



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Котляров, Асимптотические солитоны уравнения sine-Гордон,
ТМФ, 1989, том 80, номер 1, 15–28

<https://www.mathnet.ru/tmf5109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

23 апреля 2025 г., 15:34:19



АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ УРАВНЕНИЯ SINE-ГОРДОН

Котляров В. П.

Изучается асимптотика при больших временах решений уравнения sine-Гордон, стремящихся к нулю при $x \rightarrow \infty$, а при $x \rightarrow -\infty$ — к конечно-зонному решению уравнения (1). Показано, что в области переднего фронта такие решения при $t \rightarrow \infty$ распадаются на бесконечную серию солитонов с переменными фазами, порожденных непрерывным спектром L -оператора из соответствующей пары Лакса.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются решения $u(x, t)$ уравнения

$$(1) \quad u_{xt} + 4 \sin u = 0,$$

которые стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$, а при $x \rightarrow -\infty$ — к конечнозонным решениям уравнения (1). Изучается поведение таких решений при больших временах. Оказывается, что $u(x, t)$ в окрестности переднего фронта представляет собой суперпозицию обычных и асимптотических солитонов. Первые, как обычно, порождены дискретным спектром оператора Дирака, ассоциированного с уравнением (1) в методе обратной задачи рассеяния, а вторые — непрерывным спектром этого оператора, лежащим в комплексной области спектрального параметра и обусловленного осциллирующим характером поведения решения $u(x, t)$ при $x \rightarrow -\infty$.

Аналогичные задачи для других вполне интегрируемых нелинейных уравнений рассматривались в [1–4].

Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим следующую задачу для уравнения, эквивалентного (1):

$$(2) \quad v_t = 4 \sin \left[\int_x^\infty v(\xi, t) d\xi \right], \quad u(x, t) = - \int_x^\infty v(\xi, t) d\xi,$$

$$(3) \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$(4) \quad v_0(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & x \rightarrow +\infty, \\ u_n'(x, 0), & x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

а функция $u_n'(x, 0)$ — производная по x n -зонного решения $u_n(x, t)$ уравнения (1) [5].

Будем предполагать, что решение задачи (2)–(4) существует, является единственным, обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам.

Основная цель работы — исследовать асимптотику $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ в окрестности переднего фронта на основе метода обратной задачи рассеяния.

Как известно [6], уравнение (1) представимо в форме Захарова — Шабата

$$(5) \quad U_t - V_x + [U, V] = 0,$$

представляющего собой условие совместности систем линейных уравнений

$$(6) \quad F_x = UF, \quad U = -i\lambda\sigma_3 + iu_x\sigma_1/2,$$

$$(7) \quad F_t = VF, \quad V = (\sigma_3 \cos u + \sigma_2 \sin u)/i\lambda,$$

где σ_i — матрицы Паули. Оператор, порожденный системой (6) с функцией (4), является несамосопряженным в $L_2(R)$, и его спектр есть объединение спектров операторов (6) с $u(x, t) \equiv 0$ и $u(x, t) \equiv u_n(x, t)$, соответственно, т. е. состоит из вещественной оси (двукратный спектр) и аналитических дуг, концы которых E_j и \bar{E}_j ($j = \overline{1, 2n}$) расположены симметрично относительно вещественной и мнимой осей (простой спектр). Точки E_j и \bar{E}_j удобно задавать как нули полинома

$$(8) \quad P(\lambda^2) = \prod_{i=1}^{2k} (\lambda^2 + E_i^2) \prod_{j=2k+1}^{m+2k+1} (\lambda^2 - E_j^2) (\lambda^2 - \bar{E}_j^2), \quad \operatorname{Re} E_i = 0, \quad i \leq 2k.$$

Пусть

$$(9) \quad C = \max_{\lambda \in S \setminus S_0} \{ |\lambda|^{-2} \chi[\rho(\lambda, S_0)] \} > 0,$$

где $\rho(\lambda, S_0)$ — расстояние от точки $\lambda \in S \setminus S_0$ до S_0 , $\chi(\rho) = 1$, $\rho > 0$ и $\chi(0) = 0$, S — непрерывный спектр, а S_0 — невозмущенный спектр (вещественная ось). Будем предполагать, что максимум в (9) достигается лишь в конечном числе точек E_j ($j = \overline{1, 2p}$) и что внутри круга радиуса $1/C$ нет точек дискретного спектра системы (6). Тогда при $t \rightarrow \infty$ для решения $u(x, t)$ задачи (2) — (4) в области $x > Ct - (2a)^{-1} \ln t^{N+1}$ ($a = \max \operatorname{Im} \bar{E}_j$, N — любое натуральное число) справедлива асимптотическая формула

$$(10) \quad u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \det[I + \Omega(\xi, t)]}{\operatorname{Re} \det[I + \Omega(\xi, t)]} \Big|_{\xi=x-ct}, \quad (\operatorname{mod} 2\pi),$$

где $\Omega(\xi, t) = \|A^{lr}(\xi, t)\|_1^p$ — блочная матрица с элементами

$$A_{kj}^{lr}(\xi, t) = \sum_{m=0}^{N-k-1} \frac{\omega_l^{(k+m)}(t)}{k!m!t^{k+m+\frac{1}{2}}} J_{m+j}^{lr}(\xi), \quad k, j = \overline{0, N-1},$$

$$J_n^{lr}(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \tau^n \exp[i(E_l + F_r)\tau] d\tau, \quad l, r = \overline{1, p},$$

в которых функции $\omega_l^{(n)}(t)$ определяются начальными данными (см. формулу (2.8)).

Рассмотрим два типичных случая.

1. Пусть максимум в (9) достигается в двух точках E_1 и E_2 . Тогда эти

точки $\pm iE$ лежат на мнимой оси и являются нулями полинома (8), а $C = = E^{-2}$. Из формулы (10) в этом случае вытекает, что при $t \rightarrow \infty$ в области $x > Ct - (2E)^{-1} \ln t^{N+1}$ верна формула

$$(11) \quad u(x, t) \simeq \pm \sum_{n=1}^{N_1} \{4 \operatorname{arctg} \exp[-2E(x - Ct - \alpha_n) - \ln t^{2n-1/2}] + 2\pi(n-1)\},$$

где N_1 — целая часть $\left[\frac{N+1}{2} \right]$, α_n — фазы, определяемые по начальным данным (см. формулы (3.13)).

2. Пусть максимум в (9) достигается в четырех точках: $\pm E, \pm \bar{E}$. Тогда для решения $u(x, t)$ справедлива формула

$$(12) \quad u(x, t) \simeq \sum_{n=1}^{N_1} 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} E \sin[2 \operatorname{Re} E(x + \beta_n + t|E|^{-2})]}{|\operatorname{Re} E| \operatorname{ch}[2 \operatorname{Im} E(x + \gamma_n - t|E|^{-2}) + \ln t^{2n-1/2}]} \right\}.$$

Фазы β_n и γ_n определяются начальными данными (формулы (3.22), (3.23)).

Если у рассматриваемого оператора (6) имеется и дискретный спектр, то при условии, что все точки этого спектра лежат вне круга радиуса $|E|^{-2}$, асимптотические формулы (10)–(12) не изменятся. Если среди них имеются точки, лежащие внутри круга радиуса $|E|^{-2}$, то в области $x > > Ct$ появятся обычные солитоны — кинки и бризеры, движущиеся со скоростями большими, чем C .

1. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Определим одно из решений Йоста уравнения

$$(1.1) \quad i\sigma_3 \frac{d\psi}{dx} + \frac{i}{2} u_x \sigma_2 \psi = \lambda \psi$$

условием

$$\Phi(x, \lambda) = \exp(-i\lambda x \sigma_3) + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \lambda = 0.$$

Такое решение может быть представлено в виде [6]

$$(1.2) \quad \Phi(x, \lambda) = \exp(-i\lambda x \sigma_3) + \int_x^\infty K(x, y) \exp(-i\lambda y \sigma_3) dy,$$

где ядро $K(x, y)$ обладает свойствами

$$(1.3) \quad K(x, y) = \sigma_2 \bar{K}(x, y) \sigma_2 = K_1(x, y) \sigma_0 + K_2(x, y) \sigma_1, \\ [\sigma_3, K(x, x)] = v(x) \sigma_2, \quad v(x) = u_x(x)/2.$$

Из (1.2) вытекает, что первый столбец $\Phi(x, \lambda)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} \lambda < 0$, а второй — в полуплоскость $\operatorname{Im} \lambda > 0$.

Для построения второго решения Йоста необходимо ввести функцию Флоке — Блоха для конечнозонного потенциала — функцию Бейкера — Лхизера.

Пусть Γ — риманова поверхность рода n , заданная уравнением $w^2 = zP(z)$, где $z = \lambda^2$, а полином P определен формулой (8).

О п р е д е л е н и е. Функцией Бейкера — Ахиезера называется вектор $\psi(x, t, p)$, который всюду, за исключением нуля и бесконечности, является мероморфной функцией с предписанными полюсами в точках p_1, \dots, p_n , образующих неспециальный дивизор на Γ , а в нуле и бесконечности имеет существенные особенности вида

$$\psi(x, t, p) = \begin{pmatrix} 1 + \sum_1^{\infty} A_k(x, t) \lambda^{-k} \\ \sum_1^{\infty} B_k(x, t) \lambda^{-k} \end{pmatrix} \exp(-i\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{z} \rightarrow \infty,$$

$$\psi(x, t, p) = \begin{pmatrix} \sum_0^{\infty} C_k(x, t) \lambda^k \\ \sum_0^{\infty} D_k(x, t) \lambda^k \end{pmatrix} \exp(it/\lambda), \quad \lambda = \sqrt{z} \rightarrow 0,$$

где $z = \pi(p)$ — каноническая проекция точки $p \in \Gamma$ на \mathbb{C} .

Можно показать [7–9], что такая функция существует, единственна и является совместным решением систем (6) и (7). Для того чтобы функция $u(x, t)$ в (6) и (7) была вещественной, необходимо и достаточно, чтобы нули полинома (8) $P(z)$ и дивизор $D = \sum p_i$ полюсов функции Бейкера — Ахиезера были связаны соотношением [5]

$$(1.4) \quad P(z) - \prod_{k=1}^n (z - \mu_k)(z - \bar{\mu}_k) = z f^2(z),$$

где $\mu_k = \pi(p_k)$ — проекции полюсов p_k на \mathbb{C} , а $f(z)$ — полином степени $n-1$ с вещественными коэффициентами. Соответствующие $\psi(x, t, p)$ n -зонные решения $u(x, t) = u_n(x, t)$ рассматриваются в качестве асимптотики при $x \rightarrow -\infty$ в начальном условии задачи (2)–(4).

Рассмотрим сужение $\bar{\psi}(x, z)$ вектор-функции $\psi(x, 0, p)$ на верхний лист поверхности Γ . Положим $e(x, \lambda) = \bar{\psi}(x, \lambda^2)$. Вектор $e(x, \lambda)$ удовлетворяет по x уравнению (1.4), а по λ является аналитической в верхней полуплоскости функцией с числом полюсов, не превосходящим n . Используя явные формулы для $\psi(x, t, p)$, можно показать, что $e(x, \lambda)$ представим в виде

$$(1.5) \quad e(x, \lambda) = \exp[-i\omega(\lambda)x] e_0(x, \lambda),$$

где вектор $e_0(x, \lambda)$ ограничен по x при $\lambda \neq \mu_k$, а квазимпульс $\omega(\lambda)$ обладает свойством $\text{Im } \omega(\lambda) \geq 0$ при $\text{Im } \lambda \geq 0$.

Определим матрицу

$$E(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_1(x, \lambda) & -\bar{e}_2(x, \lambda) \\ e_2(x, \lambda) & \bar{e}_1(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

по вектору (1.5) и второе решение Йоста уравнения (1.1) следующей

асимптотикой:

$$F(x, \lambda) = E(x, \lambda) + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad \text{Im } \lambda = 0.$$

Для этого решения справедливо представление

$$F(x, \lambda) = E(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K(x, y, \lambda) w(y) \sigma_1 E(y, \lambda) dy,$$

$$w(y) = \frac{i}{2} \frac{d}{dy} (u - u_n),$$

где $K(x, y, \lambda)$ — функция Коши уравнения (1.1). Матричные элементы $K(x, y, \lambda)$ являются целыми функциями λ . Поэтому $F(x, \lambda)$ полностью наследует аналитические свойства $E(x, \lambda)$: ее первый столбец допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость с разрезами по дугам простого спектра, у него те же полюса, что и у $e(x, \lambda)$, его производная по λ имеет корневые особенности в окрестности точек E_j .

Введем матрицу перехода задачи (1.1). Матрицы

$$F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} f(x, \lambda) & -\bar{g}(x, \lambda) \\ g(x, \lambda) & \bar{f}(x, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}(x, \lambda) & \Phi(x, \lambda) \\ -\bar{\varphi}(x, \lambda) & \psi(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

являются решениями уравнения (1.1) при $\text{Im } \lambda = 0$, поэтому

$$(1.6) \quad F(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) T(\lambda), \quad T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= f(x, \lambda) \psi(x, \lambda) - g(x, \lambda) \varphi(x, \lambda), \\ b(\lambda) &= f(x, \lambda) \bar{\varphi}(x, \lambda) + g(x, \lambda) \bar{\Psi}(x, \lambda). \end{aligned}$$

При этом $a(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость с разрезами по дугам простого спектра. Как обычно, можно получить стандартные оценки:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= 1 + O(|\lambda|^{-1}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \geq 0, \\ b(\lambda) &= O(|\lambda|^{-1}), \quad \lambda \rightarrow \pm \infty, \end{aligned}$$

а из инволютивных свойств уравнения (1.1) следующие соотношения:

$$\bar{a}(-\bar{\lambda}) = a(\lambda), \quad \bar{b}(-\lambda) = -b(\lambda).$$

Предположив для простоты отсутствие дискретного спектра, будем иметь, что $a(\lambda) \neq 0$, $\text{Im } \lambda \geq 0$.

Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, связанные в силу (1.6) соотношением $|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1 + |e_2(0, 0, \lambda)|^2$, образуют данные рассеяния задачи (1.1), по которым можно восстановить потенциал $u(x)$. Как и в [4, 10], интегральные уравнения обратной задачи имеют вид

$$(1.7) \quad \begin{aligned} K_1(x, z) + \int_x^\infty K_2(x, y) H(y+z) dy &= 0 \quad (z > x), \\ K_2(x, z) + \int_x^\infty K_1(x, y) H(y+z) dy &= -H(x+z), \end{aligned}$$

где

$$(1.8) \quad H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) \exp(i\lambda x) d\lambda + \sum_{k=1}^{2n} \int_{\gamma_k} h(\lambda) \exp(i\lambda x) d\lambda = H_0(x) + H_1(x),$$

а функции $r(\lambda)$ и $h(\lambda)$ определены на спектре следующими формулами:

$$(1.9) \quad r(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{2\pi a(\lambda)}, \quad h(\lambda) = \frac{\sqrt{P(\lambda^2)}}{2\pi \prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \mu_k) a_+(\lambda) a_-(\lambda)}.$$

Знаками плюс и минус отмечены предельные значения функции $a(\lambda)$ справа и слева от дуги γ_k . Из свойств $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и $P(\lambda^2)$ вытекает, что

$$(1.10) \quad r(-\lambda) = -\bar{r}(\lambda), \quad \text{Im } \lambda = 0, \quad \bar{h}(-\bar{\lambda}) = h(\lambda), \quad \lambda \in \gamma_k.$$

Коэффициент отражения $r(\lambda)$ имеет разрывы в точках λ_k ($k=1, q \leq 2n$) пересечения дуг γ_k с вещественной осью, причем

$$(1.11) \quad r_+(\lambda_k) - r_-(\lambda_k) = \bar{h}(\lambda_k), \quad k=1, q.$$

Наконец, из (1.10) следует, что $H(x) = -\bar{H}(x)$. Это свойство ядра обеспечивает однозначную разрешимость уравнений обратной задачи.

2. ЭВОЛЮЦИЯ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ И АСИМПТОТИКА ЯДРА УРАВНЕНИЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть теперь потенциал в уравнении (6) зависит от времени и удовлетворяет (1). Используя тот факт, что оператор (7) в этом случае переводит любое решение уравнения (6) снова в решение этого уравнения, найдем $a_t + ia/\lambda = 0$, $b_t - ib/\lambda = 0$. Таким образом,

$$(2.1) \quad r(\lambda, t) = r(\lambda) \exp(2it/\lambda), \quad h(\lambda, t) = h(\lambda) \exp(2it/\lambda),$$

где $r(\lambda)$ и $h(\lambda)$ определены формулами (1.9).

Изучим поведение при $t \rightarrow \infty$ ядра $H(x+y, t)$, определенного формулами (1.8) и (2.1).

Рассмотрим ядро

$$(2.2) \quad H_1(x+y, t) = \sum_{k=1}^{2n} \int_{\gamma_k} h(\lambda) \exp[i\lambda(x+y) + 2it/\lambda] d\lambda,$$

положив $x = Ct + \xi$, $y = Ct + \eta$, $\lambda = \mu + iv$. Тогда

$$\begin{aligned} \exp\left[i\lambda(x+y) + \frac{2it}{\lambda}\right] &= \exp[i\lambda(\xi + \eta) + \\ &+ 2it\mu(C + |\lambda|^{-2})] \exp[-2vt(C - |\lambda|^{-2})]. \end{aligned}$$

В силу предположения (9) о спектре эта величина при фиксированных ξ и η экспоненциально убывает по t всюду при $\lambda \in \gamma_k$, кроме точек $\bar{E}_k \in \gamma_k$, наименее удаленных от начала координат. Точки \bar{E}_k , лежащие на окружности $|\lambda| = C = |\bar{E}_k|^{-2}$, дают основной вклад в асимптотику, а число C является асимптотической скоростью переднего фронта рассматриваемого решения.

Интегралы в (2.2), которые содержат точки E_k , разобьем на два $-I_k^1 + I_k^2$, где I_k^1 — интеграл по части дуги γ_k , лежащей в достаточно малой окрестности точки E_k , а I_k^2 — по остальной части дуги γ_k . Пусть для простоты $\bar{E}_k = E_k$. Положим $s = 2v(C - (v^2 + \mu^2)^{-2})$ и выберем окрестность точки E_k столь малой, что для точек дуги γ_k из этой окрестности $\mu = \mu(s)$ и $v = v(s)$ ($0 < s < \varepsilon$). Разложим входящие в I_k^1 величины в ряды по степеням s :

$$(2.3) \quad \lambda = E_k + c_{k1}s + \dots,$$

$$(2.4) \quad h(\lambda(s)) = \bar{v}s(h_{k0} + h_{k1}\bar{v}s + \dots),$$

$$(2.5) \quad 2\mu(C + |\lambda|^{-2}) = d_{k0} + d_{k1}s + \dots, \quad d_{k0} = \frac{4 \operatorname{Re} E_k}{|E_k|^2},$$

$$(2.6) \quad \exp[i\lambda(\xi + \eta)] = \exp[iE_k(\xi + \eta)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (\xi + \eta)^n}{n!} s^n \sum_{j=1}^{\infty} c_{kj}^{(n)} s^j.$$

Собирая разложение (2.3) — (2.6) и учитывая, что при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\varepsilon} s^n \exp[-s(1 - id_{k1})t] ds = \frac{\Gamma(n)}{[(1 - id_{k1})t]^n} + O(e^{-\varepsilon t/2}),$$

получим

$$(2.7) \quad I_k^1 = \exp[iE_k(\xi + \eta)] \sum_{n=0}^{\infty} (\xi + \eta)^n \omega_k^{(n)}(t) t^{-(n+3/2)},$$

где

$$(2.8) \quad \omega_k^{(n)}(t) = \frac{i^n h_{k0} c_{k1}^{n+1} \Gamma(n+3/2) \exp(id_{k0}t)}{n! (1 - id_{k1})^{n+3/2}} [1 + \psi_{nk}(t)],$$

причем $|\psi_{nk}(t)| \leq \tilde{c}_k n^2 / \sqrt{t}$ ($\tilde{c}_k = \text{const}$).

Для оценки интеграла I_k^2 по оставшейся части дуги γ_k заметим, что он содержит быстроосциллирующую экспоненту с фазовой функцией $S(\lambda, \tau) = \lambda + \tau/\lambda$, $\tau = 2t/(x+y)$. Она имеет производную, отличную от нуля на γ_k , и максимум $\operatorname{Re}[iS(\lambda, \tau)]$ достигается в точке λ_k пересечения дуги γ_k с вещественной осью. Поэтому, интегрируя по частям, получим

$$(2.9) \quad I_k^2 = \frac{h(\lambda_k) \exp[i(x+y)S(\lambda_k, \tau)]}{i(x+y)S'(\lambda_k, \tau)} \left[1 + O\left(\frac{1}{x+y}\right) \right].$$

Заметим, что если γ_k — отрезок мнимой оси, то I_k^2 будет экспоненциально мал.

Совершенно аналогично (2.9) оцениваются те интегралы в (2.2), для которых дуги γ_j лежат строго вне круга радиуса $C = |E_k|^{-2}$. Таким образом, для ядра (2.2) справедлива следующая асимптотика:

$$H_1(x+y, t) = \sum_{k=1}^p \exp[iE_k(\xi + \eta)] \sum_{n=0}^{\infty} (\xi + \eta)^n \omega_k^{(n)}(t) t^{-(n+3/2)} + \\ + \sum_{j=1}^q \frac{h(\lambda_j) \exp[i(x+y)S(\lambda_j, \tau)]}{i(x+y)S'(\lambda_j, \tau)} \left[1 + O\left(\frac{1}{x+y}\right) \right].$$

Для ядра $H_0(x+y, t)$ запишем

$$H_0(x+y, t) = \left(\int_{-\infty}^{\lambda_1} + \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} + \int_{\lambda_q}^{\infty} \right) r(\lambda) \exp[i(x+y)S(\lambda, \tau)] d\lambda.$$

Производная $S'(\lambda, \tau)$ обращается в нуль в точках $\pm\sqrt{t}\tau$, лежащих между двумя точками λ_j , ближайших к началу координат, если только $(\xi+\eta)/2t$ достаточно мало. При этом $S''(\pm\sqrt{t}\tau, \tau) = \pm 2/\sqrt{t}\tau$. Поэтому $H_0(x+y, t)$ оценивается [11] вкладами от стационарных точек и точек λ_j ($j=1, q$):

$$H_0(x+y, t) = \sum_{j=1}^q \frac{(r_-(\lambda_j) - r_+(\lambda_j)) \exp[i(x+y)S(\lambda_j, \tau)]}{i(x+y)S'(\lambda_j, \tau)} \times \\ \times \left[1 + O\left(\frac{1}{x+y}\right) \right] + \frac{\sqrt{\pi}(2t)^{1/4}}{(x+y)^{3/4}} \left[r(\tau) \exp\left[2i(x+y)\sqrt{t}\tau + \frac{i\pi}{4} \right] + \right. \\ \left. + r(-\tau) \exp\left[-2i(x+y)\sqrt{t}\tau - \frac{i\pi}{4} \right] \right].$$

Объединяя оценки для H_0 и H_1 и учитывая (1.11), получим

$$(2.10) \quad H(x+y, t) = \sum_{k=1}^p \exp[iE_k(\xi+\eta)] \sum_{n=0}^{N-1} (\xi+\eta)^n \omega_k^{(n)}(t) t^{-(n+1/2)} + \\ + \frac{\sqrt{\pi}(2t)^{1/4}}{(x+y)^{3/4}} \left[r\left(\frac{2t}{x+y}\right) \exp\left(2i\sqrt{2t(x+y)} + \frac{i\pi}{4} \right) - \text{к. с.} \right] + \\ + O[(\xi+\eta)^N t^{-N-1/2} \exp(-\text{Im } E(\xi+\eta))] + O\left(\frac{1}{(x+y)^{1/2}}\right).$$

Эта оценка справедлива при $t \rightarrow \infty$ в области $x+y > 2Ct - C_1 t^\alpha$ ($C = |E_k|^{-2}$, $k=1, \overline{p}$; $C_1 > 0$, $0 < \alpha < 1$).

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Решение $u(x, t)$ задачи Коши (2)–(4) определяется формулами (1.3), в которых $K_i(x, y)$ ($i=1, 2$) являются решением уравнений обратной задачи (1.7). Согласно (2.10) в области $x > Ct - (2 \text{Im } E)^{-1} \ln t^{N+1}$ (N – любое число) главная часть ядра этих уравнений при больших t вырождена,

$$H_N(\xi+\eta, t) = \sum_{l=1}^p \exp[iE_l(\xi+\eta)] \sum_{k=0}^{N-1} \eta^k \sum_{m=0}^{N-k-1} \omega_{km}^{(l)}(t) \xi^m,$$

где

$$\omega_{km}^{(l)}(t) = \frac{\omega_l^{(k+m)}(t)}{k!m!t^{k+m+1/2}},$$

а числа E_l и функции $\omega_k^{(n)}(t)$ обладают свойствами $E_{l+1} = -\overline{E}_l$, $\omega_{l+1}^{(n)}(t) = -\overline{\omega}_l^{(n)}(t)$, $l=1, \overline{p}$. Положив в уравнениях (1.7) $x=Ct+\xi$, $y=Ct+\tau$, $z=Ct+\eta$ и

$$(3.1) \quad K_1(Ct+\xi, Ct+\eta, t) = \sum_{l=1}^p \sum_{k=0}^{N-1} X_k^{(l)}(\xi, t) \eta^k \exp(iE_l \eta),$$

$$(3.2) \quad K_2(Ct+\xi, Ct+\eta, t) = \sum_{l=1}^p \sum_{k=0}^{N-1} Y_k^l(\xi, t) \eta^k \exp(iE_l \eta),$$

получим систему линейных алгебраических уравнений

$$(3.3) \quad X_k^l + \sum_r \sum_s A_{ks}^{lr} Y_s^r = 0,$$

$$\sum_r \sum_s A_{ks}^{lr} X_s^r + Y_k^l = \exp(-iE_r \xi) \frac{dA_{k0}^{lr}}{d\xi},$$

где

$$(3.4) \quad A_{ks}^{lr} = \sum_{m=0}^{N-k-1} \omega_{km}^{(l)}(t) J_{m+s}^{lr}(\xi), \quad J_m^{lr}(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \tau^m \exp[i(E_l + E_r)\tau] d\tau.$$

Введем блочную матрицу $\Omega(\xi, t) = \|A^{lr}(\xi, t)\|$, где $N \times N$ -матрицы $A^{lr}(\xi, t)$ определены в (3.4). Тогда система (3.3) примет вид

$$X + \Omega Y = 0, \quad \Omega X + Y = f.$$

Отсюда следует, что $(I - \Omega^2)Y = f$ и потому

$$Y = 1/2 [(I + \Omega)^{-1} f + (I - \Omega)^{-1} f].$$

Тогда для $K_2(Ct+\xi, Ct+\xi, t)$ согласно (3.2) и (3.3) получим

$$K_2(Ct+\xi, Ct+\xi, t) = \sum_{l=1}^p \sum_{k=0}^{N-1} Y_k(\xi) \xi^k \exp(iE_l \xi) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \ln \frac{\det[I + \Omega(\xi, t)]}{\det[I - \Omega(\xi, t)]},$$

а для функции $u(x, t)$ в силу (1.3) —

$$(3.5) \quad u(x, t) = 2i \ln \frac{\det[I + \Omega(\xi, t)]}{\det[I - \Omega(\xi, t)]} \Big|_{\xi=x-ct},$$

причем $\det[I - \Omega(\xi, t)] = \det[I + \bar{\Omega}(\xi, t)]$.

Это представление решения справедливо при $t \rightarrow \infty$ и $\xi > -(2a)^{-1} \ln t^{N+1}$, где $a = \max_{1 \leq k \leq p} \text{Im } E_k$, N — любое натуральное число.

В заключение приведем анализ формулы (3.5) в двух простейших случаях.

1. Пусть максимум в (9) достигается в двух точках. Тогда эти точки лежат на мнимой оси, а матрица $\Omega(\xi, t)$ состоит из одного блока $A(\xi, t)$, элементы которого имеют вид

$$\Omega_{kj}(\xi, t) = \sum_{m=0}^{N-k-1} \omega_{km}(t) I_{m+j}(\xi),$$

где

$$\omega_{km}(t) = -ih_0 \Gamma(n + 3/2) [k! m! t^{n+3/2} (4a)^{2(n+1)}]^{-1} (1 + \psi_n(t)), \quad n = k + m,$$

$$I_m(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \tau^m \exp(-2a\tau) d\tau, \quad a = \text{Im } E.$$

Для величины $\Delta(\xi, t) = \det[I + \Omega(\xi, t)]$, входящей в формулу (3.5), можем записать

$$(3.6) \quad \Delta(\xi, t) = 1 + \sum_{k=1}^N D_k(\xi, t), \quad D_k(\xi, t) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \det \|\Omega_{i_j t_m}\|.$$

Легко видеть, что при $t \rightarrow \infty$

$$(3.7) \quad D_k(\xi, t) = \det \|\omega_{ij}(t)\| \det \|I_{i+j}(\xi)\| [1 + O(\xi/t)],$$

где $\omega_{ij}(t)$ доопределены нулем при $j > N - i - 1$. Если $k \leq N_1 = \left[\frac{N+1}{2} \right]$, то у матрицы $\|\omega_{ij}(t)\|$ все элементы отличны от нуля, ее определитель не изменяется с ростом N и равен

$$(3.8) \quad \det \|\omega_{ij}(t)\| = \frac{(-ih_0)^k \Gamma_1^{(k)} [1 + \delta_k(t)]}{(1!2! \dots (k-1)!)^2 (4a)^{2k^2 t^{k(k+1/2)}}},$$

где $\Gamma_1^{(k)}$ — определитель матрицы с элементами $\Gamma(i+j+3/2)$ ($i, j=0, k-1$), а $|\delta_k(t)| > c_1 k^2 / \sqrt{t}$. Для $k > N_1$ $\det \|\omega_{ij}(t)\| = O(t^{-k(k+1/2)})$. Второй определитель в (3.7)

$$(3.9) \quad \det \|I_{i+j}(\xi)\| = \Gamma^{(k)} (2a)^{-k^2} \exp(-2ka\xi),$$

где $\Gamma^{(k)}$ — определитель с элементами $\Gamma(i+j+1)$ ($i, j=0, k-1$). Формулы (3.6)–(3.9) дают

$$(3.10) \quad \Delta(\xi, t) = \sum_{n=0}^N i^n P_n t^{-n(n+1/2)} \exp(-2na\xi) [1 + \delta_n(t)],$$

где $|\delta_n(t)| < c_1 n^2 / \sqrt{t}$, а

$$(3.11) \quad P_n = \begin{cases} (-h_0)^n \Gamma^{(n)} \Gamma_1^{(n)} (1!2! \dots (n-1)!)^{-2} (4a)^{-2n^2} (2a)^{-n^2}, & n \leq N_1, \\ O(1), & n > N_1. \end{cases}$$

Для получения асимптотики выражения (3.5) покроем область $\xi > > -(2a)^{-1} \ln t^{N+1}$ интервалами

$$(3.12) \quad \alpha_1 = (b \ln t^{3/2-\varepsilon} < \xi < \infty), \quad b = -(2a)^{-1}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\alpha_n = (b \ln t^{\frac{4n+1}{2}-\varepsilon} < \xi < b \ln t^{\frac{4n-3}{2}+\varepsilon}),$$

$$\alpha_{N_1} = (b \ln t^{N+1} < \xi < b \ln t^{\frac{4N_1-3}{2}+\varepsilon}), \quad N_1 = \left[\frac{N+1}{2} \right].$$

Из (3.10) вытекает, что при $\xi \in \alpha_n$

$$u_n(\xi, t) = 4 \operatorname{sgn}(h_0) \operatorname{arctg}\{\exp[-2a(\xi - \alpha_n) - \ln t^{2n-1/2}]\} + 2\pi(n-1),$$

где фаза

$$(3.13) \quad \alpha_n = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{|h_0|}{((n-1)!)^2 4^{2n-1} (2a)^{6n-3}} \frac{\Gamma^{(n)} \Gamma_1^{(n)}}{\Gamma^{(n-1)} \Gamma_1^{(n-1)}} \right].$$

Отсюда получаем формулу (11) введения.

2. Пусть максимум в (9) достигается в четырех точках $(\pm E, \pm \bar{E})$.

Тогда $C=|E|^{-2}$, а матрица $\Omega(\xi, t)$ в (3.5) имеет вид

$$\Omega(\xi, t) = \begin{pmatrix} A(\xi, t) & B(\xi, t) \\ -\bar{B}(\xi, t) & -\bar{A}(\xi, t) \end{pmatrix}$$

где

$$A_{ij}(\xi, t) = \sum_{m=0}^{N-i-1} \omega_{im}(t) J_{m+j}(\xi), \quad J_n(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \tau^n \exp(2iE\tau) d\tau,$$

$$B_{ij}(\xi, t) = \sum_{m=0}^{N-i-1} \omega_{im}(t) I_{m+j}(\xi), \quad I_n(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \tau^n \exp(-2 \operatorname{Im} E\tau) d\tau,$$

$$\omega_{jm}(t) = i^n h_0 e^{i d_0 t} c_1^{n+1} \Gamma(n+3/2) (j! m! t^{n+3/2})^{-1} (1-id_1)^{-n-3/2} [1+\psi_n(t)], \\ n=j+m.$$

Как и в первом случае, для определителя $\Delta(\xi, t)$ справедлива формула (3.6), в которой для величин $D_n(\xi, t)$ при $t \rightarrow \infty$ можно записать

$$(3.14) \quad D_n(\xi, t) = (\Delta^{(n, 0)} + \Delta^{(n, n-1)} + \dots + \Delta^{(1, n-1)} + \Delta^{(0, n)}) [1 + O(\xi/t)],$$

где определители

$$\Delta^{(k, l)} = \begin{vmatrix} A_{00}, \dots, & A_{0k-1}, & B_{00}, \dots, & B_{0l-1} \\ A_{k-10}, \dots, & A_{k-1k-1}, & B_{k-10}, \dots, & B_{k-1l-1} \\ -\bar{B}_{00}, \dots, & -\bar{B}_{0k-1}, & -\bar{A}_{00}, \dots, & -\bar{A}_{0l-1} \\ -\bar{B}_{l-10}, \dots, & -\bar{B}_{l-1k-1}, & -\bar{A}_{l-10}, \dots, & -\bar{A}_{l-1l-1} \end{vmatrix}.$$

Доопределив функции $\omega_{im}(t)$ нулем при $m > N-i-1$, $i=0, N-1$, детерминант $\Delta^{(k, l)}(\xi, t)$ можно представить в виде произведения двух:

$$\begin{vmatrix} \omega_{00}, \dots, \omega_{0k-1}, & 0 \\ \omega_{k-10}, \dots, \omega_{k-1k-1}, & 0 \\ 0 & -\bar{\omega}_{00}, \dots, -\bar{\omega}_{0l} \\ & -\bar{\omega}_{l-10}, \dots, -\bar{\omega}_{l-1l-1} \end{vmatrix} \times \\ \times \begin{vmatrix} J_0, \dots, J_{k-1}, & I_0, \dots, I_{l-1} \\ J_{k-1}, \dots, J_{2k-2}, & I_{k-1}, \dots, I_{k+l-2} \\ I_0, \dots, I_{k-1}, & \bar{J}_0, \dots, \bar{J}_{l-1} \\ I_{l-1}, \dots, I_{k+l-2}, & \bar{J}_{l-1}, \dots, \bar{J}_{2l-2} \end{vmatrix} \left[1 + O\left(\frac{\xi}{t}\right) \right] = \\ = \det \|\omega_{ij}(t)\|_0^{k-1} \det \|\bar{\omega}_{ij}(t)\|_0^{l-1} \mathcal{E}_{kl}(\xi) [1 + O(\xi/t)].$$

Как и в первом случае,

$$\det \|\omega_{ij}(t)\|_0^{k-1} = \begin{cases} \frac{(-ih_0)^k \exp(id_0 t) (ic_1)^{k^2} \Gamma_1^{(k)} [1+\delta_k(t)]}{t^{k(k+1/2)} (1-id_1)^{k(k+1/2)} \left(\prod_1^{k-1} m! \right)^2}, & k \leq N_1, \\ O(t^{-k(k+1/2)}), & k > N_1. \end{cases}$$

Определитель $\mathcal{E}_{kl}(\xi)$ вычисляется и равен

$$\mathcal{E}_{kl}(\xi) = \mathcal{E}_{kl}(0) \exp[2i(kE - l\bar{E})\xi].$$

Поэтому

$$(3.15) \quad \Delta^{kl}(\xi, t) = \frac{(-1)^l \exp[i(k-l)d_0 t + 2i(kE - l\bar{E})\xi]}{t^{k(k+1/2)+l(l+1/2)}} q_k \bar{q}_l \mathcal{E}_{kl}(0) [1 + \delta_{kl}(t)],$$

где

$$q_k = \begin{cases} (-ih_0)^k (ic_1)^{k^2} \Gamma_1^{(k)} (1-id_1)^{-k(k+1/2)} \left(\prod_1^{k-1} m! \right)^{-2}, & k \leq N_1, \\ O(1), & k > N_1. \end{cases}$$

Следовательно, для $D_n(\xi, t)$ из (3.14) имеем

$$D_{2m}(\xi, t) = \Delta^{(m, m)}(\xi, t) [1 + O(t^{-2})] [1 + O(\xi/t)],$$

$$D_{2m-1}(\xi, t) = [\Delta^{(m, m-1)}(\xi, t) + \Delta^{(m-1, m)}(\xi, t)] [1 + O(t^{-4})] [1 + O(\xi/t)].$$

Наконец, из последних формул и (3.15) получаем

$$(3.16) \quad D_{2n}(\xi, t) = P_{2n} t^{-n(2n+1)} \exp[-4n \operatorname{Im} E \xi] (1 + \delta_n(t)),$$

$$(3.17) \quad D_{2n-1}(\xi, t) = 2i P_{2n-1} t^{n-2n^2-1/2} \sin \varphi_n(\xi, t) \exp[-4(n-1/2) \operatorname{Im} E \xi] \times \\ \times (1 + \delta_n(t)),$$

где

$$\varphi_n(\xi, t) = 2 \operatorname{Re} E(\xi + 2|E|^{-2}t + \beta_n), \quad |\delta_n(t)| \leq c_n n^2 \sqrt{t},$$

$$(3.18) \quad \beta_n = (2 \operatorname{Re} E)^{-1} \{ (n-1)\pi + \arg [q_n \bar{q}_{n-1} \mathcal{E}_{nn-1}(0) (1 + \delta_n(t))] \},$$

$$(3.19) \quad P_{2n} = (-1)^n |q_n| \mathcal{E}_{nn}(0), \quad P_{2n-1} = |q_n q_{n-1}| \mathcal{E}_{nn-1}(0).$$

Таким образом, из (3.14) – (3.19) с учетом (3.6) находим

$$\operatorname{Im} \Delta(\xi, t) = 2 \sum_{n=1}^N P_{2n-1} t^{n-2n^2-1/2} \sin \varphi_n(\xi, t) \times \\ \times \exp[-4(n-1/2) \operatorname{Im} E \xi] (1 + \delta_n(t)),$$

$$\operatorname{Re} \Delta(\xi, t) = 1 + \sum_{n=1}^N P_{2n} t^{-2n^2-n} \exp(-4n \operatorname{Im} E \xi) (1 + \delta_n(t)).$$

Покроем область $\xi > -(2 \operatorname{Im} E)^{-1} \ln t^{N+1}$ системой интервалов (3.12). Окажется, что при $\xi \in \alpha_n$

$$(3.20) \quad \frac{\operatorname{Im} \Delta(\xi, t)}{\operatorname{Re} \Delta(\xi, t)} = \frac{|\mathcal{E}_{nn-1}(0)| \sin \varphi_n(\xi, t) [1 + O(n^2 t^{-1/2})]}{(-\mathcal{E}_{n-1n-1}(0) \mathcal{E}_{nn}(0))^{1/2} \operatorname{ch} \psi_n(\xi, t)}$$

где

$$\psi_n(\xi, t) = 2 \operatorname{Im} E(\xi + \gamma_n) + \ln t^{2n-1/2},$$

$$\gamma_n = (4 \operatorname{Im} E)^{-1} \ln [|q_n|^2 \mathcal{E}_{nn}(0) | |q_{n-1}^{-2} \mathcal{E}_{n-1n-1}^{-1}(0) |].$$

Определители $\mathcal{E}_{nn-1}(0)$ и $\mathcal{E}_{nn}(0)$ вычисляются и равны

$$\mathcal{E}_{nn-1}(0) = J_0 n^2 \bar{J}_0^{(n-1)^2} \chi^{2n^2-2n},$$

$$\mathcal{E}_{nn}(0) = (-1)^n |J_0|^{2n^2} \chi^{2n^2}, \quad J_0 = -1/2iE, \quad \chi = \operatorname{Re} E / \operatorname{Im} E.$$

Поэтому из (3.20) и (3.5) при $\xi \in \alpha_n$ получаем

$$(3.21) \quad u_n(\xi, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} E}{|\operatorname{Re} E|} \frac{\sin[2 \operatorname{Re} E (\xi + \beta_n + 2|E|^{-2}t)]}{\operatorname{ch}[2 \operatorname{Im} E (\xi + \gamma_n) + \ln t^{2n-1/2}]} \right\},$$

где фазы β_n и γ_n соответственно равны

$$(3.22) \quad \beta_n = \frac{1}{2 \operatorname{Re} E} \left\{ (2n-1) \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re} E}{\operatorname{Im} E} + \arg[h_0 c_1^{2n-1} (1-id_1)^{1/2-2n}] \right\},$$

$$(3.23) \quad \gamma_n = \frac{1}{2 \operatorname{Im} E} \ln \left[\frac{|h_0| |c_1|^{2n-1} \Gamma_1^{(n)}}{((n-1)!)^2 |1-id_1|^{2n-1/2} \Gamma_1^{(n-1)}} \left(\frac{|\operatorname{Re} E|}{2|E| \operatorname{Im} E} \right)^{2n-1} \right]$$

Наконец, выражение для $u_n(\xi, t)$ в (3.21) влечет справедливость формулы (12) введения.

В заключение отметим одно интересное следствие. Положим

$$\tau = x+t, \quad \xi = x-t, \quad v(\xi, \tau) = u\left(\frac{\tau+\xi}{2}, \frac{\tau-\xi}{2}\right).$$

Тогда решение уравнения (1) перейдет в решение уравнения

$$(1') \quad v_{\tau\tau} - v_{\xi\xi} + 4 \sin v = 0.$$

Известно, что убывающие при $x \rightarrow \pm\infty$ решения уравнения (1) переходят [6, 12] в убывающие решения уравнения (1'), а множества конечнозонных решений уравнений (1) и (1') совпадают [5]. Поэтому $v(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению (1'), стремится к нулю при $\xi \rightarrow \infty$ и стремится к некоторому конечнозонному решению уравнения (1') при $\xi \rightarrow -\infty$. При этом асимптотическая скорость переднего фронта в лабораторных координатах C_0 выражается через скорость $C = |E|^{-2}$ в координатах светового конуса по формуле

$$C_0 = (1 - |E|^2) / (1 + |E|^2), \quad |E| = \bar{E}_j, \quad j = \overline{1, 2p},$$

и потому $0 < C_0 < 1$, когда $|E| < 1$, и $-1 < C_0 < 0$, когда $|E| > 1$. Таким образом, если точки \bar{E}_j , в которых достигается максимум выражения (9), лежат внутри единичного круга, то асимптотические солитоны (10) будут двигаться в положительном направлении оси ξ , если же они лежат вне единичного круга, то в отрицательном направлении оси ξ . В последнем случае обычные солитоны, порожденные дискретным спектром, могут двигаться в обоих направлениях, а конечнозонная асимптотика «убегает» налево со скоростью, большей по абсолютной величине, чем C_0 .

Литература

- [1] Гуревич А. В., Питаевский Л. П. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2. С. 590–604.
- [2] Хруслов Е. Я. // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. № 8. С. 469–472; Мат. сб. 1976. Т. 99. № 2. С. 261–286.
- [3] Ермакова В. Д. // ДАН СССР, сер. А. 1982. № 7. С. 3–6.
- [4] Когляров В. П., Хруслов Е. Я. // ТМФ. 1986. Т. 86. № 2. С. 172–186; ДАН УССР, сер. А. 1986. № 10. С. 61–64.
- [5] Козел В. А., Когляров В. П. // ДАН УССР, сер. А. 1976. № 10. С. 878–881; // Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб. научн. трудов. К.: Наукова думка, 1978. С. 89–103.
- [6] Захаров В. Е., Мананов С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

- [7] *Matveev V. B.* Abelian functions and solitons: Preprint 373. Wroclaw: University. 1976.
- [8] *Итс А. Р.* Метод изомонодромных деформаций в теории вполне интегрируемых нелинейных эволюционных систем: Дис. докт. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1986.
- [9] *Кричевер И. М.* Нелинейные уравнения и эллиптические кривые. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1983. С. 79–136.
- [10] *Котляров В. П., Хруслов Е. Я.* Асимптотические солитоны модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза: Препринт 24-86. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1986.
- [11] *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
- [12] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
11.1.1988 г.

ASYMPTOTIC SOLITONS OF THE SINE-GORDON EQUATION

Kotlyarov V. P.

The large time asymptotics of the solutions of the sine-Gordon equation which tend to zero when $x \rightarrow \infty$ and tend to the finite-gap solution of this equation when $x \rightarrow -\infty$ are investigated. It is proved that at $t \rightarrow \infty$ these solutions split into infinite series of solitons with variable phases. These solitons are generated by the continuous spectrum of the L -operator from the corresponding Lax representation.