М.С.Ермаков

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

I. Введение.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ выборка независимых случайных величин с плотностью $f(x-\theta)$, зависящей от неизвестного параметра сдвига $\theta \in R^1$. Функция $f(x)$ дифференцируема всюду за исключением некоторых точек, в которых она имеет особенности первого или второго рода порядка $0 \leq \alpha \leq 1$. Ограничения, которым удовлетворяет функция $f(x)$ такие же, как ограничения, налагаемые на плотность в главе УI в [8].

Асимптотическое поведение статических оценок параметра θ в значительной степени определяется поведением функционалов от процесса $Z(u)$, где случайный процесс $Z(u)$ является предельным для случайных функций

$$Z_n(u) = \prod_{j=1}^{n} \frac{f(X_j - \theta - u/n^{1/(1+\alpha)})}{f(X_j - \theta)} .$$

Исследованию свойств некоторых функционалов от процесса Z и посвящена настоящая статья. Результаты пункта 3 позволяют доказать существование предельного распределения у оценок максимального правдоподобия (см. [I], [8]). Результаты пункта 4 применяются к вопросам последовательного оценивания.

2. Задание процесса $Z(u)$.

Дадим описание предельного процесса $Z(u)$. Согласно [3], [8]

$$Z(u) = \exp\{Y(u)\} = \exp\Big\{\sum_{k=1}^{r} Y^{1k}(u) - \sum_{j=1}^{l} Y^{2j}(u)\Big\},$$

где процессы Y^{1k} и Y^{2j} $(k \in \overline{1,r};\ j \in \overline{1,l})$ независимы и получаются каждый за счет особенности первого или второго рода соответственно в точках x_k и y_j.

Процессы $Y^{2j}(u)$ гауссовские, обладают первыми стационарными приращениями. Они задаются параметрами

$$EY^{2j}(u) = -h(y_j)\, c_j |u|^{1+\alpha}$$

$$cov(Y^{2j}(u), Y^{2j}(v)) = h(y_j)c_j\left[|u|^{1+\alpha} + |v|^{1+\alpha} - |u-v|^{1+\alpha}\right]$$

где c_j - константа. Как следует из результатов работы [4] процесс $Y_1^{2j}(u) = Y^{2j}(u) - EY^{2j}(u)$ можно задать следующим образом

$$Y_1^{2j}(u) = c_{2j}\int_{-\infty}^{u}(|u-\rho|^{\beta} - |\rho|^{\beta})dw(\rho) - c_{2j}\int_{0}^{u}|\rho|^{\beta}dw(\rho).$$

В этой формуле считается, что $\int_0^u |\rho|^{\beta}dw(\rho) = \int_u^0 |\rho|^{\beta}dw(\rho)$, c_{2j} - константа. Построим процесс Y^{2k}. Зададим пуассоновскую случайную меру ν на R^1, принимающую на непересекающихся борелевских множествах независимые целые неотрицательные значения и имеющую параметры

$$E\nu^k([a,b]) = \frac{1}{1+\alpha}p_k(x_k)\left||b|^{1+\alpha} - |a|^{1+\alpha}\right| \quad \text{при } b<0$$

$$E\nu^k([a,b]) = \frac{1}{1+\alpha}q_k(x_k)\left||b|^{1+\alpha} - |a|^{1+\alpha}\right| \quad \text{при } a>0$$

Тогда процесс Y^{1k} представим в виде

$$Y^{1k}(u) = \alpha\int_0^{\infty}\ln\left|1-\frac{u}{x}\right|\left[\nu(dx) - q_k(x_k)|x|^{\alpha}dx\right] +$$

$$+\alpha\int_{-\infty}^{0}\ln\left|1-\frac{u}{x}\right|\left[\nu(dx) - p_k(x_k)|x|^{\alpha}dx\right] +$$

$$+\int_0^u \ln\frac{p_k(x_k)}{q_k(x_k)}\nu(dx) - \gamma_k(u).$$

Здесь $\gamma_k(u)$ некоторая функция и считается, что $\int_0^u \nu(dx) = -\int_u^0 \nu(dx)$

Отметим интересную особенность процессов $Y^{1k}_{(u)}$ и $Y^{2j}_{(u)}$ Их значения являются значениями в точке нуль производных Радона-

Находим $d\mu_u^j/d\mu^j$ и $d\nu_u^k/d\nu^k$ соответственно, где распределение атомов случайной меры ν_u^k совпадает с распределением атомов меры ν^k, сдвинутых вдоль вещественной прямой на u влево, а мера μ_u^j задается следующим образом

$$d\mu_u^j(v) = c(u-v)|u-v|^{\beta} dv + dW(u-v)$$

$$c(x) = \begin{cases} h(y_j)\,a(y_j) & \text{при } x > 0 \\ h(y_j)\,b(y_j) & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Таким образом предельное распределение байесовских оценок и оценок максимума правдоподобия совпадает соответственно с распределениями оптимальных эквивариантных оценок и оценок максимума правдоподобия параметра u для семейства мер $\{\mu_u^j, \nu_u^k\}$.

3. <u>Единственность точки достижения глобального максимума процессом</u> $Z(u)$.

Доказательство этого утверждения позволяет сформулировать теорему 6.4 в [8] (см. также [1]). Докажем его.

ЛЕММА 3.1. Пусть дан гауссовский случайный процесс $Y(t) = \int_a^{a+1} c(t-\rho)\,dW(\rho)$. Тогда существует гауссовский процесс $X(t)$ с ковариационной матрицей

$$F(t_1,t_2) = EX(t_1)X(t_2) = \int_a^{a+1} c(t_1-\rho)c(t_2-\rho)\,d\rho - \int_a^{a+1} c(t_1-\rho)\,d\rho \int_a^{a+1} c(t_2-\rho)\,d\rho$$

и независимая от него нормальная случайная величина ξ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, что распределение $X(t) + \xi \int_a^{a+1} c(t-\rho)\,d\rho$ совпадает с распределением Y.

<u>Доказательство</u>. Достаточно показать, что матрица $F = \{F(t_i,t_j)\}_{i,j=1}^{n}$ положительно определена. Определим случайный процесс $\eta(t)$, для которого F будет ковариационной матрицей. Положим $\eta(t) = c(t-\zeta)$, где случайная величина ζ имеет равномерное распределение на интервале $[a, a+1]$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть дана функция $x(v)\colon R^1 \to R^1$ и семейство функций $\{g_a(v)\}_{a\in I}$, $g_a(v)\colon R^1 \to R^1$, $I \subset R^1$. Пусть

функции $g_a(v)$ удовлетворяют следующему условию: $g_a(v)-g_a(u)>g_b(v)-g_b(u)$ при $a>b$; $v>u$. Тогда число функций $g_a(v)=x(v)+g_a(v)$, достигающих глобального максимума в двух точках, не более чем счетно.

Замечание. Утверждение леммы останется справедливым, если потребовать, чтобы $g_a(v)-g_a(u)<g_b(v)-g_b(u)$ при $a>b$, $v>u$.

Доказательство. Предположим, что функции $g_{a_1}, g_{a_2} (a_1<a_2)$ достигают максимума в двух точках u_1, u_2 и W_1, W_2 соответственно $(u_1<u_2,\ W_1<W_2)$. Покажем, что тогда $u_2<W_1$ и следовательно интервалы $(u_1,u_2),(W_1,W_2)$ не пересекаются. Предположим, $W_1<u_2$. Тогда

$$x(W_1)+g_{a_1}(W_1)\leqslant x(u_2)+g_{a_1}(u_2)$$

$$g_{a_2}(W_1)-g_{a_1}(W_1)<g_{a_2}(u_2)-g_{a_1}(u_2)$$

и следовательно $x(W_1)+g_{a_2}(W_1)<x(u_2)+g_{a_2}(u_2)$ и мы приходим к противоречию. Так как вещественную прямую можно покрыть самое большее счетным числом непустых непересекающихся интервалов, то число индексов a для которых функция y_a имеет две точки максимума не более чем счетно.

Предположим противное. Пусть процесс $Z(u)$ с вероятностью $\varepsilon>0$ достигает глобального максимума в двух точках некоторого интервала $[-a,a]$, $a>0$. Рассмотрим случай, когда плотность $f(x)$ имеет особенности второго рода. Из задания процесса $Z(u)$ и леммы 3.I следует, что случайный процесс $Y(v)$ представим в виде $Y(v)=\xi\varphi(v)+X(v)$, где ξ - гауссовская случайная величина, $\varphi(v)=\int_{-a-1}^{-a}(|v-\rho|^{\beta}-|\rho|^{\beta})d\rho$, $X(v)$ - случайный процесс независящий от ξ. Согласно теореме Фубини найдется реализация $y(v)$ процесса $X(v)$, что случайный процесс $\xi\varphi(v)+y(v)$ с положительной вероятностью будет иметь глобальный максимум на $[-a,a]$ по крайней мере в двух точках, а это противоречит лемме 3.2 для $g_\xi(v)=\xi\varphi(v)$.

Рассмотрим ситуацию, когда плотность имеет особенность первого рода и $q_1(x_1)>0$. Случай $q_1(x_1)=0$ и $p_1(x_1)\neq 0$ разбирается аналогично. Мы имеем $Y(u)=Y''(u)+X(u)$, где $Y''(u)$ и $X(u)$ независимые случайные процессы. Возьмем промежуток $[c,d]$ такой, что $P(\nu([c,d])>0)>1-\varepsilon$ и $c>a$. Представим $Y''(u)$, как сумму двух независимых случайных процессов

$$\xi_1(u)=\int_c^d \varphi(u,s)\nu(ds) \quad \text{и} \quad \xi_2(u)=\int_{-\infty}^{c}\varphi(u,s)\nu(ds)+\int_d^{\infty}\varphi(u,s)\nu(ds)-\gamma(u)$$

Мы можем так зафиксировать реализацию процесса $X(u)+\xi_2(u)=x(u)$ что с вероятностью $\delta>0$ случайный процесс $x(u)+\xi_2(u)$ будет достигать глобального экстремума в двух точках и $\nu([c,d])>0$. Тогда по соображениям непрерывности существует такой параллелепипед $[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_k,b_k]=\Pi_k$, что для любой точки $(V_1,\ldots,V_k)\in\Pi_k$ функция $x(u)-\sum_{i=1}^{k}\varphi(u,V_i)$ имеет глобальный максимум в двух точках. Значит, если взять $g_{V_1}(u)=\varphi(u,V_1)$ и зафиксировать $V_2,\ldots,V_k$, то, используя замечание к лемме 3.2, придем к противоречию. Итак процесс $Z(u)$ с вероятностью единица достигает глобального максимума в единственной точке.

4. <u>Преимущество последовательного оценивания</u>.

В этом пункте будет изучено одно свойство процесса $Z(u)$, которое позволит нам сравнить эффективности планов последовательного оценивания и оценивания для фиксированного объема выборки, когда объем выборки велик. Изложим сначала статистическую постановку задачи.

Пусть $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ последовательность независимых случайных величин. Пусть $[\tau,d_k]$ план последовательного оценивания, где τ - момент остановки, $d_k=d_k(X_1,\ldots,X_k)$, $k=1,2,\ldots$ - последовательность оценок. Будем называть оценку d_k эквивариантной, если при всех вещественных c

$$d_k(X_1+c,\ldots,X_k+c)=d_k(X_1,\ldots,X_k)+c$$

Момент остановки τ назовем эквивариантным, если для любого натурального n событие $\{\tau=n\}$ измеримо относительно случайных величин $X_n-X_1,\ldots,X_2-X_1$. Если оценки d_n и момент остановки τ эквивариантны, то будем говорить, что план последовательного оценивания $[\tau,d_k]$ эквивариантный.

Выберем функцию потерь, определяющую ущерб от оценки d параметра θ равной $r_a(d,\theta)=|d-\theta|^a$. Тогда для эквивариантного плана $T=[\tau,d]$ функция риска для функции потерь $|x-\theta|^a$ при истинном значении параметра θ_0 есть

$$R_a(T,\theta)=E_\theta|d_\tau(X_1,\ldots,X_\tau)-\theta|^a=R_a(T,0)=R_a(T)$$

Введем в рассмотрение случайные процессы

$$z_k(u)=\prod_{i=1}^{k}\frac{f(X_i,\theta_0+u/n^{1/(1+\alpha)})}{f(X_i,\theta_0)},\quad \rho_k(u)=\frac{z_k(u)}{\int_{-\infty}^{\infty} z_k(u)\,du}$$

$$\rho(u)=z(u)\Big/\int_{-\infty}^{\infty} z(u)\,du$$

и нормированную оценку Питмана $\tilde{t}_k$, задаваемую соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{t}_k-u|^a\rho_k(u)\,du=\inf_{t\in R^k}\int_{-\infty}^{\infty}|t-u|^a\rho_k(u)\,du.$$

Определим случайные величины Δ_k равенством

$$\Delta_k=k^{a/(1+\alpha)}b_k=\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{t}_k-u|^a\rho_k(u)\,du.$$

Приведем следующие результаты, доказательство которых можно найти или легко получить из результатов работ [2] и [I].

ЛЕММА 4.I. Если $[\tau,d_k]$ произвольный эквивариантный план, а $\tilde{t}_k$ – оценка Питмана относительно функции потерь R_a, то

$$E_\theta|d_\tau-\theta|^a n^{a/(1+\alpha)}\geq E_\theta|\tilde{t}_\tau-\theta|^a$$

ЛЕММА 4.2. Если выполнены условия работы [I], то при $n\to\infty$ каково бы ни было истинное значение параметра θ, распределение случайных величин Δ_n сходится к распределению случайной величины

$$\Delta=\inf_t\int_{-\infty}^{\infty}|t-u|^a\rho(u)\,du$$

и при всяком $s>0$

$$\lim_n E\Delta_n^s=E\Delta^s$$

По аналогии с работой [2] построим две последовательности моментов остановки τ_n^1 и τ_n^2

$$\tau_n^1=\min\{k: b_k<(c/n)^{a/(1+\alpha)}\},\text{ где } c=E\Delta^{(1+\alpha)/a}$$

$$\tau_n^2=\min\{k: b_k<(kc^a/n^a)^{1/(1+\alpha)}\},\text{ где } c=E\Delta^{(1+\alpha)/(a+1)}$$

На справедливость следующего утверждения мне указали И.А.Ибрагимов и Р.З.Хасьминский.

ТЕОРЕМА 4.I. (И.А.Ибрагимов, Р.З.Хасьминский). Для последовательностей планов $[\tau_n^1, \tilde{t}_k]$, $[\tau_n^2, \tilde{t}_k]$ и любой последовательности эквивариантных оценок $d_n = d_n(X_1, \dots, X_n)$ при $a > 1+\alpha$ и $n \to \infty$ выполняется

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} E_\theta \tau_n^1 \leq 1$$

$$\overline{\lim} \frac{E_\theta |\tilde{t}_{\tau_n^1} - \theta|^a}{E_\theta |d_n - \theta|^a} \leq \frac{E^{a/(1+\alpha)} \Delta}{E\Delta}$$

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} E_\theta \tau_n^2 \leq 1 \tag{4.2}$$

$$\overline{\lim} \frac{E_\theta |\tilde{t}_{\tau_n^2} - \theta|^a}{E_\theta |d_n - \theta|^a} \leq \frac{E^{\frac{a+1}{1+\alpha}} \Delta^{(1+\alpha)/(1+a)}}{E\Delta}$$

Доказательство неравенств 4.I, 4.2 такое же, как и доказательство их аналогов в теореме 3.I в [2]. Однако теорема 4.I интересна лишь если удается доказать, что правые части в 4.I и 4.2 строго меньше 1. Это, например, не так если семейство распределений удовлетворяет условиям локальной асимптотической нормальности, хотя аналоги 4.2 можно сформулировать и для этой ситуации.

ТЕОРЕМА 4.2. В постановке задачи теоремы 4.I имеет место:

$$\frac{E^{a/(1+\alpha)} \Delta^{(1+\alpha)/a}}{E\Delta} < 1 \tag{4.3}$$

$$\frac{E^{(a+1)/(1+\alpha)} \Delta^{(1+\alpha)/a}}{E\Delta} < 1 \tag{4.4}$$

<u>Доказательство</u>. Для доказательства неравенств в 4.3, 4.4 нужно показать невырожденность распределения Δ. Это и будет делаться.

Предположим противное, что распределение Δ вырождено. Рассмотрим сначала случай, когда плотность имеет особенность второго рода. Тогда по лемме 3.I процесс $Y(u)$ можно представить как сумму трех независимых случайных процессов:

$$Y(u)=\xi_1 c_{21}\int_{b}^{((b+1)\wedge u)\vee b} x^{\beta}dx+\xi_2 c_{21}\int_{b+1}^{(b+2)\wedge u\vee(b+1)} x^{\beta}dx+X(u)=$$

$$=\xi_1\varphi_1(u)+\xi_2\varphi_2(u)+X(u),$$

где $b>0$, а ξ_1,ξ_2 - нормальные случайные величины с нулевым математическим ожиданием, φ_1,φ_2 - возрастающие функции. Случайный процесс $X(u)$ не зависит от ξ_1,ξ_2 и состоит из оставшейся части процесса $Y^{21}(u)$ и процессов, порожденных другими особенностями. Из вырожденности распределения Δ вытекает, что для почти всех $\xi_1,\xi_2\in R^1$ при некоторой фиксированной реализации процесса $X(u)$ имеет место равенство:

$$\Delta=\frac{\int|\tilde{t}-u|^{a}Z(u)du}{\int Z(u)du}=\frac{\int|t-u|^{a}e^{X(u)+\xi_1\varphi_1(u)+\xi_2\varphi_2(u)}du}{\int e^{X(u)+\xi_1\varphi_1(u)+\xi_2\varphi_2(u)}du}=const$$

Устремляя ξ_K к $-\infty$ получаем

$$\Delta=const=\inf_t\left(\int_{-\infty}^{b+1}|t-u|^{a}\exp(X(u)+\xi_1\varphi_1(u))du\Big/\int_{-\infty}^{b+1}\exp(X(u)+\xi_1\varphi_1(u))du\right),$$

так как $\varphi_2(u)=0$ для $u<b+1$. Устремляя ξ_1 к $+\infty$ получаем, что $\tilde{t}\to b+1$ и $\Delta\to 0$, так как функция $\varphi_1(u)$ возрастающая и неотрицательная. Мы пришли к противоречию.

Перейдем к случаю, когда плотность имеет особенность первого рода и $\rho_1(x_1)=0$ (случай $q_1(x_1)=0$ исследуется аналогично). Тогда процесс $Y^{11}(u)$ имеет вид

$$Y^{11}(u)=\begin{cases}\alpha\int_0^{\infty}\ln\left|1-\frac{u}{x}\right|\left[\nu(dx)-q_1(x_1)|x|^{\alpha}dx\right]+\gamma(u) & \text{при } \nu(0,u)<1\\ -\infty \quad \text{при} \quad \nu(0,u)\geq 1\end{cases}$$

Рассмотрим события, при которых случайная мера ν имеет атом на $(0,+\infty)$ близкий к нулю, затем на достаточно большом интервале $[0,a]$ не имеет атомов вообще,

$g_a(u)=\alpha\int\limits_a^{\infty}\ln\left|1-\frac{u}{x}\right|\left[\nu(dx)-q_1(x_1)|x|^{\alpha}dx\right]+\gamma(u)<const$ равно-

по a и $u\in(-\infty,+\infty)$, и $g_a(u)>\varepsilon$ равномерно по a и $u\in[0,\delta]$. Учитывая что

$$\lim_{a\to\infty}(-1)\alpha q_1(x_1)\int\limits_0^{a}\ln\left|1-\frac{u}{x}\right|x^{\alpha}dx=\begin{cases}+\infty & \text{для } u>0\\ -\infty & \text{для } u<0\end{cases}$$

нетрудно видеть, что на указанных множествах событий Δ может принимать значения сколь угодно близкие к 0 и следовательно не равна константе.

Рассмотрим ситуацию, когда плотность с особенностями первого рода и $p_1(x_1)q_1(x_1)\neq 0$. Возьмем измеримое множество E являющееся объединением интервалов, содержащих каждую рациональную точку вещественной прямой и такое, что $\int\limits_E|x|^{\alpha}dx<\infty$. Пусть $F=R^1\setminus E$. Тогда случайную меру ν можно представить как сумму двух независимых случайных мер $\nu=\nu_E+\nu_F$, где случайная мера ν_E может иметь атомы только на множестве E, а мера ν_F – только на множестве F.

Процесс $Y(u)$ представим в виде

$$Y(u)=\int\limits_{[0,+\infty)\cap E}\varphi(u,x)\left[\nu(dx)-q_1(x_1)|x|^{\alpha}dx\right]+$$

$$+\int\limits_{(-\infty,0]\cap E}\varphi(u,x)\left[\nu(dx)-p_1(x_1)|x|^{\alpha}dx\right]+$$

$$+\int\limits_{[0,+\infty)\cap F}\varphi(u,x)\left[\nu(dx)-q_1(x_1)|x|^{\alpha}dx\right]+$$

$$+\int\limits_{(-\infty,0]\cap F}\varphi(u,x)\left[\nu(dx)-p_1(x_1)|x|^{\alpha}dx\right]+X(u)=Y_E(u)+Y_F(u)+X(u),$$

где $\varphi(u,x)=\alpha\ln\left|1-\frac{u}{x}\right|+\ln\frac{p_1(x_1)}{q_1(x_1)}\,\mathrm{sign}\,u(\mathrm{sign}\,u+\mathrm{sign}\,x)/2$

Из оценки

$$P(\max_{|u|>H}Z_n(u)>\exp\{-cH^{1+\alpha}\}<B\exp\{-cH^{1+\alpha}\}$$

приведенной на странице 89 в [I] следует, что существуют константы B и C, что на множестве событий положительной вероятности

$$exp\left\{Y_F(u)+x(u)\right\}<B\,exp\left\{-c|u|^{(1+\alpha)}\right\} \qquad (4.5)$$

следовательно существует такая фиксированная реализация случайного процесса $X_F(u)=X(u)+Y_F(u)$, удовлетворяющая 4.5, что для почти всех реализаций случайного процесса Y_E величина Δ от суммарного процесса $Y_E(u)+X_F(u)$ равна константе. Мера Y_E с положительной вероятностью может иметь атомы $z_1,\dots,z_k$ в сколь угодно малой окрестности любой точки z и не иметь атомов больше нигде. Поэтому нам достаточно показать, что функция

$$\Delta=\Delta(k,z)=\inf_t\int|t-u|^a exp\{X_F(u)+k\varphi(u,z)\}du\Big/\int exp\{X_F(u)+k\varphi(u,z)\}du$$

не равна константе. Предположим противное. Мы имеем

$$\Delta(k,z)=\inf_t\Big[\int_z^\infty|t-y|^a|z-y|^{k\alpha}Z_F(y)dy+c^k\int_{-\infty}^z|t-y|^a|z-y|^{k\alpha}Z_F(y)dy\Big]\Big/$$

$$\Big[\int_z^\infty|z-y|^{k\alpha}Z_F(y)dy+c^k\int_{-\infty}^z|z-y|^{k\alpha}Z_F(y)dy\Big]=\frac{h(\tilde{t}(z,k),z,k)}{\ell(z,k)},$$

где $c=p_1(x_1)/q_1(x_1)$, $Z_F(y)=exp\{Y_F(u)\}$. Нетрудно видеть, что $\tilde{t}(z,k)$ при фиксированном k является непрерывной ограниченной функцией от z. Поэтому существует точка x_k, в которой выполняется равенство $x_k=\tilde{t}(x_k,k)$. Эта точка задается соотношением

$$\int_{x_k}^\infty|x_k-y|^{a+k\alpha-1}Z_F(y)dy=c^k\int_{-\infty}^{x_k}|x_k-y|^{a+k\alpha-1}Z_F(y)dy \qquad (4.6)$$

Нетрудно видеть, что при $k\alpha>1$ в точке (x_k,x_k,k) функция

$$h(t,z,k)=\int_z^\infty|t-y|^a|z-y|^{k\alpha}Z_F(y)dy+c^k\int_{-\infty}^z|t-y|^a|z-y|^{k\alpha}Z_F(y)dy$$

достигает минимального значения по z и t. Раз Δ постоянное, то в точке (x_k,k) достигает минимального значения по z и функция $\ell(z,k)$. Поэтому точка x_k является решением уравнения

$$\int_{z}^{\infty}|z-y|^{k\alpha-1}\mathcal{Z}_F(y)\,dy = c^k\int_{-\infty}^{z}|z-y|^{k\alpha-1}\mathcal{Z}_F(y)\,dy. \tag{4.7}$$

Рассмотрим случай, когда существует бесконечная подпоследовательность последовательности $\{x_k\}_1^\infty$ ограниченная или стремящаяся к $-\infty$ (случай $+\infty$ рассматривается аналогично). Для простоты обозначений будем считать, что такой подпоследовательностью можно взять саму $\{x_k\}_{k=1}^\infty$. Для всякого $A>0$

$$\frac{\int_{x_k}^{x_k+A}|x_k-y|^{k\alpha+a}\mathcal{Z}_F(y)\,dy}{\int_{x_k+A}^{\infty}|x_k-y|^{k\alpha+a}\mathcal{Z}_F(y)\,dy}\to 0,\quad k\to\infty, \tag{4.8}$$

так как $\mathcal{Z}_F$ имеет неограниченный носитель. Кроме того для любого $b>0$ при $k\to\infty$

$$\frac{c^k\int_{x_k-A}^{x_k}|x_k-y|^{k\alpha+a}\mathcal{Z}_F(y)\,dy}{\int_{x_k}^{\infty}|x_k-y|^{k\alpha+a}\mathcal{Z}_F(y)\,dy} < \frac{c^kA\int_{x_k-A}^{x_k}|x_k-y|^{k\alpha+a-1}\mathcal{Z}_F(y)\,dy}{\int_{x_k+ba}^{\infty}|x_k-y|^{k\alpha+a}\mathcal{Z}_F(y)\,dy} <$$

$$< \frac{1}{b}\,\frac{c^k\int_{x_k-A}^{x_k}|x_k-y|^{a+k\alpha-1}\mathcal{Z}_F(y)\,dy}{\int_{x_k+bA}^{\infty}|x_k-y|^{a+k\alpha-1}\mathcal{Z}_F(y)\,dy} < \frac{1}{b}+o(1). \tag{4.9}$$

Последнее неравенство следует из 4.6 и

$$\int_{x_k}^{x_k+bA}|x_k-y|^{k\alpha+a-1}\mathcal{Z}_F(y)\,dy\Big/\int_{x_k+bA}^{\infty}|x_k-y|^{k\alpha+a-1}\mathcal{Z}_F(y)\,dy\to 0,\ k\to\infty$$

Оценки аналогичные 4.8, 4.9 справедливы, когда вместо степени $k\alpha+a$ стоит степень $k\alpha$, поскольку имеет место 4.7. Таким образом для доказательства теоремы достаточно показать неограниченность

$$\frac{\int\limits_{x_k+A}^{\infty}|x_k-y|^{k\lambda+a}z_F(y)\,dy+c^k\int\limits_{-\infty}^{x_k-A}|x_k-y|^{k\lambda+a}z_F(y)\,dy}{\int\limits_{x_k+A}^{\infty}|x_k-y|^{k\lambda}z_F(y)\,dy+c^k\int\limits_{-\infty}^{x_k-A}|x_k-y|^{k\lambda}z_F(y)\,dy} \qquad (4.10)$$

Но 4.10 больше A^a по теореме о среднем и теорема 4.1 доказана.

Замечание. Утверждение аналогичное теореме 4.1 справедливо и в постановке задачи работы [7]. Неравенства, аналогичные первым неравенствам 4.1 - 4.4 доказываются также как в [2], а предельный процесс имеет тот же вид, что и предельный процесс, соответствующий особенностям первого рода.

Автор выражает признательность И.А.Ибрагимову за поддержку и постановку задач.

Литература

1. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическое поведение статистических оценок параметра сдвига для выборок с непрерывной плотностью с особенностью. - Зап.научн.семин.ЛОМИ,1974,т.44,с.67-93.
2. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. О последовательном оценивании параметра сдвига для выборок с разрывной плотностью. - Теор.вер.и ее примен.,1974,т.XIX,4,с.700-713.
3. Ермаков М.С. Об асимптотическом поведении статистических оценок для выборок, имеющих плотность с особенностями. - Теор.вер.и ее примен.,1976,т.XXI,№3,с.666-668.
4. Пинскер М.С., Яглом А.М. О линейном экстраполировании случайных процессов со стационарными -ми приращениями. - Докл.АН СССР,1954;т.XCIУ,№3.
5. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическое поведение статистических оценок для выборок с разрывной плотностью. - Матем. сборник, 1972,т.87(129),№4, с.554-586.
6. Rao B.P. Extimation of the location of the cusp of a continuous density. - Ann.Math.Stat.,1968,vol.39,№1,p.76-87.

7. Б а к и р о в Н.К. Об отношении правдоподобия для плотностей с особенностями. - Зап.научн.семин.,ЛОМИ,1977,т.74,с.66-83.
8. И б р а г и м о в И.А., Х а с ь м и н с к и й Р.З. Асимптотическая теория оценивания. - М.,1979.
9. И б р а г и м о в И.А., Х а с ь м и н с к и й Р.З. О последовательном оценивании. - Теор.вер.и ее примен.,1974,т.XIX, №2,с.245-456.
10. И б р а г и м о в И.А., Х а с ь м и н с к и й Р.З. Локально асимптотически экспоненциальные семейства распределений. - Теор.вер.и ее примен.,1975,т.XX,№3,с.673-674.