_n} S_n - \sum_{k=1}^n \nu_k(n) C_k(n) \xrightarrow{D} \omega,$$

где  $\omega$  имеет характеристическую функцию  $M\pi(t)$ .

Доказательство теоремы 3 следует из теоремы 2 и следующего утверждения.

**У т в е р ж д е н и е 1.** Пусть для последовательности случайных величин  $\nu_k(n)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , принимающих значения 0 и 1, выполнены условия (33)–(35). Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\prod_{k=1}^n \left\{ e^{-itC_k(n)} f_k^{(n)}\left(\frac{t}{B_n}\right) \right\}^{\nu_k(n)} \xrightarrow{P} \pi(t).$$

### § 3. Ветвящиеся процессы с обобщенной иммиграцией

Рассматриваемая нами схема возникла в связи с задачами теории ветвящихся случайных процессов. Используя теоремы 1–3, можно изучить различные модели ветвящихся процессов с иммиграцией, в которых процессы размножения и иммиграции могут быть определенным образом зависимыми. Можно также рассмотреть процессы, в которых размножение частиц внутри каждого "семейства" происходит независимо, а эволюции потомств разных "частиц-иммигрантов" могут зависеть друг от друга, и т.д.

В качестве примера рассмотрим процесс с иммиграцией, вся эволюция которого зависит от состояния случайной среды в начале процесса и не зависит от состояния среды в другие моменты времени. Пусть  $\{\mu_{ik}(n)\}$  – (не обязательно независимые) ветвящиеся случайные процессы с дискретным временем, задаваемые производящими функциями числа непосредственных потомков  $f_{ik}(s)$ ,  $|s| \leq 1$ .

Предположим, что производящие функции  $f_{ik}(s)$  при фиксированном  $s$  являются  $\mathcal{F}_0$ -измеримыми случайными величинами, где  $\mathcal{F}_0$  –  $\sigma$ -алгебра, относительно которой измеримо состояние случайной среды в момент начала процесса. В момент времени  $k$  происходит иммиграция случайного числа частиц  $\eta_k(n)$ . Через  $Z(n)$  обозначим число частиц в момент  $n$  при условии, что в начале процесса не было частиц.

Нетрудно видеть, что описанный процесс укладывается в рассмотренную выше схему и может быть представлен в виде

$$Z(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\eta_k(n)} \mu_{ik}(n-k), \tag{36}$$

где  $\mu_{ik}(n)$  – процесс, начавшийся от  $i$ -й из иммигрировавших в момент  $k$  частиц.

Пусть  $\mathcal{F}_{ik}(n)$ ,  $(i, k, n) \in \mathbb{N}^3$ , –  $\sigma$ -алгебры, порожденные величинами  $\mu_{ik}(n-k)$ ,  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{11}(n)$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ .

Предположим, что при фиксированном начальном состоянии случайной среды иммигрировавшие частицы размножаются по процессу Гальтона–Ватсона независимо друг от друга, а числа иммигрирующих частиц  $\eta_k(n)$  таковы, что для любого  $j$

$$\{\eta_k(n) \leq j\} \in \mathcal{F}_{jk}(n) = \prod_{l=1}^{k-1} \prod_{i=1}^{\eta_l(n)} \mathcal{F}_{il}(n) \times \prod_{i=1}^j \mathcal{F}_{ik}(n) \times \mathcal{F}_0, (k, n) \in \mathbb{N}^2. \tag{37}$$

Здесь и в дальнейшем  $\prod_{i=1}^0 \mathcal{F}_{ik}(n) = \{\Omega, \phi\}$  для любых  $k, n$ .

В дальнейшем целочисленную случайную величину  $\eta_k(n)$ , удовлетворяющую условию (37), назовем *двойным моментом остановки* относительно системы  $\{\mathcal{F}_{jk}(n), (j, k, n) \in \mathbb{N}^3\}$ .

Положим

$$M_{jkn}[\xi] = M[\xi | \mathcal{F}_{jk}(n)].$$

В наших предположениях для  $(j, k, n) \in \mathbb{N}^3$

$$M_{j-1kn} e^{it\mu_{jk}(n-k)} = M[e^{it\mu_{jk}(n-k)} | \mathcal{F}_0] = f_{jk}^{(n-k)}(e^{it}), \tag{38}$$

где  $f_{jk}^{(n)}(s)$  –  $n$ -я функциональная итерация  $f_{jk}(s)$  и процессы  $\mu_{jk}(\cdot)$  при фиксированном начальном состоянии случайной среды условно независимы.

Используя (38), стандартными вычислениями находим, что

$$\begin{aligned} M[\mu_{ik}(n) | \mathcal{F}_0] &= a_{ik}^n, \quad a_{ik} = M[\mu_{ik}(1) | \mathcal{F}_0], \\ D[\mu_{ik}(n) | \mathcal{F}_0] &= D[\mu_{ik}(1) | \mathcal{F}_0] \left[ \frac{a_{ik}^n(1 - a_{ik}^n)}{a_{ik}(1 - a_{ik})} \chi(a_{ik} \neq 1) + n \chi(a_{ik} = 1) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Для упрощения выкладок предположим, что  $f_{ik}(s)$  совпадают при разных  $i$ , т.е. одновременно иммигрировавшие частицы размножаются по одному и тому же закону распределения. Введем обозначения  $a_{ik} = a_k$ ,  $b(k) = D[\mu_{ik}(1) | \mathcal{F}_0]$ , определим события

$$\mathcal{B}_D(k) = \{a_k < 1\}, \quad \mathcal{B}_K(k) = \{a_k = 1\}, \quad \mathcal{B}_H(k) = \{a_k > 1\}$$

и предположим, что

$$\sup_k a_k < \infty, \quad 0 < \inf_k b(k) \leq \sup_k b(k) < \infty. \quad (40)$$

Пусть для некоторых последовательностей положительных чисел  $A_n$  и  $C_n$  при  $n \rightarrow \infty$  выполняются условия

$$\frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^n \eta_k(n) \chi(\mathcal{B}_K(k)) - A_n \xrightarrow{P} \gamma, \quad (41)$$

$$\frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^n \eta_k(n) \chi(\mathcal{B}_K(k)) b(k)(n-k) \xrightarrow{P} \sigma^2, \quad (42)$$

$$\frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^n \chi(\mathcal{B}_D(k) \cup \mathcal{B}_H(k)) a_k^{n-k} \eta_k(n) \xrightarrow{P} 0, \quad (43)$$

где  $\sigma^2, \gamma$  –  $\mathcal{F}_0$ -измеримые случайные величины и  $\sigma^2 > 0$  почти всюду.

**Теорема 4.** Если выполнены условия (40)–(43),  $\eta_k(n)$  является двойным моментом остановки относительно  $\{F_{jk}(n)\}$  и для любого  $\epsilon > 0$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n \eta_k(n) \chi(\mathcal{B}_K(k)) M \left[ \left( \frac{\mu_{1k}(n-k) - 1}{C_n} \right)^2 \chi \left( \left| \frac{\mu_{1k}(n-k) - 1}{C_n} \right| \geq \epsilon \right) | \mathcal{F}_0 \right] \xrightarrow{P} 0, \quad (44)$$

то  $Z(n)/C_n - A_n \xrightarrow{D} Z$ , где  $M e^{itZ} = M e^{it\gamma - t^2 \sigma^2 / 2}$

**З а м е ч а н и е.** Из совокупности условий (41)–(43) следует, что асимптотическое поведение процесса определяется частицами, дающими начало критическим процессам. Однако, изменив эти условия соответствующим образом, можно получить аналогичные теоремы и для докритических и надкритических процессов.

**Доказательство теоремы 4.** Рассмотрим соотношение

$$Z(n)/C_n = W_1(n) + W_2(n) + W_3(n), \quad (45)$$

где

$$W_1(n) = \frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^n \chi(\mathcal{B}_K(k)) \sum_{i=1}^{\eta_k(n)} \mu_{ik}(n-k),$$

$$W_2(n) = \frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^n \chi(\mathcal{B}_D(k)) \sum_{i=1}^{\eta_k(n)} \mu_{ik}(n-k),$$

$$W_3(n) = \frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^n \chi(\mathcal{B}_H(k)) \sum_{i=1}^{\eta_k(n)} \mu_{ik}(n-k).$$

Из замечания, сделанного во введении, следует, что если

$$X_{kN_n+j}(n) = \mu_{jk+1}(n-k), \quad \nu_{kN_n+j}(n) = \chi(j \leq \eta_{k+1}(n)),$$

$$j = 1, \dots, N_n, \quad k = 0, \dots, n-1, \tag{46}$$

то

$$\chi(\bar{\mathcal{M}}_n) W_1(n) = \chi(\bar{\mathcal{M}}_n) W_1^*(n), \tag{47}$$

где  $\bar{\mathcal{M}}_n$  – определенные во введении события и

$$W_1^*(n) = \frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^n \chi(\mathcal{B}_K(k)) \sum_{j=1}^{N_n} \nu_{kN_n+j}(n) X_{kN_n+j}(n-k).$$

Докажем, что для  $W_1^*(n)$  выполняются условия теоремы 3. Действительно, из условия (42) с учетом (39) и (44) следует, что условие (33) выполняется для любой случайной величины  $T \geq \sigma^2 + 1$  почти всюду. Далее, используя (42) и (44), получим, что

$$\sum_{k=1}^n \eta_k(n) \chi(\mathcal{B}_K(k)) M \left[ \left( \frac{\mu_{1k}(n-k)-1}{C_n} \right)^2 \chi \left( \left| \frac{\mu_{1k}(n-k)-1}{C_n} \right| < \epsilon \right) | \mathcal{F}_0 \right] \xrightarrow{P} \sigma^2$$

при  $n \rightarrow \infty$  и любом  $\epsilon > 0$ . Значит, условие (35) также выполняется, причем  $K(x) = 0$ , когда  $x < 0$ ;  $K(x) = \sigma^2$ , когда  $x \geq 0$ .

Из условия (43) и неравенства Чебышева следует, что последние две величины в (45) по вероятности сходятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда из (45), теоремы 3 и неравенства

$$|P\{\xi\chi < x\} - P\{\xi < x\}| \leq P\{\chi = 0\}, \tag{48}$$

справедливого для любой случайной величины  $\xi$  и любого индикатора  $\chi$ , получим утверждение теоремы. Теорема 4 доказана.

Чтобы сформулировать следующую теорему для  $Z(n)$ , обозначим  $\rho_n(x, y) =$

$$= n(1-x) \chi(\mathcal{B}_K(\lfloor nx \rfloor)) P \left\{ \frac{\mu_{\lfloor nx \rfloor}(\lfloor n(1-x) \rfloor)}{n(1-x)} > y \mid \mathcal{F}_0 \right\}, \quad T_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor nx \rfloor} \eta_i(n) \chi(\mathcal{B}_K(k))$$

и введем новые условия. Пусть при  $n \rightarrow \infty$

$$\rho_n(x, y) \xrightarrow{P} \frac{1}{r(x)} e^{-y/r(x)}, \tag{49}$$

равномерно по  $x \in (0, a]$  для любого  $a$  и  $y$ , случайная величина  $r(x)$  при любом  $x \in \mathcal{F}_0$ -измерима,

$$T_n(x) \xrightarrow{P} T(x) \tag{50}$$

при  $n \rightarrow \infty$  и  $0 \leq x \leq 1$ , где  $T(x)$  – некоторый  $\mathcal{F}_0$ -измеримый стохастический непрерывный при  $x=1$  случайный процесс с неубывающими траекториями,  $T(0) = 0$  и  $T(1) < \infty$  почти всюду.

Введем случайную функцию

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^1 \exp \left\{ -\frac{x}{r(u)(1-u)} \right\} \frac{dT(u)}{r(u)(1-u)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

**Теорема 5.** Пусть  $\eta_k(n)$  является двойным моментом остановки относительно  $\{F_{jk}(n)\}$ , выполнено (40) и условие (43) для  $C_n = n$ . Тогда при условиях (49), (50)

$$Z(n)/n \xrightarrow{D} Z$$

при  $n \rightarrow \infty$ , где характеристическая функция  $Z$  имеет вид

$$M e^{itZ} = M \exp \left\{ - \int_0^{\infty} (e^{itx} - 1) dF(x) \right\}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим соотношение (45), полагая в нем  $C_n = n$ . Покажем, что случайные величины  $W_1^*(n)$  из (47) удовлетворяют условиям теоремы 3. Действительно, так как случайные величины  $b(k)$  равномерно ограничены, то из (50) следует, что условия (33) и (34) выполняются, при этом  $\gamma = T(1)$ , и в качестве  $T$  можно взять любую случайную величину такую, что  $T \geq T(1) + 1$ .

Остается доказать выполнение условия (35). Рассмотрим сумму

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^n \hat{\eta}_k(n) M \left[ \left( \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \right)^2 \chi \left( \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} < y \mid \mathcal{F}_0 \right) \right], \quad (51)$$

где  $\hat{\eta}_k(n) = \eta_k(n) \chi(\mathcal{B}_K(k))$ ,  $\hat{\mu}_k(n-k) = \mu_{1k}(n-k) - 1$ .

Предположим, что  $y > 0$ , и выберем  $\epsilon \in (0, 1)$ . Отрезок  $[0, y]$  разобьем на части точки  $0 < x_0 < \dots < x_m = y$  такими, что  $x_j - x_{j-1} < \epsilon$ ,  $x_0 \leq \epsilon$ . Тогда

$$S_1(n) = S_2(n, m) + \epsilon_1(n, m) + \epsilon_2(n, m), \quad (52)$$

где

$$S_2(n, m) = \sum_{j=1}^m x_{j-1}^2 \sum_{k=1}^n \hat{\eta}_k(n) P \left\{ x_{j-1} < \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \leq x_j \mid \mathcal{F}_0 \right\},$$

$$|\epsilon_1(n, m)| \leq 2\epsilon y \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \hat{\eta}_k(n) P \left\{ x_{j-1} < \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \leq x_j \mid \mathcal{F}_0 \right\},$$

$$\epsilon_2(n, m) = \sum_{k=1}^n \hat{\eta}_k(n) M \left[ \left( \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \right)^2 \chi \left( -\frac{1}{n} \leq \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \leq x_0 \mid \mathcal{F}_0 \right) \right].$$

Покажем, что при  $n \rightarrow \infty$  и любом  $x > 0$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^n \hat{\eta}_k(n) P \{ \hat{\mu}_k(n-k) > xn \mid \mathcal{F}_0 \} \xrightarrow{P} F(x). \quad (53)$$

Для этого представим  $S_3(n)$  в виде

$$S_3(n) = S_3'(n) + S_3''(n) + S_3'''(n), \quad (54)$$

где

$$S_3'(n) = \sum_{k=1}^{[n(1-\epsilon)]} \exp \left\{ - \frac{xn}{r\left(\frac{k}{n}\right)(n-k)} \right\} \frac{\hat{\eta}_k(n)}{r\left(\frac{k}{n}\right)(n-k)},$$

$$S_3''(n) = \sum_{k=1}^{[n(1-\epsilon)]} \left[ P \{ \hat{\mu}_k(n-k) > xn \mid \mathcal{F}_0 \} (n-k) - \right.$$

$$- \frac{1}{r\left(\frac{k}{n}\right)} \exp\left\{-\frac{xn}{r\left(\frac{k}{n}\right)(n-k)}\right\} \left] \frac{\hat{\eta}_k(n)}{n-k},\right.$$

$$S_3'''(n) = \sum_{k=[n(1-\epsilon)]+1}^n \hat{\eta}_k(n) P\{\hat{\mu}_k(n-k) > xn | \mathcal{F}_0\}.$$

Оценки слагаемых в (54) проведем в обратном порядке. С помощью неравенства Чебышева легко получим, что

$$S_3'''(n) \leq \frac{1}{x} [T_n(1) - T_n(1-\epsilon)] \xrightarrow{P} [T(1) - T(1-\epsilon)] \frac{1}{x} \tag{55}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Представляя второе слагаемое в виде

$$S_3''(n) = \sum_{k=1}^{[n(1-\epsilon)]} \left[ \rho\left[n\left(1-\frac{k}{n}\right)\right] \left(\frac{k}{n}, \frac{x}{1-\frac{k}{n}}\right) - \frac{1}{r\left(\frac{k}{n}\right)} \exp\left\{-\frac{x}{r\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)}\right\} \right] \frac{\hat{\eta}_k(n)}{n-k},$$

убедимся в том, что справедлива оценка

$$|S_3''(n)| \leq \sup_m \sup_t \sup_z |\rho_m(t, z) - \frac{1}{r(t)} \exp\left\{\frac{z}{r(t)}\right\}| \epsilon^{-1} T_n(1-\epsilon),$$

где  $m \in [n\epsilon, n]$ ,  $t \in [0, 1-\epsilon]$ ,  $z \in [x, x\epsilon^{-1}]$ .

Отсюда и из условия (49) следует, что при  $n \rightarrow \infty$  и любом  $x$  и  $\epsilon$

$$S_3''(n) \xrightarrow{P} 0. \tag{56}$$

Наконец, так как  $T_n(x) \xrightarrow{P} T(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , сумма

$$S_3'(n) = \sum_{k=1}^{[n(1-\epsilon)]} \exp\left\{-\frac{x}{r\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)}\right\} \frac{T_n\left(\frac{k}{n}\right) - T_n\left(\frac{k-1}{n}\right)}{r\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

при  $n \rightarrow \infty$ , любом  $\epsilon \in (0, 1)$  и фиксированном  $x$  сходится по вероятности к интегралу

$$\int_0^{1-\epsilon} \exp\left\{-\frac{x}{r(u)(1-u)}\right\} \frac{dT(u)}{r(u)(1-u)}$$

Таким образом, из (54)–(56) ввиду стохастической непрерывности  $T(x)$  в точке 1 получим (53).

Из (53) следует, что при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированном разбиении  $\{x_j\}$  оценивающая  $|\epsilon_1(n, m)|$  величина сходится по вероятности к  $2\epsilon y [F(x_0) - F(y)]$ . Далее, исполь-

зудя равенство

$$\left\{ -\frac{1}{n} \leq \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \leq x_0 \right\} = \{ \hat{\mu}_k(n-k) = -1 \} \cup \left\{ 0 \leq \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \leq x_0 \right\},$$

получим, что  $\epsilon_2(n, m)$  не превосходит величину, по вероятности сходящуюся к  $\epsilon T(1)$ .

Теперь  $S_1(n)$  из (52) можно представить в виде

$$S_1(n) = -\int_0^y x^2 dF(x) + \sum_{i=1}^4 \epsilon_i(n, m), \quad (57)$$

где  $\epsilon_1(n, m)$  и  $\epsilon_2(n, m)$  определены в (52),

$$\epsilon_3(n, m) = \int_0^y x^2 dF(x) - \sum_{j=1}^m x_{j-1}^2 [F(x_j) - F(x_{j-1})],$$

$$\epsilon_4(n, m) = S_2(n, m) - \sum_{j=1}^m x_{j-1}^2 [F(x_{j-1}) - F(x_j)].$$

С помощью (57) и оценок величин, входящих в (57), получим, что для любого  $\delta > 0$  величину  $\epsilon$  можно подобрать такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| S_1(n) + \int_0^y x^2 dF(x) \right| > \delta \right\} = 0,$$

т.е. условие (35) теоремы 3 выполняется. При этом

$$K(y) = -\int_0^y x^2 dF(x).$$

Чтобы получить утверждение теоремы, достаточно учесть, что

$$\gamma = T(1), \quad \int_0^{\infty} x dF(x) = T(1),$$

и тот факт, что второе и третье слагаемые соотношения (45) сходятся по вероятности к нулю при  $n \rightarrow \infty$  ввиду условия (43). Теорема доказана.

В отличие от традиционных процессов с иммиграцией, рассматриваемая нами схема, кроме "критических" частиц, допускает также "докритические" и "надкритические" частицы. Если выполнено условие (43), то эти частицы не влияют на ход процесса. Интересно выяснить, в каких границах это происходит.

**Пример 1.** Пусть  $\mathcal{F}_0 = \{ \phi, \Omega \}$ , величины  $\eta_k(n) = \alpha(k) = \alpha(1)$ ,  $k \geq 1$ , — детерминированные, а надкритические процессы имеют одно и то же среднее числа потомков  $a > 1$ . Ясно, что иммиграция надкритических частиц в начале процесса приводит к нарушению условия (43). Но если они иммигрировали в конце, например, в промежутке  $[n - L(n), n]$ , то условие (43) теоремы 5 может выполняться. Действительно, тогда

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha(k) a^{n-k} \chi(\mathcal{B}_H(k)) \sim \frac{\alpha(1)}{n} \sum_{k=n-L(n)}^n a^{n-k} \sim \text{const} \frac{a^{L(n)}}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Значит, надкритические частицы, иммигрировавшие в промежутке  $[n - C_0 \log_a n, n]$ , когда  $C_0 < 1$ , не меняют асимптотическое поведение процесса. Но если хотя бы одна частица иммигрировала в таком промежутке с  $C_0 \geq 1$ , то асимптотическое поведение процесса может измениться.

Такие же рассуждения относительно докритических частиц показывают, что в случае стационарной иммиграции они никак не могут повлиять на асимптотическое



поведение процесса. Но если они иммигрировали в большом количестве (растущая иммиграция) перед моментом наблюдения, то поведение процесса может измениться.

Следующий пример относится к случаю, когда критические процессы имеют разные распределения числа потомков.

**Пример 2.** Пусть  $\mathcal{F}_0 = (\phi, \Omega)$ ,  $T(u) = \lambda u$ ,  $\lambda$  – некоторое положительное число и  $f_k(s)$  имеют два вида:

$$f_{2k+1}(s) = f_1(s), \quad f_{2k}(s) = f_0(s), \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда из предельной теоремы для критических процессов следует, что

$$\rho_n(2k+1, y) \rightarrow \frac{1}{b(1)} e^{-y/b(1)}, \quad \rho_n(2k, y) \rightarrow \frac{1}{b(0)} e^{-y/b(0)}$$

при  $n \rightarrow \infty, k = 0, 1, \dots$  Несложные вычисления показывают, что в этом случае

$$F(x) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b(n)} \frac{n+2}{n+1} \int e^{-xu/b(n)} \frac{du}{u},$$

и предельная характеристическая функция в теореме 5 будет иметь вид

$$M e^{itz} = \exp \left\{ \lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{itx} - 1}{x} \left[ \frac{e^{-x/b(0)}}{b(0)(1 + e^{-x/b(0)})} + \frac{e^{-2x/b(1)}}{b(1)(1 + e^{-x/b(1)})} \right] dx \right\}.$$

Теперь приведем одно следствие теоремы 5. Пусть, как и прежде,  $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ ,  $\eta_k(n)$  при любом  $k$  – момент остановки относительно системы  $\{\mathcal{F}_0 \times \prod_{j=1}^i \mathcal{F}_{jk}(n), i \in \mathbb{N}\}$  и, кроме того, они имеют одно и то же распределение при разных  $k$  и  $n$ ,  $f_k(s) = f(s), k = 0, 1, \dots$

Из предположения  $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$  следует, что иммигрировавшие частицы эволюционируют независимо друг от друга. Поэтому величина  $\eta_k(n)$  и процессы  $\{\mu_{ij}(n), i, j \in \mathbb{N}^2, j \neq k\}$  являются независимыми.

**Следствие 1.** Если  $f'(1) = 1, b = f''(1)/2 \in (0, \infty), \alpha = M \eta_k(n) \in (0, \infty)$ , то  $Z(n)/bn \xrightarrow{D} Z$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $M e^{itz} = (1 + it)^{-\alpha/b}$ .

Следствие показывает, что хорошо известная теорема [13] о сходимости к гамма-распределению без дополнительных условий справедлива и когда число иммигрирующих частиц является моментом остановки.

#### § 4. Выборочные суммы из конечной совокупности

Пусть теперь  $X_1, X_2, \dots$  – некоторые, вообще говоря, зависимые случайные величины;  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  –  $\sigma$ -алгебры, порожденные этими величинами;  $\nu_1, \nu_2, \dots$  – принимающие значения 0 и 1 случайные величины такие, что при любом  $k \geq 1$  величина  $\nu_k$  измерима относительно  $\prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{F}_j$ , где  $\mathcal{F}_0$  – некоторая  $\sigma$ -алгебра. В этом случае сумму

$$S_N = \sum_{k=1}^N X_k \nu_k$$

можно интерпретировать как выборочную сумму случайного объема из конечной совокупности  $\{X_1, \dots, X_N\}$ .

В работе Эрдеша и Реньи [8] была доказана асимптотическая нормальность при  $n \rightarrow \infty$  суммы  $n$  величин, случайно отобранных из совокупности действительных чисел  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$  по схеме выбора без возвращения. (В наших обозначениях

это соответствует случаю, когда величины  $X_k, k \geq 1$ , имеют вырожденные распределения.) А. Бикялисом [10] изучена скорость сходимости в теореме Эрдеша и Реньи. Б. фон Бар [9] оценил отклонение в равномерной метрике от нормального распределения суммы  $n$  величин случайно выбранных из совокупности независимых случайных величин  $\{X_1, \dots, X_N\}$  в равновероятной схеме выбора без возвращения. Чтобы в нашей схеме получить эту сумму, достаточно предположить  $X_k, k \geq 1$ , независимыми, не зависящими от  $\nu_k, k \geq 1$ , и

$$\sum_{k=1}^N \nu_k = n, \quad P\{\nu_k = 1\} = \frac{n}{N}, \quad k \geq 1.$$

В [17–20] изучаются асимптотические разложения распределений выборочных сумм. Работы М. Иржины [23, 24] посвящены аппроксимации распределения выборочных сумм распределениями, отличающимися от нормального.

В отличие от выборочных сумм, рассмотренных в упомянутых выше работах, здесь векторы  $(\nu_1, \dots, \nu_N)$  и  $(X_1, \dots, X_N)$  могут быть зависимыми. Поэтому наша схема включает, например, случай, когда решение о включении в сумму величины  $X_k$  принимается в зависимости от значений  $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ .

Как и прежде, положим  $M_k[\cdot] = M[\cdot \prod_{j=0}^k \mathcal{F}_j]$  и введем обозначения

$$\begin{aligned} \mu_k &= M_{k-1}[X_k], \quad \beta_k = M_{k-1}[X_k^2], \quad \sigma_k^2 = \beta_k - \mu_k^2, \\ \delta_k(x) &= M_{k-1}[(X_k - \mu_k)^2 \chi(|X_k - \mu_k| > x)], \quad x > 0. \end{aligned}$$

**Теорема 6.** Пусть для некоторых последовательностей действительных чисел  $A_N$  и  $C_N$

$$\frac{1}{C_N} \sum_{k=1}^N \nu_k \mu_k - A_N \xrightarrow{P} \gamma, \quad (58)$$

$$\frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^N \nu_k \sigma_k^2 \xrightarrow{P} \sigma^2, \quad (59)$$

и для любого  $\epsilon > 0$

$$\frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^N \delta_k(\epsilon C_N) \nu_k \xrightarrow{P} 0, \quad (60)$$

где  $\gamma$  и  $\sigma^2$  – некоторые  $\mathcal{F}_0$ -измеримые случайные величины. Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{C_N} S_N - A_N \xrightarrow{D} X, \quad M e^{itX} = M e^{it\gamma - t^2 \sigma^2 / 2}.$$

**З а м е ч а н и е.**

Если  $\mu_k = 0, k \geq 1$ , и  $\sigma^2$  имеет вырожденное распределение, то из теоремы 6 получим, что  $S_N$  при  $N \rightarrow \infty$  асимптотически нормальна с параметрами  $(0, C_N \sigma^2)$ . Если же  $\sigma_k^2 = 0, k \geq 1$ , то утверждение теоремы 6 является простым следствием условия (58). Тем самым теорема содержательна именно для случайных  $X_k$ . Поэтому из теоремы 6 нельзя вывести, например, результаты Эрдеша–Реньи [8], относящиеся к выборочным суммам детерминированных слагаемых. Однако, как показывают приводимые ниже следствия, в случае невырожденных (зависимых или независимых)  $X_k$  теорема 6 дает новые содержательные утверждения.

Доказательство теоремы 6. Легко видеть, что из условия (59) следует выполнение первого из условий (33) теоремы 3 для любой случайной величины  $T$  такой, что  $T \geq \sigma^2 + 1$  почти всюду.

Так как в силу (60) найдется последовательность положительных чисел  $\epsilon_N \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  такая, что

$$\frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^N \nu_k \delta_k(\epsilon_N C_N) \xrightarrow{P} 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ , то из следующего неравенства следует выполнение второго условия в (33):

$$\max_{1 \leq k \leq N} \nu_k \sigma_k^2 \leq \max_{1 \leq k \leq N} \nu_k (\epsilon_N^2 + \delta_k(\epsilon_N C_N)) \leq \epsilon_N^2 + \sum_{k=1}^N \nu_k \delta_k(\epsilon_N C_N).$$

Далее, используя (59) и (60), получим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^N \nu_k M_{k-1} [(X_k - \mu_k)^2 \chi(|X_k - \mu_k| < \epsilon_N C_N)] = \\ & = \frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^N \nu_k (\sigma_k^2 - \delta_k(C_N \epsilon)) \xrightarrow{P} \sigma^2 \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$  и любом  $\epsilon > 0$ . Это показывает, что условие (35) теоремы 3 также выполняется, причем  $K(x) = 0$ , когда  $x < 0$ , и  $K(x) = \sigma^2$ , когда  $x \geq 0$ .

Таким образом, все условия теоремы 3 выполнены. Утверждение теоремы 6 следует из теоремы 3.

Рассмотрим некоторые частные случаи описанной выше схемы. Пусть  $\nu_1, X_1, X_2, \dots, X_N, \dots$  — независимые случайные величины,  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots$  — порожденные ими  $\sigma$ -алгебры. Тогда очевидно, что

$$\mu_k = M X_k, \quad \sigma_k^2 = D X_k, \quad \delta_k(x) = M[(X_k - \mu_k)^2; |X_k - \mu_k| > x].$$

Положим  $C_N^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 M \nu_k$ . Из неравенства Чебышева следует, что если

$$\frac{1}{C_N^4} \sum_{k,l=1}^N [\sigma_k^2 \sigma_l^2 + \delta_k(\epsilon C_N) \delta_l(\epsilon C_N)] \text{cov}(\nu_k, \nu_l) \rightarrow 0 \tag{61}$$

при  $n \rightarrow \infty$ , то в условиях (59) и (60) величину  $\nu_k$  можно заменить ее математическим ожиданием. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**С л е д с т в и е 2.** Пусть  $\mu_k = 0, k \geq 1$ , и выполнено условие (61). Тогда, если для любого  $\epsilon > 0$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^N \delta_k(\epsilon C_N) M \nu_k \rightarrow 0,$$

то величина  $S_N/C_N$  при  $N \rightarrow \infty$  асимптотически нормальна с параметрами 0 и 1.

Пусть теперь последовательности  $\{\nu_k, k \geq 1\}$  и  $\{X_k, k \geq 1\}$  независимы и

$$\sum_{k=1}^N \nu_k = n, \quad P\{\nu_k = 1\} = \frac{n}{N}, \quad k \geq 1. \tag{62}$$

В этом случае  $S_N$  будет выборочной суммой в схеме равновероятного выбора без возвращения, рассмотренной в работах [8–10], [17–24]. В качестве  $\mathcal{F}_0$  возьмем  $\sigma$ -алгебру, порожденную величинами  $\{\nu_k, k \geq 1\}$ . Ясно, что тогда для любого  $k$

величина  $\nu_k$  будет  $\prod_{j=1}^{k-1} \mathcal{F}_j$ -измеримой. В этом случае из теоремы 6 получим следующий результат.

Пусть

$$f = \frac{n}{N}, \quad C_n^2 = f \sum_{k=1}^N \sigma_k^2.$$

Следствие 3. Если  $\mu_k = 0, k \geq 1$ , выполнено (62) и

$$C_n^{-2}(1-f) \max_{1 \leq k \leq N} \sigma_k^2 \rightarrow 0, \quad (63)$$

$$C_n^{-2} f \sum_{k=1}^N \delta_k(\epsilon C_n) \rightarrow 0 \quad (64)$$

при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $\epsilon > 0$ , то величина  $C_n^{-1} S_N$  при  $n \rightarrow \infty$  асимптотически нормальна с параметрами  $(0, 1)$ .

Доказательство. В этом случае  $D\nu_k = f(1-f)$ ,  $\text{cov}(\nu_k, \nu_l) \leq 0$  при  $k \neq l$ ,  $f(1-f) \sum_{k=1}^N \sigma_k^4 = o(C_n^4)$  при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно, условие (61) выполняется.

Поэтому в соотношениях (59) и (60) величину  $\nu_k$  можно заменить на  $f = M\nu_k$ .

В заключение выражаю глубокую признательность А.М. Зубкову за полезные обсуждения и внимание, проявленное к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eagleson G.K. Martingale convergence to mixtures of infinitely divisible laws//The annals of probab. – 1975. – V. 3, № 3. – P. 557–562.
2. Csörgö M. On the strong law of large numbers and the central limit theorems for martingales// Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – № 131. – P. 259–275.
3. Rychlik Z. Martingale random central limit theorems//Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1979. – № 34. – P. 129–139.
4. Gaenssler P., Strobel J., Stute W. On central limit theorems for martingale triangular arrays//Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1978. – № 31. – P. 205–216.
5. Kłopotowski A. Mixtures of infinitely divisible distributions as limit laws for sums of dependent random variables//Z. Wahrschein. Verw. Geb. – 1980. – V. 51, № 3. – P. 101–113.
6. Kubaski K.S. On a random-sums limit problem//Proc. of the 4-th Pannonian Symp. on Math. Statistcs. Bad Tatzmannsdorf, Austria. – 1983. – P. 231–263.
7. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971.
8. Erdős P., Rényi A. On the central limit theorem for samples from a finite population//Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci. – 1959. – V. 4, № 1. – P. 49–61.
9. Vahrvon B. On sampling from a finite set of the independent random variables//Z. Wahrschein. Verw. Geb. – 1972. – V. 24, № 4. – P. 279–286.
10. Bikelis A. On estimation of the remainder term in the central limit theorem for samples from finite populations//Studia Sci. Math. Hungar. – 1969. – № 4. – P. 345–354.
11. Рахимов И. Об аппроксимации распределения суммы случайного числа случайных слагаемых//ДАН УзССР. – 1987. – № 1. – С. 5–7.
12. Рахимов И., Сираждинов С.Х. Аппроксимация распределения суммы в одной схеме суммирования независимых случайных величин//ДАН СССР. – 1988. – Т. 301, № 1. – С. 31–34.
13. Athreya K., Ney P. Branching processes. – Berlin: Springer, 1972. – 287 p.
14. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987.
15. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.
16. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. – Springer-Verlag, 1987. – 600 p.
17. Robinson P.J. An asymptotic expansion for samples from a finite population//Ann. Statist. – 1978. – V. 6, № 5. – P. 1004–1011.

18. Bickel P.J., Von Zwet W.R. Asymptotic expansions in the twosample problem//Ann. Statist. – 1978. – V. 6, № 5. – P. 937–1004.
19. Бикьялине В. Выборки из конечной совокупности//Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – № 2. – С. 9–56.
20. Мирахмедов Ш.А. Асимптотическое разложение распределения выборочной суммы из конечной совокупности//Теория вероятностей и ее применения. – 1983. – Т. 28, № 3. – С. 468–477.
21. Mitra S.K., Pathak P.K. The nature of simple random sampling//Ann. Statist. – 1984. – V. 12, № 4. – P. 1536–1542.
22. Шипилов О.И. Аналог теоремы Гливленко–Кантелли при биномиальном выборе из конечной совокупности//Теория вероятностей и ее применения. – 1985. – Т. 30, № 3. – С. 574–576.
23. Jirina M. Limit theorems for samples from finite population//J. Austral Math. Soc. Ser. A. – 1982. – V. 32, № 3. – P. 318–327.
24. Jirina M. Limit theorems for sums of independent random variables observed on a finite population//Indian J. of Math. – 1987. – V. 29, № 1. – P. 65–83.
25. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980.

Статья поступила 10.10.89