УДК 517.9

Об уравнении Лиувилля, акцессорных параметрах и геометрии пространства Тейхмюллера для римановых поверхностей рода 0

Зограф П. Г., Тахтаджян Л. А.

Введение

Первые попытки решения проблемы униформизации алгебраических кривых (компактных римановых поверхностей), предпринятые Клейном [1] и Пуанкаре [2] в начале 1880-х годов, использовали обыкновенные дифференциальные уравнения. Именно, в [2] Пуанкаре показал, что дифференциальное уравнение, характеризующее фуксову униформизацию римановой поверхности рода g с n точками ветвления, описывается $3g-3+n$ комплексными параметрами (которые обычно называют акцессорными параметрами). Однако прямое доказательство существования акцессорных параметров, не говоря уже об их явном вычислении, оказалось весьма трудной задачей. Такой подход к проблеме униформизации был вскоре оставлен, а ее окончательное решение, полученное в 1907 г. Кебе и Пуанкаре, использовало совсем другие методы (в частности, теорию потенциала).

Тем не менее, еще в 1898 г. Пуанкаре [3] предложил другой подход к проблеме униформизации, основанный на уравнении Лиувилля. В последнее время это уравнение привлекло к себе внимание специалистов по квантовой теории поля. Это связано с новым подходом А. М. Полякова к теории струны [4], в котором квантовое поле Лиувилля возникает как конформная аномалия и играет важную роль. В частности, исходя из квазиклассического предельного перехода в тождествах Уорда, отражающих конформную симметрию квантовой теории Лиувилля [5], Поляков высказал предположение о том, что для поверхностей рода 0 надлежащим образом регуляризованное действие уравнения Лиувилля, вычисленное на классическом решении, является производящей функцией для акцессорных параметров.

Это предположение оказалось верным (точное утверждение см. в § 3, теорема 1). Более того, исследуя зависимость акцессорных параметров от деформаций комплексной структуры поверхности, удалось обнаружить, что действие уравнения Лиувилля представляет собой потенциал метрики Вейля — Петерсона на пространстве Тейхмюллера отмеченных римановых поверхностей типа $(0, n)$ (§ 3, теорема 2). Эти результаты были ранее анонсированы в [6]. Настоящая работа посвящена их подробному доказательству и основана на препринте [7].

Коротко остановимся на содержании работы. В § 1 мы излагаем, в основном, известные результаты об униформизации римановых поверхностей рода 0 с $n\geqslant 3$ выколотыми точками. В § 2 приводятся необходимые сведения из теории пространств Тейхмюллера, в терминах которой описывается движение проколов на поверхности. В § 3 доказываются

основные результаты работы — теоремы 1 и 2, а в § 4 устанавливается связь акцессорных параметров с интегралами Эйхлера для фуксовых групп.

Отметим, что аналогичные результаты справедливы и для римановых поверхностей произвольного рода $g>1$. Точные формулировки и доказательства для этого случая будут изложены нами в следующей работе.

§ 1. Униформизация римановых поверхностей, акцессорные параметры и уравнение Лиувилля

Излагаемые здесь результаты являются классическими (за исключением, возможно, леммы 1) и восходят к Клейну и Пуанкаре (современное изложение см., например, в [8]—[10]); мы приводим их, главным образом, для удобства читателя и согласования терминологии.

1.1. Римановой поверхностью типа $(0, n)$ мы будем называть поверхность, которая получается из расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ выкалыванием $n\geqslant 3$ различных точек $w_1, \ldots, w_n$; без ограничения общности можно считать, что $w_{n-2}=0$, $w_{n-1}=1$, $w_n=\infty$. Положим $X=\mathbf{C}\setminus\{w_1, \ldots, w_{n-3}, 0, 1\}$. Как утверждает теорема об униформизации,

$$X\cong H/\Gamma,$$

где $H=\{z\in\mathbf{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}$ — верхняя полуплоскость, а $\Gamma\subset\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ — конечно порожденная фуксова группа без кручения (Γ действует на H дробно-линейными преобразованиями). Другими словами, существует комплексно-аналитическое накрытие $J: H\to X$, группой автоморфизмов которого является Γ.

В группе Γ можно выбрать стандартную систему параболических образующих $S_1, \ldots, S_n$, удовлетворяющих единственному соотношению $S_1\ldots S_n=1$ и обладающих тем свойством, что их неподвижные точки $z_1, \ldots, z_n\in\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ проектируются в $w_1, \ldots, w_n\in\hat{\mathbf{C}}$ соответственно. Будем считать, что $z_{n-2}=0$, $z_{n-1}=1$, $z_n=\infty$, чего всегда можно добиться с помощью сопряжения в $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Элементы $S_1, \ldots, S_{n-1}$ представляются тогда в виде $S_i=\begin{pmatrix}1+\lambda_i z_i & -\lambda_i z_i^2\\ \lambda_i & 1-\lambda_i z_i\end{pmatrix}$, а $S_n=\begin{pmatrix}1 & \lambda_n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, где $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$ — вещественные числа.

Отображение J можно рассматривать как автоморфную относительно группы Γ мероморфную функцию на H; для любого $\gamma\in\Gamma$ $J(\gamma z)=J(z)$, $z\in H$. В окрестности каждой из параболических точек z_i, $i=1, \ldots, n-1$, функция $J(z)$ раскладывается в ряд Фурье

$$J(z)=w_i+\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}k}{|\lambda_i|(z-z_i)}\right), \tag{1.1}$$

а в окрестности $z_n=\infty$

$$J(z)=\sum_{k=-1}^{\infty} a_n^{(k)}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}kz}{|\lambda_n|}\right) \tag{1.2}$$

(коэффициенты $a_i^{(1)}$, $i\neq n$, и $a_n^{(-1)}$ не равны нулю в силу однолистности отображения $J: H/\Gamma\to X$). Выбрав в $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ такие элементы $\sigma_1, \ldots$ $\ldots, \sigma_n$, что $\sigma_i\infty=z_i$ и $\sigma_i^{-1}S_i\sigma_i=\begin{pmatrix}1 & \pm 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ мы можем переписать формулы

(1.1) и (1.2) в виде

$$J(\sigma_i z)=\begin{cases} w_i+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}\exp(2\pi\sqrt{-1}kz), & i\neq n,\\ \sum\limits_{k=-1}^{\infty} a_n^{(k)}\exp(2\pi\sqrt{-1}kz), & i=n.\end{cases} \tag{1.3}$$

1.2. Классики связывали задачу униформизации римановых поверхностей с дифференциальными уравнениями. Объектом их исследований являлась обратная к J многозначная аналитическая функция J^{-1}: $X\to H$. Она представляет собой локально-однолистную, линейно-полиморфную функцию на X (последнее означает, что ее ветви связаны между собой дробно-линейными преобразованиями из Γ).

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция J^{-1}, записывается в терминах производной Шварца. Под производной Шварца аналитической функции f понимается дифференциальное выражение

$$\mathcal{S}(f)=\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2,$$

где штрих обозначает обычную производную. Оператор $\mathcal{S}$ обладает следующими свойствами:

1) если A — дробно-линейное преобразование $\hat{\mathbf{C}}$, то $\mathcal{S}(A)=0$;
2) если $f\circ g$ — композиция функций f и g, то

$$\mathcal{S}(f\circ g)=\mathcal{S}(f)\circ gg'^2+\mathcal{S}(g). \tag{1.4}$$

В частности, отсюда следует, что

$$\mathcal{S}(A\circ f)=\mathcal{S}(f),\quad \mathcal{S}(f\circ A)=\mathcal{S}(f)\circ AA'^2 \tag{1.5}$$

и

$$\mathcal{S}(f^{-1})=-\mathcal{S}(f)\circ f^{-1}(f^{-1})'^2. \tag{1.6}$$

Дифференциальное уравнение для J^{-1} — уравнение Шварца — имеет вид

$$\mathcal{S}(J^{-1})=Q_X, \tag{1.7}$$

где

$$Q_X(w)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2(w-w_i)^2}+\frac{c_i}{w-w_i}\right) \tag{1.8}$$

— рациональная функция на $\hat{\mathbf{C}}$ с асимптотикой

$$Q_X(w)=\frac{1}{2w^2}+\frac{c_n}{w^3}+O\left(\frac{1}{|w|^4}\right),\quad w\to\infty. \tag{1.9}$$

Комплексные числа $c_1,\ldots,c_n$ называются акцессорными параметрами и однозначно определяются набором точек $w_1,\ldots,w_n=\infty$. Формула (1.9) накладывает на параметры $c_1,\ldots,c_n$ три условия:

$$\sum_{i=1}^{n-1}c_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n-1}c_iw_i=1-\frac{n}{2},\quad \sum_{i=1}^{n-1}w_i(1+c_iw_i)=c_n, \tag{1.10}$$

что позволяет явно выразить c_{n-2}, c_{n-1} и c_n через $w_1,\ldots,w_{n-1}$ и оставшиеся $n-3$ акцессорных параметра. Отсюда, в частности, видно, что при $n=3$ акцессорные параметры выражаются через особые точки простыми формулами, и в дальнейшем мы всегда будем полагать $n\geqslant 4$.

С уравнением (1.7) тесно связано линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка — уравнение Фукса:

$$\frac{d^2y}{dw^2}+\frac{1}{2}Q_X(w)\,y=0. \tag{1.11}$$

Действительно, если y_1, y_2 — линейно-независимые решения этого уравнения, то их отношение y_1/y_2 удовлетворяет уравнению Шварца (1.7). В классическом подходе к проблеме униформизации [1], [2] по заданным особым точкам $w_1, \ldots, w_n \in \hat{\mathbf{C}}$ требовалось так выбрать параметры $c_1, \ldots, c_n$ в выражении (1.8) для Q_X, чтобы группа монодромии уравнения (1.11) была фуксовой. Тогда отношение его решений и являлось бы, с точностью до дробно-линейного преобразовния, искомым многозначным отображением J^{-1}: $X \to H$, осуществляющим униформизацию поверхности X. Как отмечалось во введении, «явно вычислить» акцессорные параметры оказалось весьма сложно, а неконструктивность последующих решений проблемы униформизации также не способствовала выявлению их природы. Мы надеемся, что результаты § 3 частично прояснят сложившуюся ситуацию.

1.3. В терминах коэффициентов Фурье функции J акцессорные параметры выражаются весьма просто.

Лемма 1. *Справедливы формулы*

$$c_i=\begin{cases}-\dfrac{a_i^{(2)}}{(a_i^{(1)})^2}, & i\neq n,\\ a_n^{(0)}, & i=n.\end{cases}$$

Доказательство. Используя формулу (1.6), перепишем уравнение Шварца (1.7) в виде

$$\mathcal{S}(J)=-Q_X\circ JJ'^2.$$

В силу (1.5) при любом $i=1, \ldots, n$

$$\mathcal{S}(J\circ\sigma_i)=-Q_X\circ J\circ\sigma_i(J\circ\sigma_i)'^2. \tag{1.12}$$

Сравним коэффициенты Фурье правой и левой частей этого равенства. Из (1.3) при $i\neq n$ получаем, что

$$\mathcal{S}(J\circ\sigma_i)(z)=\left[\frac{(J\circ\sigma_i)'''}{(J\circ\sigma_i)'}-\frac{3}{2}\frac{(J\circ\sigma_i)''^2}{(J\circ\sigma_i)'^2}\right](z)=$$

$$=\frac{(2\pi\sqrt{-1})^3\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^3a_i^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}}{2\pi\sqrt{-1}\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_i^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}}-\frac{3}{2}\frac{(2\pi\sqrt{-1})^4\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2a_i^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}\right)^2}{(2\pi\sqrt{-1})^2\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_i^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}\right)^2}=$$

$$=-4\pi^2\left(1+8\frac{a_i^{(2)}}{a_i^{(1)}}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+\ldots\right)\left(1-2\frac{a_i^{(2)}}{a_i^{(1)}}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+\ldots\right)+$$

$$+6\pi^2\left(1+8\frac{a_i^{(2)}}{a_i^{(1)}}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+\ldots\right)\left(1-4\frac{a_i^{(2)}}{a_i^{(1)}}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+\ldots\right)=$$

$$=2\pi^2+O(|e^{4\pi\sqrt{-1}z}|),\quad z\to\infty.$$

Аналогично

$$\mathcal{S}(J\circ\sigma_n)(z)=\left[\frac{(J\circ\sigma_n)'''}{(J\circ\sigma_n)'}-\frac{3}{2}\frac{(J\circ\sigma_n)''^2}{(J\circ\sigma_n)'^2}\right](z)=$$

$$=\frac{(-2\pi\sqrt{-1})^3 a_n^{(-1)}e^{-2\pi\sqrt{-1}z}+(2\pi\sqrt{-1})^3\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^3a_n^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}}{-2\pi\sqrt{-1}a_n^{(-1)}e^{-2\pi\sqrt{-1}z}+2\pi\sqrt{-1}\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_n^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}}-$$

$$-\frac{3}{2}\frac{(2\pi\sqrt{-1})^4\left(a_n^{(-1)}e^{-2\pi\sqrt{-1}z}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2a_n^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}\right)^2}{(2\pi\sqrt{-1})^2\left(a_n^{(-1)}e^{-2\pi\sqrt{-1}z}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_n^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}\right)^2}=2\pi^2+O(|e^{4\pi\sqrt{-1}z}|),\ z\to\infty.$$

Далее

$$-Q_X\circ J\circ\sigma_i(J\circ\sigma_i)'^2(z)=-(J\circ\sigma_i)'^2(z)\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{1}{2(J(\sigma_iz)-w_j)^2}+\frac{c_j}{J(\sigma_iz)-w_j}\right]=$$

$$=4\pi^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}ka_i^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}\right)^2\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}\right)^2}+\frac{c_i}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}}+O(1)\right]=$$

$$=4\pi^2\left(1+4\frac{a_i^{(2)}}{a_i^{(1)}}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+\ldots\right)\left[\frac{1}{2}\left(1-2\frac{a_i^{(2)}}{a_i^{(1)}}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+c_ia_i^{(1)}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+\ldots\right]=2\pi^2\left(1+2\frac{a_i^{(2)}}{a_i^{(1)}}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+\ldots\right)+4\pi^2c_ia_i^{(1)}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+$$

$$+\ldots=2\pi^2+4\pi^2\left(\frac{a_i^{(2)}}{a_i^{(1)}}+c_ia_i^{(1)}\right)e^{2\pi\sqrt{-1}z}+O(|e^{4\pi\sqrt{-1}z}|),\ z\to\infty.$$

Аналогично

$$-Q_X\circ J\circ\sigma_n(J\circ\sigma_n)'^2(z)=-(J\circ\sigma_n)'^2(z)\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{1}{2(J(\sigma_nz)-w_j)^2}+\frac{c_j}{J(\sigma_nz)-w_j}\right]=$$

$$=-(J\circ\sigma_n)'^2(z)\left[\frac{1}{2J^2(\sigma_nz)}+\frac{c_n}{J^3(\sigma_nz)}+O\left(\frac{1}{|J^4(\sigma_nz)|}\right)\right]=$$

$$=4\pi^2\left(a_n^{(-1)}e^{-2\pi\sqrt{-1}z}-\sum_{k=1}^{\infty}ka_n^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}\right)^2\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\left(a_n^{(-1)}e^{-2\pi\sqrt{-1}z}+a_n^{(0)}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{c_n}{\left(a_n^{(-1)}e^{-2\pi\sqrt{-1}z}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_n^{(k)}e^{2\pi\sqrt{-1}kz}\right)^3}+O(|e^{8\pi\sqrt{-1}z}|)\right]=$$

$$=4\pi^2\left[\frac{1}{2}\left(1-2\frac{a_n^{(0)}}{a_n^{(-1)}}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+\ldots\right)+\frac{c_n}{a_n^{(-1)}}e^{2\pi\sqrt{-1}z}+\ldots\right]=$$

$$=2\pi^2+4\pi^2\left(\frac{c_n}{a_n^{(-1)}}-\frac{a_n^{(0)}}{a_n^{(-1)}}\right)e^{2\pi\sqrt{-1}z}+O(|e^{4\pi\sqrt{-1}z}|),\ z\to\infty.$$

Сопоставляя коэффициенты Фурье левой и правой частей равенства (1.12), получаем утверждение леммы.

Замечание 1. Проведенное вычисление может служить также и выводом уравнения Шварца (1.7) для J^{-1}. Действительно, пусть в выражении (1.8) для Q_X параметры c_i выбраны такими, как в формулировке леммы 1. Функции $\mathscr{S}(J)$ и $-Q_X\circ JJ'^2$ представляют собой регулярные автоморфные формы веса 4 для группы Γ, постоянные члены и первые коэффициенты Фурье которых в каждой из параболических точек $z_1, \ldots, z_n$ совпадают. Равенство $\mathscr{S}(J)=-Q_X\circ JJ'^2$ следует теперь из теоремы Римана — Роха для автоморфных форм [9], [10].

Замечание 2. Доказанные формулы для акцессорных параметров позволяют выразить их в терминах матричных элементов группы Γ аналогично тому, как это проделано, например, в работе [11]. Однако непосредственно из этих формул никакой информации о зависимости c_i от особых точек $w_1, \ldots, w_n$ извлечь не удается.

В сущности, лемма 1 будет использоваться нами лишь в § 4.

1.4. Одно из замечательных следствий теоремы об униформизации состоит в том, что на римановой поверхности X существует единственная полная метрика постоянной отрицательной кривизны — 1, согласованная с комплексной структурой. Она представляет собой проекцию на X метрики Пуанкаре $(\operatorname{Im} z)^{-2}|dz|^2$ на H и имеет вид $e^{\varphi(w)}|dw|^2$, где

$$e^{\varphi(w)}=\frac{|(J^{-1})'(w)|^2}{(\operatorname{Im} J^{-1}(w))^2}. \tag{1.13}$$

Условие постоянной кривизны —1 означает, что функция φ удовлетворяет на X уравнению Лиувилля

$$\varphi_{w\bar{w}}=\frac{1}{2}e^{\varphi}. \tag{1.14}$$

Лемма 2. *Функция φ обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi_{ww}-\frac{1}{2}\varphi_w^2=\mathscr{S}(J^{-1})$;

2) $\varphi(w)=\begin{cases}-2\log|w-w_i|-2\log|\log|w-w_i||+o(1)\ (i\neq n),\ w\to w_i,\\ -2\log|w|-2\log\log|w|+o(1),\ w\to\infty;\end{cases}$

3) $\varphi_w(w)=\begin{cases}-\dfrac{1}{w-w_i}\left(1+\left(\log\left|\dfrac{w-w_i}{a_i^{(1)}}\right|\right)^{-1}\right)+c_i+o(1)\ (i\neq n),\ w\to w_i,\\ -\dfrac{1}{w}\left(1+\left(\log\left|\dfrac{w}{a_n^{(-1)}}\right|\right)^{-1}\right)-\dfrac{c_n}{w^2}+o\left(\dfrac{1}{|w|^2}\right),\ w\to\infty.\end{cases}$

Доказательство. Утверждение 1) леммы непосредственно следует из формулы (1.13) и определения производной Шварца. Утверждения 2) и 3) получаются с использованием разложений

$$J^{-1}(w)=\begin{cases} z_i-\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{|\lambda_i|}\dfrac{1}{\log\left[\dfrac{w-w_i}{a_i^{(1)}}(1+c_i(w-w_i)+\ldots)\right]} \\ \text{в окрестности } w_i\,(i\neq n), \\ \dfrac{|\lambda_n|}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\log\dfrac{a_n^{(-1)}}{w}+\dfrac{c_n}{w}+\ldots\right)\text{ в окрестности } w_n=\infty, \end{cases} \tag{1.15}$$

вытекающих из формул (1.1), (1.2) и леммы 1.

В сущности, лемма 2 содержалась еще в работе [3]. В этой работе Пуанкаре предложил подход к проблеме униформизации, использующий уравнение Лиувилля (1.14). Именно, он доказал, что в классе гладких вещественнозначных функций на X, асимптотики которых имеют вид, указанный в п. 2 леммы 2, и допускают почленное дифференцирование по w, уравнение Лиувилля однозначно разрешимо. Для его решения величина $T_\varphi=\varphi_{ww}-\frac{1}{2}\varphi_w^2$ является рациональной функцией вида (1.8), и уравнение Фукса (1.11) с $Q_X=T_\varphi$ имеет фуксову группу монодромии.

Уравнение (1.14) является уравнением Эйлера — Лагранжа для экстремалей функционала

$$S(\psi)=\lim_{r\to 0}\left(\iint\limits_{X_r}(|\psi_w|^2+e^\psi)\frac{|dw\wedge d\bar{w}|}{2}+2\pi n(\log r+2\log|\log r|)\right), \tag{1.16}$$

где $X_r=X\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}\{w\,|\,|w-w_i|<r\}\cup\left\{w\,\middle|\,|w|>\frac{1}{r}\right\}\right)$, а ψ принадлежит классу гладких функций на X с указанными выше асимптотиками. Функционал $S(\psi)$ будем называть действием уравнения Лиувилля. Величина T_ψ играет при этом роль (2, 0)-компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля ψ.

§ 2. Движение особых точек уравнения Фукса и геометрия пространства Тейхмюллера

Акцессорные параметры $c_i=c_i(w_1,\ldots,w_{n-3})$ можно рассматривать как функции, заданные в области W_n в $\mathbf{C}^{n-3}$, где

$$W_n=\{(w_1,\ldots,w_{n-3})\in\mathbf{C}^{n-3}\,|\,w_i\neq 0,\ 1\text{ и }w_i\neq w_j\text{ при }i\neq j\}.$$

Мы покажем, что W_n накрывается (в комплексно-аналитическом смысле) пространством Тейхмюллера отмеченных римановых поверхностей типа $(0, n)$. Это позволит нам выразить векторные поля $\frac{\partial}{\partial w_i}$ на W_n в терминах сечений голоморфного касательного расслоения пространства Тейхмюллера.

2.1. Здесь мы напоминаем основные понятия теории пространств Тейхмюллера. Содержание этого пункта хорошо известно; подробности см., например, в [12]—[14].

Пусть Γ — фуксова группа, униформизующая поверхность $X=\mathbf{C}\setminus\{w_1,\ldots,w_{n-3},0,1\}$. Дифференциалом Бельтрами для Γ называется комплекснозначная ограниченная измеримая функция μ на H, обладающая свойством $\mu(\gamma z)\overline{\gamma'(z)}/\gamma'(z)=\mu(z)$ для всех $\gamma\in\Gamma$. Векторное пространство (над $\mathbf{C}$) всех таких функций будем обозначать через

$B(\Gamma)$. Пусть $D(\Gamma)$ — открытый шар в $B(\Gamma)$ единичного радиуса в смысле L^∞-нормы. Для каждого $\mu\in D(\Gamma)$ уравнение Бельтрами

$$\begin{cases} f^\mu_{\bar z}(z)=\mu(z)f^\mu_z(z), & z\in H,\\ f^\mu_{\bar z}(z)=\overline{\mu(z)}f^\mu_z(z), & z\in \mathbf{C}\setminus\overline{H}, \end{cases} \tag{2.1}$$

разрешимо в классе квазиконформных гомеоморфизмов $\hat{\mathbf{C}}$, причем любые два его решения связаны между собой дробно-линейным преобразованием. Мы будем рассматривать только те его решения, которые являются гомеоморфизмами H на себя. Пусть f^μ — одно из таких решений (оно существует при любом $\mu\in D(\Gamma)$). Тогда $\Gamma^\mu=f^\mu\Gamma(f^\mu)^{-1}$ — фуксова группа того же типа, что и Γ, т. е. Γ^μ порождается параболическими образующими $S_i^\mu=f^\mu\circ S_i\circ(f^\mu)^{-1}$, $i=1,\ \ldots,\ n$, с единственным соотношением $S_1^\mu\ldots S_n^\mu=1$. Таким образом, каждый элемент $\mu\in D(\Gamma)$ задает точное представление ρ_μ группы Γ в $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ по формуле $\gamma\mapsto f^\mu\circ\gamma\circ(f^\mu)^{-1}$, $\gamma\in\Gamma$. Два представления ρ_{μ_1} и ρ_{μ_2} эквивалентны, если они отличаются на внутренний автоморфизм $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$, т. е. если $\rho_{\mu_2}=\sigma\rho_{\mu_1}\sigma^{-1}$, $\sigma\in\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$.

Пространством Тейхмюллера $T(\Gamma)$ группы Γ называется множество классов эквивалентности представлений $\rho_\mu\colon\Gamma\to\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$, $\mu\in D(\Gamma)$. На $T(\Gamma)$ существует естественная структура комплексно-аналитического многообразия, индуцированная проекцией $D(\Gamma)\to T(\Gamma)$ (см. п. 2.2).

Обозначим $\mathrm{Aut}_*(\Gamma)$ группу собственных автоморфизмов Γ, переводящих параболические элементы в параболические. Группа $\mathrm{Aut}_*(\Gamma)$ действует на $T(\Gamma)$ по формуле

$$\alpha(\rho_\mu)=\rho_\mu\circ\alpha,\ \alpha\in\mathrm{Aut}_*(\Gamma)$$

(корректность этого определения, т. е. эквивалентность $\alpha(\rho_\mu)$ представлению ρ_{μ_α} с некоторым $\mu_\alpha\in D(\Gamma)$ следует из того факта, что любой автоморфизм $\alpha\in\mathrm{Aut}_*(\Gamma)$ индуцируется квазиконформным отображением $H\to H$). Группа $\mathrm{Inn}(\Gamma)$ внутренних автоморфизмов Γ, очевидно, действует на $T(\Gamma)$ тождественно. Фактор-группа $\mathrm{Mod}(\Gamma)=\mathrm{Aut}_*(\Gamma)/\mathrm{Inn}(\Gamma)$ называется модулярной группой Тейхмюллера группы Γ; она дискретно действует на $T(\Gamma)$ комплексно-аналитическими автоморфизмами. Фактор-пространство $R(\Gamma)=T(\Gamma)/\mathrm{Mod}(\Gamma)$ представляет собой пространство модулей римановых поверхностей типа $(0,\ n)$. Отметим, что при $n\geqslant 5$ группа $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ действует на $T(\Gamma)$ эффективно, а при $n=4$ она содержит подгруппу $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, действующую на $T(\Gamma)$ тождественно.

Замечание 3. Пусть Γ_1 и Γ_2 — группы одного типа, а $f\colon H\to H$ — такое квазиконформное отображение, что $\Gamma_2=f\Gamma_1f^{-1}$. Тогда f индуцирует отображение

$$f^*\colon T(\Gamma_1)\to T(\Gamma_2)$$

по формуле $\rho_{\mu_1}\mapsto\rho_{\mu_2}$, где $\mu_1\in D(\Gamma_1)$,

$$\mu_2=\left(\frac{\mu_1-\lambda}{1-\mu_1\bar\lambda}\,\frac{f_z}{\bar f_z}\right)\circ f^{-1}\in D(\Gamma_2),\ \lambda=\frac{f_{\bar z}}{f_z}.$$

Это отображение является комплексно-аналитическим изоморфизмом (в естественной комплексной структуре на $T(\Gamma_1)$ и $T(\Gamma_2)$) и эквивариантно относительно действия $\mathrm{Mod}(\Gamma_1)$ и $\mathrm{Mod}(\Gamma_2)$, что делает конкретный выбор группы Γ несущественным. Однако, изоморфизм между $T(\Gamma_1)$ и $T(\Gamma_2)$ — не канонический, поскольку он зависит от выбора отображения f.

2.2. Комплексная структура на $T(\Gamma)$ однозначно характеризуется тем, что отображение Φ: $D(\Gamma)\to T(\Gamma)$, переводящее μ в ρ_μ, голоморфно. Для более явного ее описания рассмотрим пространство $Q(\Gamma)$ параболических форм веса 4 для группы Γ. Оно состоит из голоморфных функций $q(z)$ на H, которые преобразуются по правилу $q(\gamma z)\gamma'^2(z)=q(z)$ для всех $\gamma\in\Gamma$, регулярны и обращаются в 0 в каждой из параболических точек группы Γ (последнее эквивалентно тому, что функция $(\operatorname{Im} z)^2|q(z)|$ ограничена на H); как известно, $\dim_{\mathbf{C}} Q(\Gamma)=n-3$. На произведении $B(\Gamma)$ и $Q(\Gamma)$ корректно определено спаривание

$$(\mu, q)=\iint\limits_{H/\Gamma}\mu(z)\,q(z)\,\frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}. \tag{2.2}$$

Подпространство $N(\Gamma)\subset B(\Gamma)$, на котором это спаривание вырождено, совпадает с ядром дифференциала $d\Phi$ отображения Φ в точке $0\in D(\Gamma)$. Кроме того, пространства $B(\Gamma)/N(\Gamma)$ и $Q(\Gamma)$ дуальны относительно спаривания (2.2). Для того чтобы реализовать $B(\Gamma)/N(\Gamma)$ как подпространство в $B(\Gamma)$, определим антилинейное отображение Λ: $B(\Gamma)\to Q(\Gamma)$ с помощью интеграла Бергмана

$$\Lambda(\mu)(z)=\frac{6}{\pi}\iint\limits_{H}\frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(\bar\zeta-z)^4}\,|d\zeta\wedge d\bar\zeta|,\ \mu\in B(\Gamma);$$

его ядро совпадает с $N(\Gamma)$. Отображение Λ^*: $Q(\Gamma)\to B(\Gamma)$, задаваемое формулой

$$\Lambda^*(q)(z)=(\operatorname{Im} z)^2\overline{q(z)},\ q\in Q(\Gamma),$$

удовлетворяет условию $\Lambda\Lambda^*=\mathrm{id}$ на $Q(\Gamma)$. Иначе говоря, Λ^* расщепляет точную последовательность

$$0\to N(\Gamma)\subsetneq B(\Gamma)\xrightarrow{\Lambda} Q(\Gamma)\to 0.$$

Это позволяет реализовать $B(\Gamma)/N(\Gamma)$ как подпространство $\mathscr{H}(\Gamma)=\Lambda^*(Q(\Gamma))$ в $B(\Gamma)$ комплексной размерности $n-3$ — пространство так называемых гармонических дифференциалов Бельтрами. Отсюда следует, что Φ инъективно отображает достаточно малую окрестность точки $0\in\mathscr{H}(\Gamma)$ в $T(\Gamma)$ и может рассматриваться как координатная карта в окрестности $\Phi(0)\in T(\Gamma)$. Аналогичным образом вводятся координаты в окрестности произвольной точки $\Phi(\mu)\in T(\Gamma)$ (см. замечание 3). Этот набор карт и задает на пространстве Тейхмюллера $T(\Gamma)$ упомянутую выше комплексную структуру. Как комплексно-аналитическое многообразие $T(\Gamma)$ оказывается изоморфным ограниченной стягиваемой области в $\mathbf{C}^{n-3}$.

Комплексная структура на пространствах Тейхмюллера была детально исследована Альфорсом и Берсом. Подробное изложение упомянутых результатов см., например, в [12], [14]. Введенные выше координаты на $T(\Gamma)$ называются координатами Берса, а реализация $T(\Gamma)$ как ограниченной области в $\mathbf{C}^{n-3}$ называется вложением Берса.

2.3. На пространстве Тейхмюллера существует замечательная эрмитова метрика, называемая метрикой Вейля — Петерсона. Она определяется следующим образом. Голоморфное касательное пространство к $T(\Gamma)$ в точке $\Phi(\mu)$ в силу сказанного в п. 2.2 можно отождествить с $\mathscr{H}(\Gamma^\mu)$. Спаривание (2.2) позволяет рассматривать $Q(\Gamma^\mu)$ как голоморфное кокасательное пространство к $T(\Gamma)$ в точке $\Phi(\mu)$. В $Q(\Gamma^\mu)$

определено скалярное произведение Петерсона

$$\langle q_1, q_2\rangle = \iint\limits_{H/\Gamma^\mu} q_1(z)\overline{q_2(z)}(\operatorname{Im} z)^2 \frac{|dz\wedge d\bar z|}{2},\quad q_1, q_2 \in Q(\Gamma^\mu),$$

которое и задает метрику Вейля — Петерсона на $T(\Gamma)$ по формуле

$$\langle \mu_1, \mu_2\rangle = \overline{\langle \Lambda(\mu_1), \Lambda(\mu_2)\rangle} = (\mu_1, \Lambda(\mu_2)),\quad \mu_1, \mu_2 \in \mathscr{H}(\Gamma^\mu). \tag{2.3}$$

Эта метрика была введена А. Вейлем [15]; она вещественно-аналитична, кэлерова и инвариантна относительно модулярной группы Тейхмюллера $\operatorname{Mod}(\Gamma)$ (см. [15], [16]). По поводу более тонких свойств метрики Вейля — Петерсона см. обзор (17) и цитированную там литературу.

2.4. Для каждого $\mu\in D(\Gamma)$ уравнение Бельтрами (2.1) имеет единственное решение, фиксирующее точки 0, 1 и ∞, и впредь мы будем рассматривать только такие решения f^μ. Тогда элементы S^μ_{n-2}, S^μ_{n-1}, $S_n{}^\mu\in\Gamma^\mu = f^\mu\Gamma(f^\mu)^{-1}$ будут иметь неподвижные точки 0, 1, ∞. Поверхность H/Γ^μ можно единственным образом комплексно-аналитически вложить в $\hat{\mathbf{C}}$ так, чтобы проколы на H/Γ^μ, отвечающие элементам S^μ_{n-2}, S^μ_{n-1} и $S_n{}^\mu$, отображались в 0, 1 и ∞. Обозначим через J_μ связанное с этим вложением отображение $H\to\mathbf{C}$ и положим $w_i{}^\mu = (J_\mu\circ f^\mu)(z_i)$. Тогда корректно определено отображение $\Psi\colon T(\Gamma)\to\mathbf{C}^{n-3}$, описываемое формулой

$$(\Psi\circ\Phi)(\mu) = (w^\mu_1, \ldots, w^\mu_{n-3}) \in \mathbf{C}^{n-3},$$

и его образ в $\mathbf{C}^{n-3}$ совпадает с множеством W_n.

Положим $X_\mu = \mathbf{C}\setminus\{w_1{}^\mu, \ldots, w^\mu_{n-3}, 0, 1\}$ и обозначим через F^μ отображение X на X_μ, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f^\mu} & H \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J_\mu} \\ X & \xrightarrow{F^\mu} & X_\mu \end{array} \tag{2.4}$$

(другими словами, $F^\mu\circ J = J_\mu\circ f^\mu$). Отсюда следует, что

$$F^\mu_{\bar w} = \mathrm{M} F^\mu_w, \tag{2.5}$$

где $\mathrm{M} = \mu\circ J^{-1}\overline{(J^{-1})'}/(J^{-1})'$ — корректно определенная функция на X_μ, т. е. F^μ — квазиконформный гомеоморфизм $\mathbf{C}$ на себя.

Пусть теперь $\mu = \varepsilon\nu$, где $\nu\in B(\Gamma)$, а ε — достаточно малое комплексное число. Как известно, $f^{\varepsilon\nu}(z)$ при каждом фиксированном $z\in\mathbf{C}$ является вещественно-аналитической функцией от ε. Положим $\dot f^\nu_+ = \left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f^{\varepsilon\nu}\right)\Big|_{\varepsilon=0}$, $\dot f^\nu_- = \left(\frac{\partial}{\partial\bar\varepsilon} f^{\varepsilon\nu}\right)\Big|_{\varepsilon=0}$, тогда

$$\dot f^\nu_+(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_H \nu(\zeta) R(\zeta, z)\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}, \tag{2.6}$$

$$\dot f^\nu_-(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_H \overline{\nu(\zeta)} R(\bar\zeta, z)\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}, \tag{2.7}$$

где

$$R(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta - z} + \frac{z-1}{\zeta} - \frac{z}{\zeta - 1}.$$

В свою очередь, функция $F^{\varepsilon\nu}(\omega)$ при каждом фиксированном $w\in\mathbf{C}$ голо-

морфна по ε и

$$\dot{F}^{\nu}(w) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} \mathrm{N}(\xi)\, R(\xi, w)\, \frac{|d\xi \wedge d\bar{\xi}|}{2}, \tag{2.8}$$

где под $\dot{F}^{\nu}$ понимается $\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F^{\varepsilon\nu}\right)\Big|_{\varepsilon=0}$, а $\mathrm{N} = \nu \circ J^{-1}\overline{(J^{-1})'}/(J^{-1})'$.

Доказательства приведенных здесь утверждений можно найти в [12]—[14].

2.5. Здесь мы свяжем параболические формы веса 4 с функциями на поверхности X (детали см. в [9], [10]).

Обозначим через $D_2(X)$ линейное пространство рациональных функций на $\hat{\mathbf{C}}$, имеющих разве что простые полюсы в точках $w_1, \ldots, w_{n-1}$ и порядок $O(|w|^{-3})$ при $w \to \infty$. Тогда отображение $q \mapsto Q = q \circ J^{-1}(J^{-1})'^2$ определяет линейный изоморфизм пространств $Q(\Gamma)$ и $D_2(X)$; обратное отображение задается формулой $Q \mapsto q = Q \circ JJ'^2$. Скалярное произведение Петерсона в $Q(\Gamma)$ можно перенести на $D_2(X)$, положив $\langle P, Q\rangle = \langle P \circ JJ'^2, Q \circ JJ'^2\rangle$, $P, Q \in D_2(X)$, так что

$$\langle P, Q\rangle = \iint\limits_{\mathbf{C}} e^{-\varphi(w)} P(w)\, \overline{Q(w)}\, \frac{|dw \wedge d\bar{w}|}{2}.$$

Каждая функция $q \in Q(\Gamma)$ допускает разложение в ряд Фурье вида

$$q(z) = \frac{1}{(z - z_i)^4} \sum_{k=1}^{\infty} q_i^{(k)} \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}\,k}{|\lambda_i|\,(z - z_i)}\right)$$

в окрестности z_i, $i \neq n$, и

$$q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_n^{(k)} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}\,kz}{|\lambda_n|}\right)$$

в окрестности $z_n = \infty$, где λ_i определены в предыдущем параграфе. Из формул (1.15) следует, что функция $Q = q \circ J^{-1}(J^{-1})'^2$ имеет в каждой из точек w_i, $i \neq n$, простой полюс с вычетом $-\frac{\lambda_i^2 q_i^{(1)}}{4\pi^2 a_i^{(1)}}$ и

$$Q(w) = -\frac{\lambda_n^2 a_n^{(-1)} q_n^{(1)}}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{w^3} + O(|w|^{-4}) \text{ при } w \to \infty,$$

где $a_i^{(1)}$ $(i \neq n)$, $a_n^{(-1)}$ — коэффициенты Фурье из разложений (1.1) и (1.2).

2.6. Теперь мы докажем, что определенное в п. 2.4 отображение $\Psi: T(\Gamma) \to W_n$ является накрытием. С этой целью выберем специальный базис $\nu_1, \ldots, \nu_{n-3}$ в пространстве $\mathscr{H}(\Gamma)$. Положим

$$P_i(w) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{w - w_i} + \frac{w_i - 1}{w} - \frac{w_i}{w - 1}\right) = -\frac{1}{\pi} R(w, w_i), \quad i = 1, \ldots, n-3;$$

очевидно, P_i линейно независимы и порождают пространство $D_2(X)$. Обозначим через Q_i, $i = 1, \ldots, n-3$, базис в $D_2(X)$, биортогональный к P_i в смысле скалярного произведения Петерсона, т. е. $\langle P_i, Q_j\rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Искомый базис в $\mathscr{H}(\Gamma)$ имеет вид

$$\nu_i(z) = (\operatorname{Im} z)^2\, \overline{q_i(z)}, \tag{2.9}$$

где $q_i = Q_i \circ JJ'^2$.

Аналогичным образом определяется базис ν_i^μ, $i=1, \ldots, n-3$, в пространстве $\mathscr{H}(\Gamma^\mu)$, $\mu \in D(\Gamma)$. В силу сказанного в п. 2.2 и 2.3, мы можем рассматривать ν_i^μ как векторные поля на $T(\Gamma)$.

Лемма 3. *Отображение* $\Psi: T(\Gamma) \to W_n$ *представляет собой комплексно-аналитическое накрытие и*

$$d\Psi_{\Phi(\mu)}(\nu_i^\mu) = \frac{\partial}{\partial w_i}, \quad i=1, \ldots, n-3. \tag{2.10}$$

Доказательство. Убедимся вначале в справедливости формулы (2.10), при этом, как следует из замечания 3, достаточно проверить ее в точке $\Phi(0)$. В окрестности $\Phi(0) \in T(\Gamma)$ координаты Берса $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-3}) \in \mathbf{C}^{n-3}$ в базисе $\nu_1, \ldots, \nu_{n-3} \in \mathscr{H}(\Gamma)$ определяются из разложения

$$\nu = \sum_{i-1}^{n-3} \varepsilon_i \nu_i,$$

где $\nu \in \mathscr{H}(\Gamma) \cap D(\Gamma)$. В этих координатах отображение Ψ задается формулой

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-3}) \mapsto (F^\nu(w_1), \ldots, F^\nu(w_{n-3})),$$

где $(w_1, \ldots, w_{n-3}) = (\Psi \circ \Phi)(0) \in W_n$. Поскольку F^ν комплексно-аналитически зависит от $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-3}$ (см. п. 2.4), то отображение Ψ также является комплексно-аналитическим. Вычислим его дифференциал $d\Psi$ в точке $\Phi(0) \in T(\Gamma)$. Как следует из определения ν_i и формулы (1.13),

$$\mathrm{N}_i = \nu_i \circ J^{-1} \frac{\overline{(J^{-1})'}}{(J^{-1})'} = (\operatorname{Im} J^{-1})^2 \overline{q_i \circ J^{-1}} \frac{\overline{(J^{-1})'}}{(J^{-1})'} = e^{-\varphi} \overline{Q_i},$$

где $Q_i = q_i \circ J^{-1} (J^{-1})'^2$. Отсюда по формуле (2.8) в силу выбора функций P_i получаем, что

$$\dot{F}^{\nu_i}(w_j) = \langle P_j, Q_i \rangle = \delta_{ij},$$

а это в точности означает, что в рассматриваемых координатах дифференциал $d\Psi$ в точке $\Phi(0) \in T(\Gamma)$ задается единичной матрицей, т. е. $d\Psi(\nu_i) = \dfrac{\partial}{\partial w_i}$.

Из формулы (2.10) следует, что Ψ — локальный диффеоморфизм. Покажем, что Ψ —накрытие. Для $\alpha \in \mathrm{Aut}_*(\Gamma)$ обозначим через z_i^α неподвижную точку параболического элемента $\alpha(S_i) \in \Gamma$ и положим $s_\alpha(w_1, \ldots, w_n) = (J(z_1^\alpha), \ldots, J(z_n^\alpha))$, где $w_i = J(z_i)$, $i=1, \ldots, n$. Соответствие $\alpha \mapsto s_\alpha$ определяет эпиморфизм группы $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ на симметрическую группу $\mathrm{Symm}(n)$. Ядро этого эпиморфизма обозначим через $G(\Gamma)$. Отображение Ψ инвариантно относительно $G(\Gamma)$, и, очевидно, $W_n \cong T(\Gamma)/G(\Gamma)$. Отсюда следует, что Ψ — накрытие с группой автоморфизмов $G(\Gamma)$.

Доказанная лемма и связывает движение проколов на $\hat{\mathbf{C}}$ (или особых точек уравнения Фукса) с геометрией пространства Тейхмюллера.

Замечание 4. Как видно из доказательства леммы, на W_n действует группа $\mathrm{Symm}(n)$, причем фактор-пространство $W_n/\mathrm{Symm}(n)$ изоморфно пространству модулей римановых поверхностей типа $(0, n)$. При $n \geqslant 5$ это действие эффективно, а при $n=4$ — нет (см. п. 2.1).

Замечание 5. Параболические формы q_i, входящие в формулу (2.9), допускают описание непосредственно в терминах группы Γ. Имен-

но, q_i можно определить как ряд Пуанкаре

$$q_i(z)=\frac{8\pi^2}{\lambda_i^2 a_i^{(1)}}\sum_{\gamma\in(S_i)\setminus\Gamma}\frac{1}{(\gamma z-z_i)^4}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{|\lambda_i|(\gamma z-z_i)}\right),$$

где γ пробегает полную систему представителей правых смежных классов группы Γ по циклической подгруппе, порожденной элементом S_i. По формуле Петерсона для любой параболической формы $q\in Q(\Gamma)$

$$\langle q, q_i\rangle=\frac{\lambda_i^2 q_i^{(1)}}{4\pi a_i^{(1)}}=-\pi\,\mathrm{Res}_{w=w_i}Q(w),$$

где $q_i^{(1)}$ — первый коэффициент Фурье формы q в параболической точке z_i, а $\mathrm{Res}_{w=w_i}Q(w)$ — вычет $Q=q\circ J^{-1}(J^{-1})'^2$ в точке $w_i\in\mathbf{C}$ (см., например, [10]).

2.7. Решение φ уравнения Лиувилля, описанное в п. 1.4, можно рассматривать как функцию $\varphi(w;\ w_1,\ \ldots,\ w_{n-3})$ на множестве W_{n+1} (очевидно, W_{n+1} расслаивается над W_n со слоем $X=\mathbf{C}\setminus\{w_1,\ \ldots,\ w_{n-3},\ 0,\ 1\}$). В следующем параграфе нас будут интересовать производные φ по переменным w_i. Результаты предыдущего пункта позволяют дать их геометрическое описание.

Построенный в п. 2.6 базис $\nu_1,\ \ldots,\ \nu_{n-3}$ в пространстве $\mathscr{H}(\Gamma)$ однозначно определялся по поверхности $X=\mathbf{C}\setminus\{w_1,\ \ldots,\ w_{n-3},\ 0,\ 1\}$, поэтому функции $\dot F^{\nu_i}$ корректно определены на W_{n+1}. Положим

$$\dot F^i(w;w_1,\ \ldots,w_{n-3})=\dot F^{\nu_i}(w),\quad i=1,\ \ldots,n-3.$$

Лемма 4. *Функция φ непрерывно дифференцируема на W_{n+1} и*

$$\varphi_{w_i}+\varphi_w\dot F^i+\dot F^i_w=0. \tag{2.11}$$

Доказательство. Пусть Γ — группа, униформизующая поверхность $X=\mathbf{C}\setminus\{w_1,\ \ldots,\ w_{n-3},\ 0,\ 1\}$ и $f^\nu(z)$ — решение уравнения Бельтрами (2.1) с $\nu=\varepsilon_1\nu_1+\ldots+\varepsilon_{n-3}\nu_{n-3}\in\mathscr{H}(\Gamma)$. Тогда $f^\nu(z)$ будет гладкой (и даже вещественно-аналитической) функцией переменных $z\in H$ и достаточно малых $\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_{n-3}\in\mathbf{C}$. Связанная с ней функция $F^\nu(w)$ дифференцируема по w на X и аналитически зависит от координат Берса ε_i (см. п. 2.4). Из диаграммы (2.4) следует, что J_ν и J_ν' непрерывно дифференцируемы по ε_i и вне множества особых точек локально этим свойством обладают подходящие ветви функций J_ν^{-1} и $(J_\nu^{-1})'$. Непрерывная дифференцируемость φ на W_{n+1} вытекает теперь из формулы (1.13) и леммы 3.

Что касается формулы (2.11), то она представляет собой переформулировку леммы Альфорса из [16] об обращении в ноль первой вариации элемента площади в метрике Пуанкаре на X при квазиконформных отображениях, отвечающих гармоническим дифференциалам Бельтрами: для любого $\nu\in\mathscr{H}(\Gamma)$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{|f_z^{\varepsilon\nu}|^2}{(\mathrm{Im}\,f^{\varepsilon\nu})^2}\bigg|_{\varepsilon=0}=0. \tag{2.12}$$

Действительно, положим $\varphi^{\varepsilon\nu}(w)=\varphi(w;\ F^{\varepsilon\nu}(w_1),\ \ldots,\ F^{\varepsilon\nu}(w_{n-3}))$; тогда, как показывают формула (1.13) и диаграмма (2.4),

$$\frac{|f_z^{\varepsilon\nu}|^2}{(\mathrm{Im}\,f^{\varepsilon\nu})^2}=e^{\varphi^{\varepsilon\nu}\circ J_{\varepsilon\nu}\circ f^{\varepsilon\nu}}|(J_{\varepsilon\nu}\circ f^{\varepsilon\nu})_z|^2=e^{\varphi^{\varepsilon\nu}\circ F^{\varepsilon\nu}\circ J}|F_w^{\varepsilon\nu}\circ J|^2|J'|^2,$$

откуда с использованием (2.12) получаем, что

$$\frac{\partial \varphi^{\varepsilon\nu}}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \varphi_w \dot{F}^{\nu} + \dot{F}^{\nu}_{w} = 0.$$

Полагая $\nu = \nu_i$ и вспоминая лемму 3, приходим к искомой формуле (2.11).

§ 3. Основные результаты

3.1. Пусть $S(\varphi)$ — определенный в п. 1.4 функционал действия для уравнения Лиувилля (1.14), вычисленный на его экстремали φ. Как и акцессорные параметры $c_1, \ldots, c_{n-3}$, функция $S(\varphi) = S(w_1, \ldots, w_{n-3})$ определена на W_n.

Теорема 1. *Функция S непрерывно дифференцируема на W_n и*

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial S}{\partial w_i} = c_i, \quad i = 1, \ldots, n-3. \tag{3.1}$$

Доказательство. Положим

$$S_r(w_1, \ldots, w_{n-3}) = \iint\limits_{X_r} |\varphi_w|^2 \frac{|dw \wedge d\bar{w}|}{2} + 2\pi n (\log r + 2 \log |\log r|).$$

При любом $r > 0$ функция S_r непрерывно дифференцируема на W_n. В силу формулы Гаусса — Бонне

$$\iint\limits_{X} e^{\varphi} \frac{|dw \wedge d\bar{w}|}{2} = 2\pi(n-2)$$

и $S_r \xrightarrow[r\to 0]{} S - 2\pi(n-2)$ на W_n в смысле поточечной сходимости. Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что $\frac{\partial S_r}{\partial w_i}$ равномерно сходится к $-2\pi c_i$ при $r \to 0$ в окрестности любой точки пространства W_n.

Покажем вначале, что $\frac{\partial S_r}{\partial w_i} \xrightarrow[r\to 0]{} -2\pi c_i$ в смысле поточечной сходимости. Очевидно,

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_i} = \frac{\partial}{\partial w_i} \iint\limits_{X_r} |\varphi_w|^2 \frac{|dw \wedge d\bar{w}|}{2} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \iint\limits_{X_r} \frac{\partial}{\partial w_i} |\varphi_w|^2 dw \wedge d\bar{w} + \\ + \frac{\sqrt{-1}}{2} \int\limits_{C_r^i} |\varphi_w|^2 d\bar{w}, \tag{3.2}$$

где окружность $C_r^i = \{w \mid |w - w_i| = r\}$ ориентирована как компонента края ∂X_r области X_r. Как следует из леммы 4,

$$\frac{\partial}{\partial w_i} |\varphi_w|^2 = \varphi_{ww_i}\varphi_{\bar{w}} + \varphi_{\bar{w}w_i}\varphi_w = -(\varphi_{ww}\dot{F}^i + \varphi_w \dot{F}^i_w + \dot{F}^i_{ww})\varphi_{\bar{w}} - \\ - (\varphi_{w\bar{w}}\dot{F}^i + \varphi_w \dot{F}^i_{\bar{w}} + \dot{F}^i_{w\bar{w}})\varphi_w = -(\varphi_{\bar{w}}\dot{F}^i_{ww} + \varphi_w \dot{F}^i_{w\bar{w}} + \varphi^2_w \dot{F}^i_{\bar{w}}) - \\ - \frac{\partial}{\partial w}(|\varphi_w|^2 \dot{F}^i) = (2\varphi_{ww} - \varphi^2_w)\dot{F}^i_{\bar{w}} - 2\frac{\partial}{\partial w}(\varphi_w \dot{F}^i_{\bar{w}}) + \frac{\partial}{\partial \bar{w}}(\varphi_w \dot{F}^i_w) - \\ - \frac{\partial}{\partial w}(\varphi_{\bar{w}}\dot{F}^i_w) - \frac{\partial}{\partial w}(|\varphi_w|^2 \dot{F}^i),$$

откуда по формуле Стокса

$$\iint\limits_{X_r} \frac{\partial}{\partial w_i} |\varphi_w|^2 dw \wedge d\overline{w} = \iint\limits_{X_r} (2\varphi_{ww} - \varphi_w^2) \dot{F}^i_{\overline{w}} dw \wedge d\overline{w} - 2 \int\limits_{\partial X_r} \varphi_w \dot{F}^i_{\overline{w}} d\overline{w} -$$

$$- \int\limits_{\partial X_r} \varphi_w \dot{F}^i_w dw - \int\limits_{\partial X_r} \varphi_{\overline{w}} \dot{F}^i_w d\overline{w} - \int\limits_{\partial X_r} |\varphi_w|^2 d\overline{w} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

Вычислим каждый из этих интегралов по отдельности. При этом мы будем использовать лемму 2 и формулы

$$\dot{F}^i(w) = \delta_{ij} + (w - w_j) \dot{F}^i_w(w_j) + o(|w - w_j|), \quad j \neq n, \quad w \to w_j \tag{3.3}$$

$$\dot{F}^i(w) = w\dot{F}^i_w(\infty) + o(|w|), \quad w \to \infty, \tag{3.4}$$

$$\dot{F}^i_{\overline{w}} = e^{-\varphi} \overline{Q}_i, \tag{3.5}$$

которые непосредственно следуют из определения функций $\dot{F}^i$ (см. п. 2.7), интегрального представления (2.8) и определения функций Q_i (см. п. 2.6).

Начнем с интеграла I_1:

$$I_1 = \iint\limits_{X_r} (2\varphi_{ww} - \varphi_w^2) \dot{F}^i_{\overline{w}} dw \wedge d\overline{w} = -2 \int\limits_{\partial X_r} T_\varphi \dot{F}^i dw =$$

$$= -2 \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{C_r^j} \left(\frac{1}{2(w - w_j)^2} + \frac{c_j}{w - w_j} + \ldots \right) (\delta_{ij} + (w - w_j) \dot{F}^i_w(w_j) + \ldots) dw -$$

$$- 2 \int\limits_{C_r^n} \left(\frac{1}{2w^2} + \frac{c_n}{w^3} + \ldots \right) (w\dot{F}^i_w(\infty) + \ldots) dw =$$

$$= 4\pi\sqrt{-1} c_i + 2\pi\sqrt{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \dot{F}^i_w(w_j) - 2\pi\sqrt{-1} \dot{F}^i_w(\infty) + o(1), \quad r \to 0.$$

Здесь окружность $C_r^n = \left\{ w \mid |w| = \frac{1}{r} \right\}$ ориентирована как компонента края ∂X_r и при выводе мы использовали соотношение $T_\varphi = Q_X = \mathscr{P}(J^{-1})$ (см. п. 1.4).

Далее,

$$I_2 = -2 \int\limits_{\partial X_r} \varphi_w \dot{F}^i_{\overline{w}} d\overline{w} = 2 \int\limits_{\partial X_r} \frac{\partial}{\partial w} e^{-\varphi(w)} \overline{Q_i(w)} d\overline{w} = o(1), \quad r \to 0,$$

$$I_3 + I_4 = - \int\limits_{\partial X_r} \varphi_w \dot{F}^i_w dw - \int\limits_{\partial X_r} \varphi_{\overline{w}} \dot{F}^i_w d\overline{w} = - \int\limits_{\partial X_r} \dot{F}^i_w d\varphi = o(1), \quad r \to 0,$$

$$I_5 = - \int\limits_{\partial X_r} |\varphi_w|^2 \dot{F}^i d\overline{w} = - \int\limits_{C_r^i} |\varphi_w|^2 d\overline{w} -$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{C_r^j} \left(\frac{1}{|w - w_j|^2} + \ldots \right) ((w - w_j) \dot{F}^i_w(w_j) + \ldots) d\overline{w} -$$

$$- \int\limits_{C_r^n} \left(\frac{1}{|w|^2} + \ldots \right) (w\dot{F}^i_w(\infty) + \ldots) d\overline{w} = - \int\limits_{C_r^i} |\varphi_w|^2 d\overline{w} -$$

$$- 2\pi\sqrt{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \dot{F}^i_w(w_j) + 2\pi\sqrt{-1} \dot{F}^i_w(\infty) + o(1), \quad r \to 0.$$

В результате мы получаем, что

$$\iint\limits_{X_r} \frac{\partial}{\partial w_i} |\varphi_w|^2 dw \wedge d\bar{w} = 4\pi\sqrt{-1}c_i - \int\limits_{C_r^i} |\varphi_w|^2 d\bar{w} + o(1), \quad r \to 0,$$

и, как теперь следует из формулы (3.2),

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_i} = -2\pi c_i + o(1), \quad r \to 0. \tag{3.6}$$

Остается показать, что остаток в этой формуле оценивается равномерно в окрестности произвольной точки $(w_1, \ldots, w_{n-3}) \in W_n$. Пусть Γ — группа, униформизующая поверхность $X = \mathbf{C} \setminus \{w_1, \ldots, w_{n-3}, 0, 1\}$. Тогда функция J_ν, где $\nu = \varepsilon_1\nu_1 + \ldots + \varepsilon_{n-3}\nu_{n-3} \in \mathscr{H}(\Gamma)$, непрерывно дифференцируема по координатам Берса ε_i и этим же свойством обладают ее коэффициенты Фурье. Отсюда с помощью формулы (1.13) и леммы 3 заключаем, что остатки в пп. 2 и 3 леммы 2 оцениваются равномерно. Аналогичное утверждение справедливо и для остатков в формулах (3.3) и (3.4) для F_i, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 6. Доказанная теорема означает, что $\sum\limits_{i=1}^{n-3} (c_i dw_i + \bar{c}_i d\bar{w}_i)$ представляет собой точную 1-форму на W_n с первообразной $-\frac{1}{2\pi} S$.

Замечание 7. Используя теорему 1 и технику, развитую в [18] (см. также [17] и цитированную там литературу), можно, в принципе, описать поведение акцессорных параметров при слиянии особых точек уравнения Фукса (1.11). Мы надеемся впоследствии обсудить этот вопрос более подробно.

3.2. Определенная в п. 2.3 метрика Вейля — Петерсона на $T(\Gamma)$ в силу ее инвариантности относительно $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ проектируется на W_n. Полученную метрику на W_n мы будем по-прежнему называть метрикой Вейля — Петерсона и сохраним для нее старое обозначение $\langle , \rangle$.

Теорема 2. *Акцессорные параметры $c_1, \ldots, c_{n-3}$ непрерывно дифференцируемы на W_n и*

$$\frac{\partial c_i}{\partial w_j} = \frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{\partial}{\partial w_i}, \frac{\partial}{\partial w_j} \right\rangle, \quad i, j = 1, \ldots, n-3. \tag{3.7}$$

Доказательство. Непрерывная дифференцируемость функций c_i на пространстве W_n следует, например, из леммы 1 в силу непрерывной дифференцируемости J_ν по координатам Берса.

Докажем теперь формулу (3.7). Пусть $(w_1, \ldots, w_{n-3})$ — произвольная точка в W_n и Γ — группа, униформизующая поверхность $X = \mathbf{C} \setminus \{w_1, \ldots, w_{n-3}, 0, 1\}$. Из диаграммы (2.4) следует, что

$$\mathscr{S}(J^{-1}_{\varepsilon\nu_j} \circ F^{\varepsilon\nu_j}) = \mathscr{S}(f^{\varepsilon\nu_j} \circ J^{-1}),$$

где ν_j — элемент базиса в $\mathscr{H}(\Gamma)$, задаваемый формулой (2.9), а $\varepsilon \in \mathbf{C}$ — достаточно мало. По формуле (1.4)

$$\mathscr{S}(J^{-1}_{\varepsilon\nu_j}) \circ F^{\varepsilon\nu_j} (F^{\varepsilon\nu_j}_w)^2 + \mathscr{S}(F^{\varepsilon\nu_j}) = \mathscr{S}(f^{\varepsilon\nu_j}) \circ J^{-1} (J^{-1})'^2 + \mathscr{S}(J^{-1})$$

(производные Шварца функций $f^{\varepsilon\nu_j}$ и $F^{\varepsilon\nu_j}$ определены корректно, поскольку выбор ν_j гарантирует дифференцируемость $f^{\varepsilon\nu_j}$ и $F^{\varepsilon\nu_j}$). Продиф-

ференцируем последнее равенство по ε в точке $\bar{\varepsilon}=0$, учитывая формулы (1.7), (1.8) и тот факт, что $F^{\varepsilon\nu_j}$ и, следовательно, $w_i^{\varepsilon\nu_j}$ комплексно-аналитически зависят от ε. Мы получим, что

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial c_i^{\varepsilon\nu_j}}{\partial\bar{\varepsilon}}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)\frac{1}{w-w_i}=\frac{\partial}{\partial\bar{\varepsilon}}\left[f_{zzz}^{\varepsilon\nu_j}\circ J^{-1}(J^{-1})'^2\right]\bigg|_{\varepsilon=0} \tag{3.8}$$

(здесь $c_i^{\varepsilon\nu_j}=c_i(w_1^{\varepsilon\nu_j},\ldots,w_{n-3}^{\varepsilon\nu_j})$). Для вычисления правой части в (3.8) воспользуемся хорошо известной формулой Альфорса [12], [16]

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\varepsilon}}f_{zzz}^{\varepsilon\nu_j}\bigg|_{\varepsilon=0}=-\frac{1}{2}q_j, \tag{3.9}$$

где ν_j и q_j связаны соотношением $\nu_j(z)=(\operatorname{Im}z)^2\overline{q_j(z)}$ (см. п. 2.6). Эта формула получается в результате сопоставления формулы (2.7) и равенства $\Lambda\Lambda^*=id$ из п. 2.2. Используя соотношения (1.10), мы можем переписать формулу (3.8) в виде

$$\sum_{i=1}^{n-3}\left(\frac{\partial c_i^{\varepsilon\nu_j}}{\partial\bar{\varepsilon}}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)P_i=\frac{1}{2\pi}Q_j,$$

где $Q_j=q_j\circ J^{-1}(J^{-1})'^2$, а P_i определены в п. 2.6. Как теперь следует из биортогональности базисов P_i и Q_j и леммы 3,

$$\frac{\partial c_i}{\partial\bar{w}_j}=\frac{1}{2\pi}\langle Q_j,Q_i\rangle=\frac{1}{2\pi}\left\langle\frac{\partial}{\partial w_i},\frac{\partial}{\partial w_j}\right\rangle,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 8. Сопоставляя утверждение теорем 1 и 2, получаем, что вещественнозначная функция $-S$ представляет собой потенциал метрики Вейля — Петерсона на W_n, т. е.

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial w_i},\frac{\partial}{\partial w_j}\right\rangle=-\frac{\partial^2 S}{\partial w_i\partial\bar{w}_j},$$

а функция $-S\circ\Psi$ — потенциал метрики Вейля — Петерсона на пространстве Тейхмюллера $T(\Gamma)$.

Замечание 9. Теоремы 1 и 2 дают, в частности, и доказательство кэлеровости метрики Вейля — Петерсона.

Замечание 10. Из вещественной аналитичности метрики Вейля — Петерсона (см. [16]) следует вещественная аналитичность акцессорных параметров $c_1,\ldots,c_{n-3}$ и их производящей функции $-\frac{1}{2\pi}S$ на пространстве W_n.

Замечание 11. Результаты этого параграфа практически дословно переносятся на случай уравнения Фукса и с регулярными особыми точками конечного порядка (группа монодромии такого уравнения наряду с параболическими имеет и эллиптические образующие).

§ 4. Акцессорные параметры и интегралы Эйхлера

Как следует из теоремы 1 для акцессорных параметров $c_1,\ldots,c_{n-3}$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial c_i}{\partial w_j}=\frac{\partial c_j}{\partial w_i},\quad\frac{\partial c_i}{\partial\bar{w}_j}=\overline{\frac{\partial c_j}{\partial\bar{w}_i}},\quad i,j=1,\ldots,n-3. \tag{4.1}$$

Здесь мы дадим интерпретацию производных $\frac{\partial c_i}{\partial w_j}$, $\frac{\partial c_i}{\partial \bar{w}_j}$ в терминах коэффициентов Фурье интегралов Эйхлера, и, в качестве следствия, получим другое доказательство этих формул.

4.1. Интегралом Эйхлера веса — 2 для фуксовой группы Г называется мероморфная функция $\mathscr{E}$ на H, удовлетворяющая при любом $\gamma \in \Gamma$ условию

$$\frac{\mathscr{E}(\gamma z)}{\gamma'(z)} - \mathscr{E}(z) = p_\gamma(z), \quad z \in H,$$

где $p_\gamma(z)$ — полином степени $\leqslant 2$ (зависящий от $\mathscr{E}$ и γ). Кроме того, требуется, чтобы функция $\mathscr{E}'''$ которая, очевидно, является автоморфной формой веса 4 для Г, была мероморфна и в параболических точках группы Г. Подробное изложение теории интегралов Эйхлера (и когомологий Эйхлера) можно найти, например, в [9], и мы не будем на нем останавливаться.

4.2. Пусть Г — группа, униформизующая поверхность $X = \mathbf{C} \setminus \{w_1, \ldots, w_{n-3}, 0, 1\}$. Рассмотрим вытекающее из (2.4) равенство

$$F^{\varepsilon v_j} \circ J = J_{\varepsilon v_j} \circ f^{\varepsilon v_j},$$

где v_j — элемент описанного в § 2 базиса пространства $\mathscr{H}(\Gamma)$, а $\varepsilon \in \mathbf{C}$ — достаточно мало. Продифференцируем его по ε и $\bar{\varepsilon}$ в точке $\varepsilon = 0$; получим, что

$$\mathscr{E}_+^j + \dot{f}_+^j = \dot{F}^j \circ J / J', \tag{4.2}$$

$$\mathscr{E}_-^j + \dot{f}_-^j = 0, \tag{4.3}$$

где через f_+^j, $\mathscr{E}_+^j$ и f_-^j, $\mathscr{E}_-^j$ соответственно обозначены

$$\left.\frac{\partial f^{\varepsilon v_j}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \quad \left(\left.\frac{\partial J_{\varepsilon v_j}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) \Big/ J' \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial f^{\varepsilon v_j}}{\partial \bar{\varepsilon}}\right|_{\varepsilon=0}, \quad \left(\left.\frac{\partial J_{\varepsilon v_j}}{\partial \bar{\varepsilon}}\right|_{\varepsilon=0}\right) \Big/ J'.$$

Функции $\mathscr{E}_\pm^j$ представляют собой интегралы Эйхлера для группы Г веса — 2. При каждом $j = 1, \ldots, n-3$ функция $\mathscr{E}_-^j$ регулярна на H, в том числе в параболических точках группы Г. Что касается функции $\mathscr{E}_+^j$, то она регулярна всюду, кроме точки z_j (и эквивалентных ей относительно Г), а при $z \to z_j$ ведет себя как $\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{|\lambda_j|(z - z_j)}\right)$. В окрестности точек z_i, $i = 1, \ldots, n-3$, интегралы Эйхлера $\mathscr{E}_\pm^j$ раскладываются в ряды Фурье вида

$$\mathscr{E}_\pm^j(z) = p_\pm^{ij}(z) - \frac{|\lambda_i|(z - z_i)^2}{2\pi\sqrt{-1}} a_i^{(1)} (\dot{c}_i)_\pm^j \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{|\lambda_i|(z - z_i)}\right) + \ldots, \tag{4.4}$$

где $p_\pm^{ij}(z)$ — полиномы степени $\leqslant 2$, а $(\dot{c}_i)_+^j$, $(\dot{c}_i)_-^j$ означают соответственно производные $\left.\frac{\partial c_i^{\varepsilon v_j}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$, $\left.\frac{\partial c_i^{\varepsilon v_j}}{\partial \bar{\varepsilon}}\right|_{\varepsilon=0}$ (отметим, что для функции $\mathscr{E}_+^j$ эта формула справедлива лишь при $i \neq j$). Формула (4.4) выводится из разложений (1.1) прямым вычислением, использующим лемму 1.

Производные $(\mathscr{E}_\pm^j)'''$ представляют собой автоморфные формы веса 4, поэтому $\mathscr{P}_\pm^j = (\mathscr{E}_\pm^j)''' \circ J^{-1}(J^{-1})'^2$ — рациональные функции на $\hat{\mathbf{C}}$, причем

их полюсы лежат только в точках $w_1, \ldots, w_{n-3}$, 0, 1. Учитывая лемму 3 и сказанное в п. 2.5, из формулы (4.4) мы получаем, что

$$(\dot{c}_i)^j_+ = \frac{\partial c_i}{\partial w_j} = \mathrm{Res}_{w=w_i} \mathcal{P}^j_+ (w), \quad i \neq j, \tag{4.5}$$

$$(\dot{c}_i)^j_- = \frac{\partial c_i}{\partial \bar{w}_j} = \mathrm{Res}_{w=w_i} \mathcal{P}^j_- (w), \tag{4.6}$$

где $i, j = 1, \ldots, n-3$.

Интегралы Эйхлера $\mathscr{E}_\pm^j$ допускают описание и непосредственно в терминах группы Г. Именно, функция $\mathscr{E}_-^j$ однозначно (с точностью до полинома степени $\leqslant 2$) определяется из условия регулярности и уравнения $(\mathscr{E}_-^j)''' = \frac{1}{2} q_j$ (см. формулу (3.9)). В свою очередь, функция $\mathscr{E}_+^j$ однозначно характеризуется тем, что она регулярна во всех параболических точках группы Г кроме z_j, ведет себя как $\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{|\lambda_j|(z-z_j)}\right)$ при $z \to z_j$ и ее класс когомологий Эйхлера совпадает с классом когомологий параболической формы $\frac{1}{2} q_j$ при отображении Берса (детали см. в [9]).

Итак, мы связали производные $\frac{\partial c_i}{\partial w_j}$, $\frac{\partial c_i}{\partial \bar{w}_j}$ акцессорных параметров с интегралами Эйхлера для группы Г.

4.3. Здесь мы дадим описание интегралов Эйхлера $\mathscr{E}_\pm^j$ в терминах специального производящего ядра $\theta(\zeta, z)$ на $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, откуда, в частности, будут следовать и формулы (4.1).

Положим

$$\theta(\zeta, z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} R(\gamma\zeta, z) \gamma'^2(\zeta), \tag{4.7}$$

где, как и в § 2,

$$R(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta - z} + \frac{z-1}{\zeta} - \frac{z}{\zeta - 1}.$$

Ряд Пуанкаре (4.7) сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах $(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) \times (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R})$ (естественно, $\zeta \neq \gamma z$, $\gamma \in \Gamma$). Как функция переменной ζ, $\theta(\zeta, z)$ представляет собой автоморфную форму веса 4, имеет простые полюсы в точках $\zeta = \gamma z$, $\gamma \in \Gamma$, и обращается в 0 во всех параболических точках группы Г. По переменной z функция $\theta(\zeta, z)$ является интегралом Эйхлера веса — 2.

Формулы (4.2), (4.3) с помощью определения (4.7) и интегральных представлений (2.6)—(2.8) можно переписать в виде

$$\mathscr{E}_+^j(z) = \frac{1}{\pi} \langle \theta(\cdot, z) - r(\cdot, z), q_j \rangle, \tag{4.8}$$

$$\mathscr{E}_-^j(z) = \frac{1}{\pi} \overline{\langle \theta(\cdot, \bar{z}), q_j \rangle}, \tag{4.9}$$

где $r(\zeta, z) = R(J(\zeta), J(z)) J'^2(\zeta)/J'(z)$, а $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение Петерсона. Обозначим через $\theta_j^{(1)}(z)$ первый коэффициент Фурье автоморфной формы $\theta(\cdot, z)$ в параболической точке z_j, $j = 1, \ldots, n-3$. В силу сказанного в п. 2.5, из формул (4.8) и (4.9) следует, что

$$\mathscr{E}_+^j(z) = \frac{\lambda_j^2}{4\pi^2 a_j^{(1)}} \theta_j^{(1)}(z), \tag{4.10}$$

$$\mathscr{E}_-^j(z) = \frac{\lambda_j^2}{4\pi^2 \overline{a_j^{(1)}}} \overline{\theta_j^{(1)}(\bar{z})} \tag{4.11}$$

(здесь мы воспользовались тем, что при любом $z \in H$ функции $\theta(\cdot, z) - r(\cdot, z)$, $\theta(\cdot, \bar{z}) \in Q(\Gamma)$, а первые коэффициенты Фурье $r(\cdot, z)$ в параболических точках $z_1, \ldots, z_{n-3}$ равны 0).

Положим $k(\zeta, z) = \frac{\partial^3}{\partial z^3} \theta(\zeta, z)$, так что

$$k(\zeta, z) = 6 \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{(z - \gamma\zeta)^4} \gamma'^2(\zeta).$$

По каждой из переменных $k(\zeta, z)$ — автоморфная форма веса 4 для группы Γ, поэтому $K(\xi, w) = k(J^{-1}(\xi), J^{-1}(w)) (J^{-1})'^2(\xi) (J^{-1})'^2(w)$ — мероморфная функция на $\hat{\mathbf{C}} \times \hat{\mathbf{C}}$. Объединяя формулы (4.5), (4.6) с формулами (4.10), (4.11) и учитывая сказанное в п. 2.5, мы получаем, что

$$\frac{\partial c_i}{\partial w_j} = -\operatorname{Res}_{w=w_i} \operatorname{Res}_{\xi=w_j} K(\xi, w), \quad i \neq j,$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \bar{w}_j} = -\operatorname{Res}_{w=w_i} \overline{\operatorname{Res}_{\xi=w_j} K(\xi, \bar{w})}, \quad i, j = 1, \ldots, n-3.$$

Соотношения (4.1) следуют из очевидного свойства симметричности ядра K: $K(\xi, w) = K(w, \xi)$.

Литература

1. *Klein F.* Neue Beiträge zur Riemann'schen Funktionentheorie//Math. Ann. 1883. Bd. 21. S. 141—218.
2. *Poincaré H.* Sur les groupes des équations linéaires//Acta Math. 1884. V. 4. P. 201—312. (Пер. в кн. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 3. М.: Наука, 1974. С. 145—234.)
3. *Poincaré H.* Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$//J. Math. pures et appl. 1898. 5e sér. V. 4. P. 157—230. (Пер. в кн. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 3. М.: Наука, 1974. С. 235—309).
4. *Polyakov A. M.* Quantum geometry of bosonic strings//Phys. Lett. 1981. V. 1038. № 3. P. 207—210.
5. *Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B.* Infinite conformal symmetry group in two-dimensional quantum field theory//Nucl. Phys. 1984. V. 241. № 2. P. 333—380.
6. *Зограф П. Г., Тахтаджян Л. А.* Действие уравнения Лиувилля — производящая функция для акцессорных параметров и потенциал метрики Вейля — Петерсона на пространстве Тейхмюллера//Функцион. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 3. С. 67—68.
7. *Зограф П. Г., Тахтаджян Л. А.* Об уравнении Лиувилля, акцессорных параметрах и геометрии пространства Тейхмюллера. 1. Римановы поверхности рода 0. Препринт ЛОМИ. Р-11-85. ЛОМИ: Ленинград, 1985.
8. *Hejhal D.* Monodromy groups and linearly polymorphic functions//Acta Math. 1975. V. 135. P. 1—55.
9. *Кра И.* Автоморфные формы и клейновы группы. М.: Мир, 1975.
10. *Lehner J.* Discontinuous groups and automorphic functions. Providence, 1964.
11. *Венков А. Б.* Об акцессорных коэффициентах уравнения Фукса второго порядка с вещественными особыми точками//Автоморфные функции и теории чисел. 1. Зап. научн. семин. ЛОМИ. Т. 129. Л.: Наука, 1983. С. 17—29.
12. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
13. *Ahlfors L., Bers L.* Riemann's mapping theorem for variable metrics//Ann. Math. 1960. V. 72. P. 385—404.
14. *Bers L.* Spaces of Riemann surfaces//Proc. ICM 1958. Cambridge, 1960.
15. *Weill A.* Sur les modules des surfaces de Riemann//Sém. Bourbaki, 1958.
16. *Ahlfors L.* Some remarks on Teichmuller's space of Riemann surfaces//Ann. Math. 1961. V. 74. P. 171—191.
17. *Wolpert S.* The topology and geometry of the moduli space of Riemann surfaces//Lect. Notes in Math. 1985. V. 1111. P. 431—451.
18. *Masur H.* The extension of the Weil — Peterson metric to the boundary of Teichmüller spaces//Duke Math. J. 1976. V. 32. P. 625—636.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию
1.IV.1986