МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 4 (1985)

ОБ ЭКВИДИСТАНТНЫХ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Й. Микеш

Настоящая заметка посвящена изучению эквидистантных основного типа келеровых пространств. Здесь найдены в некоторой системе координат все вышеуказанные пространства. Исследование носит локальный характер. Все рассматриваемые функции предполагаются достаточно гладкими.

1. Четномерное риманово пространство с метрическим тензором g_{ij} называют келеровым K_n ($n = 2N$), если в нем существует комплексная структура φ_i^h, обладающая следующими свойствами [1—3]:

$$\text{(а)}\quad \varphi_i^\alpha \varphi_\alpha^h = -\delta_i^h; \quad \text{(б)}\quad \varphi_{(ij)} = 0; \quad \text{(в)}\quad \varphi_{i,j}^h = 0, \qquad (1)$$

где δ_i^h — символы Кронекера (i, j) обозначает симметрирование по i и j, $\varphi_{ij} \overset{\text{def}}{=} \varphi_j^\alpha g_{\alpha i}$, запятой здесь и в дальнейшем обозначим ковариантную производную по связности K_n.

Как известно, в K_n можно выбрать систему координат так, что [3]

$$\varphi_I^{H+N} = -\varphi_{I+N}^H = \delta_I^H, \quad \varphi_I^{II} = \varphi_{I+N}^{II+N} = 0, \qquad (2)$$

где H, I, J, . . . $= 1, 2, \ldots, N$ ($N = n/2$). Эту систему координат будем называть канонической.

Учитывая (1), легко убедиться в том, что для метрического тензора g_{ij} и символов Кристоффеля

$$\Gamma_{ijk}\left(\Gamma_{ijk} \overset{\text{def}}{=} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})/2; \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Математические заметки», 1985

в канонической системе координат справедливы соотношения

$$g_{I+NJ+N} = g_{IJ}, \quad g_{IJ+N} = -g_{JI+N}; \tag{3}$$

$$\text{(а)}\quad \Gamma_{IJK} = \Gamma_{I+NJK+N} = -\Gamma_{I+NJ+NK};$$
$$\text{(б)}\quad \Gamma_{I+NJ+NK+N} = \Gamma_{IJ+NK} = -\Gamma_{IJK+N}. \tag{4}$$

Условия (4) эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\text{(а)}\quad \partial_I g_{JK} - \partial_k g_{IJ} = \partial_{I+N} g_{JK+N} - \partial_{K+N} g_{JI+N},$$
$$\text{(б)}\quad \partial_{I+N} g_{JK} - \partial_{K+N} g_{IJ} = \partial_I g_{J+NK} - \partial_K g_{J+NI}. \tag{5}$$

Последние соотношения, учитывая (3), можно преобразовать к виду:

$$\text{(а)}\quad \partial_I g_{JK} - \partial_K g_{JI} = \partial_{J+N} g_{IK+N},$$
$$\text{(б)}\quad \partial_{I+N} g_{JK} - \partial_{K+N} g_{JI} = \partial_J g_{KI+N}. \tag{6}$$

Символы Кристоффеля тогда выражаются следующим образом:

$$\text{(а)}\quad \Gamma_{IJK} = (\partial_J g_{IK} + \partial_{J+N} g_{IK+N})/2,$$
$$\text{(б)}\quad \Gamma_{I+NJ+NK+N} = (\partial_{J+N} g_{IK} + \partial_J g_{I+NK})/2. \tag{7}$$

Отметим, что если метрика риманова пространства в некоторой системе координат удовлетворяет условиям (3) и (6), то оно по необходимости келерово, структура которого в этой же системе координат выражается формулами (2).

2. Рассмотрим преобразование системы координат

$$x'^h = x'^h(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{8}$$

при котором функции x'^h удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial x'^H}{\partial x^I} = \frac{\partial x'^{H+N}}{\partial x^{I+N}}, \quad \frac{\partial x'^H}{\partial x^{I+N}} = -\frac{\partial x'^{H+N}}{\partial x^I}. \tag{8а}$$

При этом преобразовании каноническая система координат переходит в каноническую.

Если положить $z^H \overset{\text{def}}{=} x^H + ix^{H+N}$, то в силу (8а) функции $z'^H \overset{\text{def}}{=} x'^H + ix'^{H+N}$ являются аналитическими функциями комплексных переменных $z^1, z^2, \ldots, z^N$.

В дальнейшем преобразование (8), для которого выполняются соотношения (8а), будем называть аналити-

ческим. Аналитическое преобразование координат в комплексной форме запишем следующим образом:

$$z'^{H} = z'^{H}(z). \tag{9}$$

3. Векторное поле λ^h, удовлетворяющее условиям

$$\lambda^h_{,i} + \lambda^{\alpha}_{,\beta}\varphi^h_{\alpha}\varphi^{\beta}_i = 0, \tag{10}$$

называют аналитическим векторным полем [4].

Условия (10) в канонической системе координат принимают вид

$$\partial_I \lambda^H = \partial_{I+N}\lambda^{H+N}, \quad \partial_I \lambda^{H+N} = -\partial_{I+N}\lambda^H. \tag{11}$$

В силу этого функции $\Lambda^H \overset{\text{def}}{=} \lambda^H + i\lambda^{H+N}$ являются аналитическими функциями комплексных переменных $z^1, z^2, \ldots$ $\ldots, z^N$.

При аналитическом преобразовании координат (8) компоненты комплекснозначного вектора $\Lambda^H(z)$ преобразуются по закону

$$\Lambda'^{H}(z') = \Lambda^A(z)\frac{\partial z'^{H}}{\partial z^A}. \tag{12}$$

Нетрудно показать, что можно найти подходящее аналитическое преобразование канонических систем координат такое, что любые компоненты аналитического векторного поля $\Lambda^H(z)$ можно преобразовать в другие наперед заданные аналитические компоненты $\Lambda'^{H}(z')$. Такая задача, очевидно, сводится к решению системы линейных неоднородных уравнений в частных производных в комплексной области с неизвестными аналитическими функциями $z'^{H}(z)$, коэффициентами которых также являются аналитические функции.

В частности, можно найти такое аналитическое преобразование (8), что компоненты ненулевого аналитического вектора $\Lambda^H(z)$ в новой системе координат будут выражаться следующим образом:

$$\Lambda'^{II} = \delta^{II}_1, \tag{13}$$

т. е. действительные компоненты будут иметь вид

$$\lambda'^{h} = \delta^h_1. \tag{13а}$$

Это следует из того, что (13) являются аналитическими функциями.

В силу сказанного выше мы убедились в справедливости следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Для ненулевого аналитического вектора* λ^h *в келеровом пространстве существует каноническая система координат, в которой компоненты этого вектора имеют значения*

$$\lambda^h = \delta^h_1. \tag{14}$$

4. Риманово пространство называют эквидистантным, если в нем существует ненулевое векторное поле λ^h, удовлетворяющее условиям [5, 3]

$$\lambda^h_{,\,i} = \rho\delta^h_i,$$

где ρ — некоторый инвариант.

Если $\rho \neq 0$, то оно основного типа.

В келеровых пространствах этот инвариант постоянен. В принципе можно рассматривать только два случая: когда либо $\rho = 0$, либо $\rho = 1$.

В дальнейшем мы остановимся только на случае, когда $\rho = 1$, т. е.

$$\lambda^h_{,\,i} = \delta^h_i. \tag{15}$$

Муто [6] изучал келеровы пространства K_2 и K_4, допускающие векторы Киллинга ξ^h, удовлетворяющие условиям

$$\xi^h_{,\,i} = \varphi^h_i. \tag{15а}$$

Келеровы пространства, допускающие такие векторные поля, являются эквидистантными основного типа. Именно, если положить $\lambda^h = -\xi^\alpha\varphi^h_\alpha$, то из соотношений (15а) следуют уравнения (15). Верно и обратное.

В силу условий (15) и свойств структуры φ^h_i (1а) вектор λ^h является аналитическим, т. е. он удовлетворяет уравнениям (10).

Дальнейшие исследования в силу теоремы 1 можем вести в канонической системе координат, причем компоненты вектора $\lambda^h = \delta^h_1$. В этой системе координат условия (15) запишутся так:

$$\Gamma^h_{1i} = \delta^h_i,$$

где Γ^h_{ij} — символы Кристоффеля. Опуская индекс h с помощью метрического тензора, имеем

$$\Gamma_{1ij} = g_{ij}. \tag{16}$$

Учитывая (3) и (7), соотношения (16) приводятся к виду

$$\begin{aligned} &\partial_1 g_{IJ} + \partial_{1+N} g_{IJ+N} = 2g_{IJ}, \\ &\partial_1 g_{I+NJ} + \partial_{1+N} g_{IJ} = 2g_{I+NJ}. \end{aligned} \tag{17}$$

В силу свойств метрического тензора (3) из последнего следует, что

$$g_{IJ} = e^{2x^1}\tilde{g}_{IJ}, \quad g_{IJ+N} = e^{2x^1}\tilde{g}_{IJ+N}, \tag{18}$$

где e — число Эйлера, $\tilde{g}_{IJ}$, $\tilde{g}_{IJ+N}$ — некоторые функции от переменных x^2, x^3, . . ., x^N, x^{2+N}, x^{3+N}, . . ., x^{2N} (они не зависят от x^1 и x^{1+N}).

Условия (17) в силу (18) выполняются тождественно. Но, для того чтобы (18) определяли келерово пространство, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись уравнения (6).

В дальнейшем будем считать, что индексы R, $S = 1, 2, 3, \ldots, N$.

Предварительно положим, что

$$\tilde{g}_{11} = 4G\,(x^2, x^3, \ldots, x^N, x^{2+N}, x^{3+N}, \ldots, x^{2N}). \tag{19}$$

Полагая в (6а) $I = J = 1$, $K = R$ и учитывая (18) и (19) будем иметь

$$\tilde{g}_{1R} = 2\partial_R G. \tag{20}$$

Аналогично в (6б) положим $I = J = 1$, $K = R$:

$$\tilde{g}_{1R+N} = 2\partial_{R+N} G. \tag{21}$$

Если в (6а) положить $I = 1$, $J = R$ и $K = S$, то в силу предыдущего получим

$$\tilde{g}_{RS} = \partial_{RS} G + \partial_{R+NS+N} G, \tag{22}$$

а в (6б) — $I = R$, $J = 1$ и $K = S$, то

$$\tilde{g}_{RS+N} = \partial_{RS+N} G - \partial_{R+NS} G. \tag{23}$$

Условия (6) в силу (18) — (23) выполняются тождественно, и, следовательно, риманово пространство является келеровым, структура которого определена условиями (2).

Формулы (18) — (23) можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &g_{IJ} = g_{I+NJ+N} = \partial_{IJ} f + \partial_{I+NJ+N} f, \\ &g_{IJ+N} = \partial_{IJ+N} f - \partial_{I+NJ} f, \\ &I, J = 1, 2, \ldots, N, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$f = e^{2x^1} G\,(x^2, x^3, \ldots, x^N, x^{2+N}, x^{3+N}, \ldots, x^{2N}). \quad (24a)$$

В итоге мы получили теорему:

ТЕОРЕМА 2. *В любом эквидистантном основного типа келеровом пространстве K_n существует система координат, в которой метрический тензор g_{ij} выражается формулами* (24), *а его структура φ_i^n — формулами* (2).

Легко убедиться, что если $G \in C^3$, то формулы (24) (при условии, что $\det \mid g_{ij} \mid \neq 0$) порождают эквидистантное основного типа келерово пространство, структура которого каноническая.

Таким образом, метрики всех эквидистантных основного типа келеровых пространств можно построить при помощи соотношений (24) и подходящим выбором функции $G \in C^3$ указанных переменных.

5. Ранее рассматривался вопрос о геодезическом отображении келеровых пространств. При некоторых дополнительных условиях было установлено, что они не допускают нетривиальных геодезических отображений (НГО) [7—9]. С другой стороны, известно, что эквидистантные основного типа римановы пространства допускают НГО [5, 3]. Следовательно, нами построен класс келеровых пространств, который почти полностью исчерпывает келеровы пространства, допускающие НГО (как доказано в [10], если келерово пространство допускает НГО, то оно эквидистантно). Кроме того, для келеровых пространств с положительно определенной метрикой, допускающих нетривиальные геодезические отображения, легко доказать, что они являются эквидистантными основного типа.

6. Пусть имеем эквидистантное основного типа келерово пространство, в котором выполняются условия (15). Положим

$$a_{ij} \overset{\text{def}}{=} \lambda_i \lambda_j + \lambda_\alpha \varphi_i^\alpha \lambda_\beta \varphi_j^\beta + k g_{ij},$$

где k — такая постоянная, что $\mid a_{ij} \mid \neq 0$. Вычислим ковариантную производную тензора a_{ij}; учитывая (15), получим

$$a_{ij,\,k} = \lambda_{(i} g_{j)k} - \lambda_\alpha \varphi^\alpha_{(i} \varphi_{j)k}. \quad (25)$$

Уравнения (25) являются необходимым и достаточным условием того, что келерово пространство допускает нетривиальные голоморфно-проективные отображения, сохраняющие комплексную структуру [11].

Следовательно, эквидистантные основного типа келеровы пространства допускают нетривиальные голоморфно-проективные отображения, сохраняющие комплексную структуру.

Одесский государственный
университет

Поступило
14.09.82

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Jano K. Differential geometry of complex and almost complex spaces.— N.Y.: Pergamon Press, 1965.
[2] Kobayashi S., Nomizu K., Foundation of differential geometry.— N. Y.— London: Interscience Publ., 1963.
[3] Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств.— М.: Наука, 1979.
[4] Otsuki J., Tashiro J. On curves in Kählerian spaces.— Math. J. Okayama Univ., 1954, v. 4, № 1, p. 57—78.
[5] Синюков Н. С. Эквидистантные римановы пространства.— Научный ежегодник Одесского университета, 1957, с. 133 — 135.
[6] Muto Y. On some special Kählerian spaces.— Sci. Repts Yokohama Mat. Univ., 1961, v. 1, № 8, p. 1—8.
[7] Jano K. Sur la correspondence projective entre deux espaces pseudohermitiens.— C. R. Acad. Sci., Paris, 1956, v. 239, p. 1346—1348.
[8] Westlake W. J. Hermitians spaces in geodesic correspondence.— Proc. Amer. Math. Soc., 1954, v. 5, № 2, p. 301—303.
[9] Kora Mitsuru. On projective diffeomorfisms not necessarily preserving complex structure.— Math. J. Ohayama Univ., 1977 v. 19, № 2, p. 183—191.
[10] Микеш Й. О геодезических отображениях 2-симметрических римановых пространств.— Математические заметки, 1980, т. 28, вып. 2, с. 313—317.
[11] Домашев В. В., Микеш Й. К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств.— Математические заметки, 1978, т. 23, вып. 2, с. 297—304.