МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 41, № 5 (1987)

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. С. Джумабаев

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$A(x) = 0, \tag{1}$$

где оператор A отображает банахово пространство X в линейное нормированное пространство Y и, вообще говоря, неограничен. Через $\mathcal{D}(A)$ и $R(A)$ обозначим соответственно области определения и значения оператора A. Возьмем $x^0 \in \mathcal{D}(A)$ и построим множества

$$S(x^0, r) = \{x = X\colon \|x - x^0\|_1 < r\},$$

$$U^0 = \{x \in \mathcal{D}(A)\colon \|A(x)\|_2 \leqslant \|A(x^0)\|_2 = u^0\},$$

здесь $\|\cdot\|_1$ — норма X, $\|\cdot\|_2$ — норма Y.

Исследуем вопросы существования сильного решения уравнения (1) и сходимости к нему итерационных процессов.

Определение. Элемент $x^* \in X$ называется *сильным решением* уравнения (1), если существует последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, сходящаяся к x^*, что $\|A(x_n)\|_2 \to 0$, когда $n \to \infty$.

Как известно, суть итерационных методов заключается в том, что решение сложной задачи находится как предел последовательности решений более простых задач. Так как для линейных уравнений применим принцип суперпозиции и часто удается найти явно решение, то в качестве простых задач, в основном, выбираются некоторые линеаризации исходного уравнения. Линеаризация

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1987

неограниченного оператора, естественно, приведет к неограниченным линейным операторам.

Введем понятие *линеаризатора* оператора A в точке $\hat{x} \in \mathcal{D}(A)$, обобщающее производную Фреше [1, с. 637] на неограниченные негладкие операторы.

Определение. Линейный оператор C: $X \to Y$ называется *линеаризатором* оператора A в точке $\hat{x} \in \mathcal{D}(A)$, если $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(C)$ и существуют числа $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta > 0$, что

$$\| A(x) - A(\hat{x}) - C(x - \hat{x}) \|_2 \leqslant \varepsilon \| x - \hat{x} \|_1$$

для всех $x \in \mathcal{D}(A)$, удовлетворяющих неравенству $\| x - \hat{x} \|_1 < \delta$.

Числа ε и δ называемые *константами линеаризатора* показывают, соответственно точность и радиус окрестности аппроксимации исходного оператора линейным оператором C в точке $\hat{x}$. Если оператор A в точке $\hat{x} \in \mathcal{D}(A)$ имеет производную Фреше, то она будет линеаризатором оператора A в этой точке. Однако в отличие от производной Фреше в определении линеаризатора не требуются: а) ограниченность оператора C и б) зависимость чисел ε и δ. Для производной Фреше $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ — пространству линейных ограниченных операторов из X в Y и $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\mathcal{D}(C)$ и $R(C)$ области определения и значения линеаризатора C_x не зависят от изменения x в $\mathcal{D}(A)$ и при этом $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(C) \cap S(x^0, r)$, $R(C) = Y$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть в каждой точке $x \in U^0$ оператор A имеет линеаризатор C_x с константами ε_x, δ_x, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) C_x *обратим и* $\| C_x^{-1} \|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leqslant \gamma_x \leqslant \gamma$,
2) $\varepsilon_x \cdot \gamma_x \leqslant \theta < 1$,
3) $\gamma_x \cdot \| A(x) \|_2 / \delta_x < K$, K — const,
4) $\gamma \cdot \| A(x^0) \|_2 / (1 - \theta) < r$.

Тогда уравнение (1) *в* $S(x^0, r)$ *имеет сильное решение и к нему сходится последовательность элементов* $\{x^{(n)}\} \subset U^0$, *определяемая по итерационному процессу:* $x^{(0)} = x^0$, $\alpha = \max\{1, K\}$,

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{1}{\alpha} C_{x^{(n)}}^{-1} \{A(x^{(n)})\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Доказательство. Введем обозначения: $C_n = C_{x^{(n)}}$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{x^{(n)}}$, $\gamma_n = \gamma_{x^{(n)}}$, $\delta_n = \delta_{x^{(n)}}$. По предполо-

жению $R(C) = Y$ и C_0 обратим, вследствие чего $C_0^{-1}\{A(x^0)\} \in \mathcal{D}(C)$. Так как $x^0 \in \mathcal{D}(C)$, а $\mathcal{D}(C)$ — линейное многообразие, то $x^{(1)}$, определяемый из (2) при $n = 0$, также принадлежит $\mathcal{D}(C)$. С другой стороны, учитывая неравенство

$$\| x^{(1)} - x^0 \|_1 \leqslant \gamma_0 \cdot u^0/\alpha < \gamma u^0/(1-\theta) < r, \tag{3}$$

получим принадлежность $x^{(1)}$ множеству $\mathcal{D}(A)$. Тогда справедливо соотношение

$$A(x^{(1)}) = A(x^{(1)}) - A(x^0) - C_0(x^{(1)} - x^0) + \\ + (1 - 1/\alpha) A(x^0). \tag{4}$$

По условию 3) $\delta_0 > \gamma_0 u^0/K \geqslant \gamma_0 u^0/\alpha$ и из (3) следует, что $\| x^{(1)} - x^0 \|_1 < \delta_0$. Используя определение линеаризатора из (4), имеем

$$\| A(x^{(1)}) \|_2 \leqslant \varepsilon_0 \| x^{(1)} - x^0 \|_1 + (1 - 1/\alpha) \| A(x^0) \|_2 \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_0 \gamma_0 \| A(x^0) \|_2/\alpha + (1 - 1/\alpha) \| A(x^0) \|_2 = \\ = \beta_0 \cdot \| A(x^0) \|_2, \tag{5}$$

где $\beta_0 = 1 - (1 - \varepsilon_0\gamma_0)/\alpha < 1$ и поэтому $x^{(1)} \in U^0$. При $n = 1$ из (2) получим $x^{(2)} \in \mathcal{D}(C)$ и

$$\| x^{(2)} - x^{(1)} \|_1 \leqslant \gamma_1 \cdot \| A(x^{(1)}) \|_2/\alpha \leqslant \gamma_1 \cdot \| A(x^0) \|_2/K < \delta_1.$$

Если учесть (3), (5) то

$$\| x^{(2)} - x^0 \|_1 \leqslant \| x^{(2)} - x^{(1)} \|_1 + \| x^{(1)} - x^0 \|_1 \leqslant \\ \leqslant \gamma(1 + \beta_0) \| A(x^0) \|_2/\alpha < \gamma \cdot \| A(x^0) \|_2/[\alpha(1 - \beta_0)] = \\ = \gamma \cdot \| A(x^0) \|_2/(1 - \varepsilon_0\gamma_0) \leqslant \gamma \cdot \| A(x^0) \|_2/(1 - \theta)$$

и

$$x^{(2)} \in \mathcal{D}(A).$$

Тогда из соотношения

$$A(x^{(2)}) = A(x^{(2)}) - A(x^{(1)}) - C_1(x^{(2)} - x^{(1)}) - \\ - (1 - 1/\alpha) A(x^{(1)})$$

следует неравенство

$$\| A(x^{(2)}) \|_2 \leqslant [1 - (1 - \varepsilon_1\gamma_1)/\alpha] \| A(x^{(1)}) \|_2 < \| A(x^0) \|_2,$$

т. е. $x^{(2)} \in U^0$. Аналогично устанавливаются принадлежность $x^{(n)}$ множеству U^0 и неравенства

$$\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \|_1 \leqslant \frac{1}{\alpha} \gamma_{n-1} \| A(x^{(n-1)}) \|_2, \tag{6}$$

$$\| A(x^{(n)}) \|_2 \leqslant \beta_{n-1} \| A(x^{(n-1)}) \|_2, \tag{7}$$

при всех $n = 3, 4, \ldots$ По условию 2) $\beta_{n-1} = 1 - (1 - \varepsilon_{n-1}\gamma_{n-1})/\alpha \leqslant \bar{\beta} = 1 - (1 - \theta)/\alpha < 1$. Поэтому из (6), (7), учитывая полноту X и предположение 4), получим, что

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x^*, \quad x^* \in S(x^0, r) \text{ и } \| A(x^{(n)}) \|_2 \to 0$$

при $n \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Доказанная теорема в терминах линеаризатора и его констант устанавливает достаточные условия существования сильного решения и сходимости к нему итерационного процесса (2). Приведем некоторые примеры линеаризаторов.

1. Пусть l некоторый линейный дифференциальный оператор, отображающий линейное многообразие $\mathscr{D}(l)$ пространства непрерывных на $\Omega \subset R_n$ функций $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$. Тогда l будет неограниченным оператором и поэтому не является производной Фреше. Однако l будет линеаризатором.

2. Если оператор A липшицево непрерывен в $\mathscr{D}(A) \subset X$, то любой линейный ограниченный оператор C: $X \to Y \supset R(A)$ будет линеаризатором оператора A в точке $x \in \mathscr{D}(A)$ и константы линеаризатора зависят от выбора C.

3. Пусть оператор A имеет вид $A(x) = Tx + F(x)$ где T: $X \to Y$ линейный неограниченный оператор, а $F(x)$ имеет производную Фреше в $S(x^0, r)$. Нетрудно проверить, что линейный оператор $T + F'(\hat{x})$ будет линеаризатором оператора A в точке $\hat{x} \in \mathscr{D}(T) \cap S(x^0, r) = \mathscr{D}(A)$ и $\mathscr{D}(T + F'(\hat{x})) = \mathscr{D}(T) \cap X = \mathscr{D}(T)$.

Рассмотрим уравнение

$$A(x) \equiv Tx + F(x) = 0. \tag{8}$$

Кроме предположений п. 3. требуем, чтобы $x^0 \in \mathscr{D}(T)$ и $R(T + F'(\hat{x})) = Y$ при $\hat{x} \in \mathscr{D}(A)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *для всех* $x \in U^0$ *линеаризатор* $T + F'(x)$ *ограниченно обратим* — $\| [T + F'(x)]^{-1} \|_{\mathscr{L}(Y, X)} \leqslant \gamma$;

2) $\| F'(x) - F'(\tilde{x}) \|_{\mathscr{L}(X, Y)} \leqslant L \| x - \tilde{x} \|_1, \ \forall x, \tilde{x} \in S(x^0, r)$,

3) $\dfrac{m}{L\gamma} + \gamma \dfrac{b_m}{b_0} u^0 \sum_{s=0}^{\infty} b_m^{2^s - 1} < r$, *здесь* $u^0 = \| Tx^0 + F(x^0) \|_2$, $b_0 = L\gamma^2 u^0/2$, $b_k = \beta_{k-1} b_{k-1}$, $\beta_{k-1} = 1 - 1/(4b_{k-1})$

($k = 1, 2, \ldots, m$), m — *такое неотрицательное число, что* $b_m < 1$, *а* $b_{m-1} \geqslant 1$.

Тогда последовательность элементов $\{x^{(k)}\} \subset U^0$, *определяемая по демпфированному методу Ньютона*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 1/\alpha_k \, [T + F'(x^{(k)})]^{-1} \, [Tx^{(k)} + F(x^{(k)})], \tag{9}$$

где $\alpha_k = 2b_k$ *при* $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ *и* $\alpha_k = 1$ *при* $k = m + 1, m + 2, \ldots$ *сходится к сильному решению уравнения* (8), *принадлежащее* $S(x^0, r)$.

Доказательство. Так как $x^0 \in \mathscr{D}(T)$,

$$[T + F'(x^0)]^{-1} \, [Tx^0 + F(x^0)] \in \mathscr{D}(T),$$

а $\mathscr{D}(T)$ — линейное многообразие, то $x^{(1)} \in \mathscr{D}(T)$. По предположениям теоремы

$$\| x^{(1)} - x^0 \|_1 \leqslant \gamma u^0/\alpha_0 = \gamma u^0/(2b_0) = 1/(L\gamma) < r,$$

т. е. $x^{(1)} \in \mathscr{D}(A)$. Из соотношения (4), где $C_0 = T + F'(x^0)$, $\alpha = \alpha_0$, используя оценку [2, с. 139]

$$\| F(x^1) - F(x^0) - F'(x^0)(x^{(1)} - x^0) \|_2 \leqslant \\ \leqslant L/2 \, \| x^{(1)} - x^0 \|_1^2 \tag{10}$$

получим, что

$$\| A(x^{(1)}) \|_2 \leqslant L/2 \, \| x^{(1)} - x^0 \|_1^2 + (1 - 1/\alpha_0) \, \| A(x^0) \|_2 \leqslant \\ \leqslant L\gamma^2 u^0 \, \| A(x^0) \|_2/(2\alpha_0^2) + (1 - 1/\alpha_0) \, \| A(x^0) \|_2 = \\ = \left[1 - \frac{1}{2b_0}\left(1 - \frac{L\gamma^2 u^0}{4b_0}\right)\right] \| A(x^0) \|_2 = \beta_0 \cdot \| A(x^0) \|_2.$$

Таким же образом устанавливаются принадлежность $x^{(k)}$ к $\mathscr{D}(T)$ при всех $k = 2, 3, \ldots$ и неравенства

$$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_1 \leqslant \frac{1}{2b_{k-1}} \gamma \, \| A(x^{(k-1)}) \|_2 \leqslant \frac{\gamma b_{k-1} u^0}{2b_{k-1} b_0} = \frac{1}{L\gamma},$$

$$\| A(x^{(k)}) \|_2 \leqslant \\ \leqslant \left[1 - \frac{1}{2b_{k-1}}\left(1 - \frac{L\gamma^2}{4b_{k-1}} \| A(x^{(k-1)}) \|_2\right)\right] \| A(x^{(k-1)}) \|_2 \leqslant \\ \leqslant \left[1 - \frac{1}{2b_{k-1}}\left(1 - \frac{L\gamma^2 b_{k-1} u^0}{4b_{k-1} b_0}\right)\right] \| A(x^{(k-1)}) \|_2 = \\ = \beta_{k-1} \cdot \| A(x^{(k-1)}) \|_2,$$

когда $k = 2, 3, \ldots, m$. Отсюда в силу условий 3) $x^{(k)} \in U^0$ и $\| A(x^{(k)}) \|_2 \leqslant \beta_{k-1} \cdot \beta_{k-2} \cdot \ldots \cdot \beta_0 \cdot \| A(x^0) \|_2 =$

$= b_k u^0/b_0$, при $k = \overline{1, m}$. Последующие приближения определяются по основному методу Ньютона—Канторовича и

$$\| x^{(m+1)} - x^0 \|_1 \leqslant \| x^{(m+1)} - x^{(m)} \|_1 + \| x^{(m)} - x^0 \|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \gamma b_m \| A(x^0) \|_2 / b_0 + m/(L\gamma) < r.$$

В равенстве

$$A(x^{(m+1)}) =$$
$$= A(x^{(m+1)}) - A(x^{(m)}) - [T + F'(x^{(m)})](x^{(m+1)} - x^{(m)}),$$

вновь применяя оценку (10), имеем

$$\| A(x^{(m+1)}) \|_2 \leqslant$$
$$\leqslant L/2 \| x^{(m+1)} - x^{(m)} \|_1^2 \leqslant (L/2)\gamma^2 \cdot \| A(x^{(m)}) \|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant (L/2)\gamma^2 b_m (u^0/b_0) \| A(x^{(m)}) \|_2 = b_m \cdot \| A(x^{(m)}) \|_2.$$

Если предположим, что

$$\| A(x^{m+s}) \|_2 \leqslant b_m^{2^s-1} \cdot \| A(x^{(m)}) \|_2,$$

то

$$\| A(x^{(m+s+1)}) \|_2 \leqslant$$
$$\leqslant L/2\gamma^2 \cdot \| A(x^{(m+s)}) \|_2^2 \leqslant L/2 b_m^{2^{s+1}-2} \cdot \| A(x^{(m)}) \|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant b_m^{2^{s+1}-2} \cdot L\gamma^2 b_m u^0 \| A(x^{(m)}) \|_2 / (2b_0) = b_m^{2^{s+1}-1} \cdot \| A(x^{(m)}) \|_2.$$

Поэтому справедливы оценки $\| A(x^{(m+s)}) \|_2 \leqslant b_m^{2^s-1} \cdot b_m u^0/b_0$,

$$\| x^{(m+s+1)} - x^{(m+s)} \|_1 \leqslant \gamma b_m^{2^s-1} \cdot b_m u^0/b_0, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда по условию 3) следует сходимость $\| A(x^{(m+s)}) \|_2$ к нулю, $x^{(m+s)}$ к $x^* \in S(x^0, r)$ при $s \to \infty$ и принадлежность $x^{(m+s)}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ множеству U^0. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Если предположить, что в теореме 2 T — нулевой оператор, Y — банахово пространство, $m = 0$, то получим известную теорему Мысовских [1, с. 687] о сходимости основного метода Ньютона—Канторовича.

Так как числа L, γ, m заранее неизвестны и зависят от r, то при применении теорем аналогичных теореме 2 возникают трудности, связанные с проверкой условий 3). Следующая теорема упрощает условия 3), сведя его к

проверке одного неравенства между γ и r при выбранном x^0.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *для всех* $x \in U^0$ *линеаризатор* $T + F'(x)$ *ограниченно обратим* — $\| [T + F'(x)]^{-1} \|_{\mathscr{L}(Y, X)} \leqslant \gamma$,

2) *производная Фреше* — $F'(x)$ *равномерно непрерывна в* $S(x^0, r)$,

3) $\gamma \cdot \| A(x^0) \|_2 < r$.

Тогда существуют числа $\alpha_n \geqslant 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *что последовательность элементов* $\{x^{(n)}\} \subset U^0$, *определяемая по итерационному процессу*

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - 1/\alpha_n [T + F'(x^{(n)})]^{-1} [Tx^{(n)} + F(x^{(n)})] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

сходится к сильному решению уравнения (8), *принадлежащее* $S(x^0, r)$.

Доказательство. Из условия 3) следует существование чисел $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих неравенствам

$$\varepsilon_0 \gamma < 1, \quad \gamma \cdot \| A(x^0) \|_2 / (1 - \varepsilon_0 \gamma) + \varepsilon < r.$$

По условию 2) найдется $\delta_0 > 0$, что $\| F'(x) - F'(\tilde{x}) \|_{\mathscr{L}(X, Y)} < \varepsilon_0$, если только $\| x - \tilde{x} \|_1 < \delta_0$, $x, \tilde{x} \in S(x^0, r)$. Применяя теорему о среднем, имеем

$$\begin{aligned} \| A(x) - A(\tilde{x}) - [T + F'(x)](x - \tilde{x}) \|_2 &= \\ = \| F(x) - F(\tilde{x}) - F'(x)(x - \tilde{x}) \|_2 &= \\ = \| S_0^1 \{F'[x + t(x - \tilde{x})] - F'(x)\} \, dt \, (x - \tilde{x}) \|_2 &< \\ < \varepsilon_0 \| x - \tilde{x} \|_1 . \end{aligned}$$

Число α_0 берем равным $\max\{1, \gamma u^0/\delta_0\}$, тогда аналогично (3), (5)

$$\| x^{(1)} - x^0 \|_1 < \delta_0, \quad \| A(x^{(1)}) \|_2 \leqslant \beta_0 \cdot \| A(x^0) \|_2 .$$

Так как $\beta_0 = 1 - (1 - \varepsilon_0 \gamma)/\alpha_0 < 1$, то можно выбрать целое положительное число ν, удовлетворяющее неравенству

$$\gamma u^0 \beta_0^\nu / (1 - \varepsilon_0 \gamma) \leqslant \varepsilon .$$

Далее, α_n возьмем равным α_0, когда $n = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, и единице, когда $n = \nu, \nu + 1, \ldots$ Теперь нетрудно проверить справедливость оценок

$$\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \|_1 \leqslant \gamma / \alpha_0 \| A(x^{(n-1)}) \|_2 ,$$
$$\| A(x^{(n)}) \|_2 \leqslant \beta_0 \cdot \| A(x^{(n-1)}) \|_2 , \quad n = 1, 2, \ldots, \nu ;$$

$$\| x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)} \|_1 \leqslant \gamma \cdot \| A(x^{(\nu-1)}) \|_2,$$
$$\| A(x^{(k)}) \|_2 \leqslant \varepsilon_0 \gamma \| A(x^{(k-1)}) \|_2, \quad k = \nu + 1, \nu + 2, \ldots,$$

откуда и из принципа выбора чисел ε_0, ε, ν следует, что все $x^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ лежат в U^0, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x^*$, $x^* \in S(x^0, r)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \| A(x^{(n)}) \|_2 = 0$. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Из теоремы 3, в случае когда T — нулевой оператор, Y — банахово пространство, вытекает локальный вариант теоремы Адамара [3, с. 139] о существовании решений нелинейных уравнений.

В приложении наиболее интересным является случай, когда T — дифференциальный оператор. Рассмотрим в $\Omega = (0, \omega) \times (0, t_1)$ краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t, u), \qquad a - \text{const} < 0, \tag{11}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad u(0, t) = 0, \quad t \in [0, t_1]. \tag{12}$$

Введя соответствующие, в смысле Л. В. Канторовича, пространства U, V [1, с. 709] задачу (11), (12) можно свести к нелинейному операторному уравнению с ограниченным оператором. Однако, как было отмечено Л. В. Канторовичем [1, с. 713], при этом возникают трудности, связанные с оценкой нормы оператора обратного к производной Фреше, так как для этого нужно оценить решение и все его производные, входящие в дифференциальный оператор через правую часть соответствующего линейного уравнения.

Взяв за X пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $u(x, t)$, удовлетворяющих краевым условиям (12) с нормой $\| u(x, t) \|_1 = \max\limits_{\overline{\Omega}} | u(x, t) |$, за Y — пространство непрерывных по t и бесконечно дифференцируемых по x на Ω функций $\tilde{f}(x, t)$ с нормой $\| \tilde{f}(x, t) \|_2 = \sup\limits_{\Omega} | \tilde{f}(x, t) |$, краевую задачу (11), (12) запишем в виде $Tu + F(u) = 0$, $u \in X$, где оператор $T = \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}$ с областью определения $\mathcal{D}(T)$ — множество непрерывно дифференцируемых по t и бесконечно дифференцируемых по x функций на Ω, отображает X в неполное линейно нормированное пространство Y и не ограничен, $F(u) = -f(x, t, u(x, t))$. Здесь для оценки нормы оператора, обратного

к линеаризатору $T + F'(u)$, достаточно иметь оценку лишь самого решения линейного уравнения

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - a\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - c(x, t)\tilde{u} = \tilde{f}(x, t), \qquad \tilde{u}(x, t) \in X, \quad (13)$$

где $\tilde{f}(x, t) \in Y$, $c(x, t) = f'_u(x, t, u(x, t))$. Если $c(x, t) \in Y$ и $c(x, t) \leqslant 0$, то уравнение (13) для любого $\tilde{f}(x, t) \in Y$ имеет единственное решение $\tilde{u}(x, t) \in X \cap \mathcal{D}(T)$ и для него справедлива оценка $\|\tilde{u}(x, t)\|_1 \leqslant \frac{\omega}{|a|}\|\tilde{f}(x, t)\|_2$, т. е. $R(T + F'(u)) = Y$ и $\|[T + F'(u)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leqslant \frac{\omega}{|a|}$. Возьмем за $u^{(0)}$ нулевую функцию и, применяя теорему 3, получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть функция $f(x, t, u)$ в области $H = \Omega \times (-r, r)$ непрерывна по t и бесконечно дифференцируема по x и u, причем $f'_u(x, t, u)$ непрерывна по t, бесконечно дифференцируема по x и равномерно непрерывна по u. Тогда при выполнении неравенств:*

$$\text{а) } f'_u(x, t, u) \leqslant 0, \qquad \text{б) } \frac{\omega}{|a|}|f(x, t, 0)| < r$$

краевая задача (11), (12) имеет сильное решение $u^*(x, t)$, принадлежащее $S(0, r)$.

Пример. На $\Omega = (0, 1) \times (0, \infty)$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} + u^6 - u^5 + \frac{3}{4}\sin(xt), \qquad (14)$$

$$u(x, 0) = 0, \ x \in [0, 1], \quad u(0, t) = 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (15)$$

По теореме 4 краевая задача (14), (15) в шаре $S(0, 5/6)$ имеет сильное решение.

Институт математики и механики
АН КазССР

Поступило
28.05.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
[2] Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
[3] Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.