

РАПОПОРТ Э. Ф.

## О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОСТИ

В работе [1] исследовалась задача струйного обтекания упругой оболочки. Была доказана с помощью принципа сжатых отображений однозначная ее разрешимость при достаточно большой жесткости оболочки, малой кривизне и ее производной по дуговой абсциссе.

В настоящей работе при условии, что „угловой размер“ оболочки не превышает значения  $\pi$ , с помощью метода Лере—Шаудера доказывается существование решения. При этом на кривизну оболочки и ее производные условие малости не накладывается.

1. Рассматривается установившееся потенциальное течение несжимаемой жидкости в плоскости  $z = x + iy$ . Граница потока состоит из твердого полигона, упругой цилиндрической оболочки  $CB$  и отходящей от нее свободной поверхности  $BA$ , на которой модуль скорости  $V$  принимает постоянное значение  $V_0$ . Оболочка закреплена в точке  $C$  и составляет в ней угол  $\pi\beta$  с осью  $x$ . Она отделяет движущуюся жидкость от зоны с постоянным давлением  $p_0$  (рис. 1).

В ненагруженном состоянии форма оболочки задается уравнением

$$\theta_0 = F(t), \quad t = s/L, \quad (1.1)$$

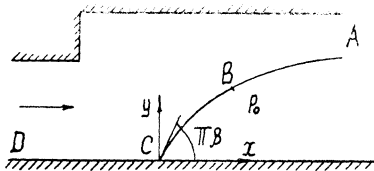


Рис. 1.

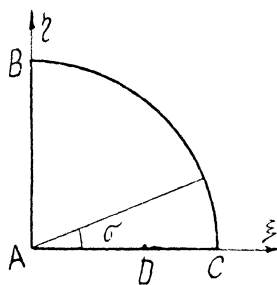


Рис. 2.

где  $\theta_0$  — угол, составленный касательной к сечению оболочки в недеформированном состоянии с осью  $x$ ,  $s$  — дуговая абсцисса кривой  $CB$ , отсчитываемая от точки  $C$ ,  $L$  — длина кривой.

Общепринятые предположения приводят к соотношению [2]

$$M = D_0 (1/R - 1/R_0). \quad (1.2)$$

Здесь  $M$  — изгибающий момент,  $R$  и  $R_0$  — радиусы кривизны поперечного сечения оболочки после изгиба и до него,  $D_0$  — жесткость оболочки.

Если в уравнение равновесия оболочки подставить (1.2), то с помощью уравнения Бернулли получим

$$\begin{aligned} \theta'''_{sss} = & \frac{\rho V_0^2}{2D_0} \left(1 - \frac{V^2}{V_0^2}\right) - \frac{\theta'^3}{2} + \frac{F'''_{ttt}(t)}{L^3} + \\ & + \frac{\theta'_s F_t'^2(1)}{2L^2} + \frac{\theta'_s}{L^2} \int_L^s \theta'_s F''(t) ds, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к оси  $x$ ,  $\rho$  — плотность жидкости.

Пусть в плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  области течения соответствует область  $G = \{|\zeta| < 1, 0 < \sigma = \arg \zeta < \pi/2\}$  с соответствием точек, указанным на рис. 2. Комплексный потенциал течения  $W(\zeta)$  легко строится по особенностям [3]. Производная от потенциала скорости  $\varphi$  на  $BC$  имеет вид

$$d\varphi/d\sigma = \varphi_0 f_0(\sigma), \quad (1.4)$$

где  $\varphi_0$  — приращение потенциала скорости вдоль дуги  $BC$ ,  $f_0(\sigma)$  — известная функция.

Функция Жуковского  $\chi(\zeta) = \ln \left( V_0 \frac{dz}{dW} \right) = r + i\theta$  ( $r = \ln V_0/V$ ) ищется в виде суммы

$$\chi(\zeta) = \chi_0(\zeta) + \omega(\zeta). \quad (1.5)$$

Здесь  $\chi_0(\zeta)$  — функция Жуковского для течения рассматриваемого типа, но при условии, что оболочка  $CB$  заменена абсолютно твердым прямолинейным отрезком, составляющим угол  $\pi\beta$  с осью  $x$ . Функция  $\chi_0(\zeta)$  легко может быть построена по известным особенностям. Задача сводится к определению функции  $\omega(\zeta)$ , регулярной в  $G$  и непрерывной в  $\bar{G}$ . Введем обозначения

$$\lambda = \operatorname{Re} \omega(e^{i\sigma}), \quad \mu = \operatorname{Im} \omega(e^{i\sigma}), \quad r_0 = \operatorname{Re} \chi_0(e^{i\sigma}),$$

$$u = (\mu' - \gamma e^\lambda F_t')/h, \quad \mu' = d\mu/d\sigma, \quad h = f_0 e^{i\sigma},$$

$$g = f_0 e^{-\tau_0}, \quad \gamma = \left( \int_0^{\pi/2} h e^\lambda d\sigma \right)^{-1}, \quad \varepsilon = \frac{\rho \varphi_0^3}{2D_0 V_0}. \quad (1.6)$$

С учетом (1.4)–(1.6) из (1.3) получается следующее соотношение на дуге  $|\zeta| = 1$ ,  $0 \leq \sigma \leq \pi/2$

$$u = -e^\lambda \int_{\pi/2}^{\sigma} h e^\lambda \left\{ \int_{\pi/2}^{\sigma} \left[ \varepsilon (h e^\lambda - g e^{-\lambda}) + \frac{1}{2} u h (u + \gamma e^\lambda F_t') \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (u + 2\gamma e^\lambda F_t') e^{-2\lambda} - (u + \gamma e^\lambda F_t') h \gamma^2 \int_{\pi/2}^{\sigma} u h F_{tt}'' d\sigma \right] d\sigma \right\} d\sigma. \quad (1.7)$$

$$t = \gamma \int_0^{\sigma} h e^\lambda d\sigma, \quad (1.8)$$

$$\gamma = \left( \int_0^{\pi/2} h e^\lambda d\sigma \right)^{-1}. \quad (1.9)$$

Кроме того, функция  $\omega(\zeta)$  должна удовлетворять граничным условиям

$$\operatorname{Im} \omega(\xi) = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad \operatorname{Re} \omega(i\eta) = 0 \quad (0 \leq \eta \leq 1).$$

Пусть  $\Phi[t(\sigma)] = F[t(\sigma)] - \pi\beta$ , тогда  $\Phi[t(0)] = \Phi(0) = 0$ . Поскольку  $\mu = \int_0^{\sigma} u h d\sigma + \Phi[t(\sigma)]$ , то, используя формулы Дини и Гильберта [4], получим

$$\lambda = D[uh] + S[\Phi(t(\sigma))], \quad (1.10)$$

$$D[v] = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} v(\tau) \ln \left| \frac{\cos \sigma - \cos \tau}{\cos \sigma + \cos \tau} \right| d\tau,$$

$$S[v] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} v(\tau) \frac{\cos \sigma \cos \tau}{\cos^2 \tau - \cos^2 \sigma} d\tau.$$

2. Будем предполагать, что функция  $F(t)$  (а, следовательно,  $\Phi(t)$ ) обладает двумя ограниченными производными, причем

$$\Phi'(t) < \kappa_1, \quad \Phi''(t) < \kappa_2, \quad (2.1)$$

где  $\kappa_1, \kappa_2$  — некоторые числа и

$$\max \Phi(t) - \min \Phi(t) \leq \pi - \delta, \quad \delta \in (0, \pi). \quad (2.2)$$

Соотношения (1.7)—(1.10) представляюг собой систему уравнений относительно функций  $u(\sigma)$ ,  $\lambda(\sigma)$  на  $[0, \pi/2]$ , которую запишем в операторном виде

$$x = T[x] \quad x = \{u, \lambda\}. \quad (2.3)$$

Введем банаховы пространства  $C$ ,  $C_\alpha$ ,  $E = C \times C_\alpha$ , где  $C$  — пространство непрерывных функций на  $[0, \pi/2]$  с нормой  $\|v\| = \sup_{\sigma} |v(\sigma)|$ ,  $C_\alpha$  — пространство функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем  $\alpha$  на  $[0, \pi/2]$  с нормой

$$\|v\|_\alpha = \|v\| + \sup_{\sigma_1 \neq \sigma_2} \frac{|v(\sigma_1) - v(\sigma_2)|}{|\sigma_1 - \sigma_2|}.$$

Опишем действие оператора  $T$  в пространстве  $E$ . Возьмем  $u_1(\sigma) \in C$ ,  $\lambda_1(\sigma) \in C_\alpha$ . Формулы (1.8), (1.9) определяют непрерывно дифференцируемую функцию  $t(\sigma)$ , причем  $t(0) = 0$ ,  $t(\pi/2) = 1$ . Функция  $\Phi[t(\sigma)]$  будет также непрерывно дифференцируемой. Поэтому операторы  $D[uh]$ ,  $S[\Phi(t(\sigma))]$  определяют функции, удовлетворяющие условию Гёльдера с любым показателем  $\alpha_1 \in (\alpha, 1)$ . Тогда по формулам (1.10), (1.7) определяются гёльдеровы функции  $u_2(\sigma) \in C_{\alpha_1}$ ,  $\lambda_2(\sigma) \in C_{\alpha_1}$ .

Варьируя уравнения (1.7)—(1.10) и производя стандартные оценки, можно показать, что оператор  $T$  непрерывен в пространстве  $E$  и переводит ограниченное множество из  $E$  в ограниченное множество из  $C_\alpha \times C_{\alpha_1}$ . Последнее, как известно [5], означает компактность оператора  $T$ . Из вышеизложенного вытекает полная непрерывность оператора  $T$  в  $E$ .

Включим (2.3) в семейство уравнений  $x = kT[x]$ , зависящих от параметра  $k \in [0, 1]$ . Легко проверить, что преобразование  $kT[x]$  равностепенно непрерывно по  $k$ , когда  $x$  принадлежит любому ограниченному множеству из  $E$ . При  $k = 0$  уравнение имеет единственное решение  $x = 0$ , причем его правая часть не зависит от  $x$ . Для применения теоремы Лере—Шаудера [6], с. 199) осталось показать, что уравнение  $x = kT[x]$  не имеет решений, принадлежащих границе некоторого замкнутого множества  $H \subset E$ . Ниже доказывается существование такого  $H$  для  $k = 1$  (из доказательства видно, что построенное  $H$  годится для  $k \in [0, 1]$ ).

Пусть  $H = \{x : \|u\| \leq q_1, \|\lambda\|_\alpha \leq q_2\}$  и  $x = \{u, \lambda\}$ . В силу леммы 1 гл. VII [6]  $|f(\sigma_1) - f(\sigma_2)| \leq \sqrt{2} |\sigma_1 - \sigma_2|^{1/2} \|h\| q_1$ , где  $f(\sigma) = D[uh]$ . Так как  $f(\pi/2) = 0$ , то отсюда следует, что

$$\|D[uh]\| \leq a_1 q_1, \quad \|D[uh]\|_{1/2} \leq a_2 q_1, \quad (2.4)$$

где  $a_1 = \sqrt{2} \|h\|$ ,  $a_2 = a_1 [1 + (\pi/2)^{1/2}]$ . Здесь и далее постоянные  $a_i$  положительны и не зависят от  $q_1, q_2, \varepsilon$ .

Оценим величину  $\gamma$  сверху. Используя (2.2), (2.4) и повторяя рассуждения леммы 4 гл. VII [6], получим

$$\gamma \leq a_3 e^{a_1 q_1}, \quad a_3 = \frac{1}{\int_0^{\pi/2} h d\sigma} \exp \left\{ \frac{\int_0^{\pi/2} S[h] d\sigma}{\int_0^{\pi/2} h d\sigma} \right\}. \quad (2.5)$$

Теперь оценим норму функции  $t(\sigma)$  в пространстве  $C_\alpha$ . Используя леммы 1, 2 гл. VII [6] и неравенства (2.2), (2.4), (2.5), будем иметь из (1.8)

$$\|t(\sigma)\|_\alpha \leq 1 + a_4 e^{2a_1 q_1}, \quad a_4 = a_3 \|h\| \left[ \frac{\pi}{\cos j(\pi/2 - \delta/2)} \right]^{1/j}, \quad (2.6)$$

где  $\alpha = 1 - 1/j \leq 1/2$ ,  $j$  — произвольное число,

$$1 < j < \min \left( 2, \frac{1}{1 - \delta/\pi} \right).$$

Поскольку оператор  $S$  непрерывен в  $C_\alpha$ , то из (1.1), (2.4), (2.5) следует

$$\|\lambda\|_\alpha \leq a_5 q_1 + a_6 e^{2a_1 q_1}, \quad (2.7)$$

где  $a_5 = a_2(\pi/2)^{1/2}$ ,  $a_6 = \chi_1 a_4 K_\alpha$ ,  $K_\alpha$  — норма оператора  $S$  в пространстве  $C_\alpha$ .

Оценим теперь  $\|u\|$ . Из уравнений (1.7), неравенств (2.1), (2.5) легко получить

$$|u| < \psi(q_1, q_2) \int_{\pi/2}^{\sigma} d\sigma \int_{\pi/2}^{\sigma} (\varepsilon + |u(\sigma)| + \int_{\pi/2}^{\sigma} |u(\sigma)| d\sigma) d\sigma, \quad (2.8)$$

$$\psi(q_1, q_2) = e^{4q_2} [\max\{\|h\|, \|g\|\}]^2 [(q_1 + 2\chi_1 a_3 e^{a_1 q_1})^2 + \chi_2 a_3^2 e^{2a_1 q_1} (q_1 + \chi_1 a_3 e^{a_1 q_1})].$$

Итерируя  $n$  раз (2.8), получим

$$|u| < \frac{\psi^{n+1}(q_1, q_2)}{(n+1)!} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\psi^i(q_1, q_2)}{i!}.$$

Поскольку  $n$  — произвольное число, отсюда вытекает

$$\|u\| \leq \frac{\varepsilon}{2} [e^{\psi(q_1, q_2)} - 1]. \quad (2.9)$$

Пусть при некоторых  $q_1, q_2, \varepsilon$  выполняются неравенства

$$a_5 q_1 + a_6 e^{2a_1 q_1} < q_2, \quad (2.10)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} [e^{\psi(q_1, q_2)} - 1] < q_1. \quad (2.11)$$

В силу оценок (2.7), (2.9) отсюда будет следовать, что на границе множества  $H$  уравнение (2.3) не имеет решения. Легко видеть, что при достаточно малых  $\varepsilon$  существуют  $q_1, q_2$ , удовлетворяющие (2.10), (2.11). Для выбора наибольшего из таких значений  $\varepsilon$  разрешим (2.11) относительно  $\varepsilon$  и учтем, что  $\psi(q_1, q_2)$  возрастает по обоим аргументам. Тогда получим

$$\varepsilon < \frac{2q_1}{e^{\psi(q_1, \Phi_1(q_1))} - 1} = \Phi_2(q_1), \quad \Phi_1(q_1) = a_5 q_1 + a_6 e^{2a_1 q_1}. \quad (2.12)$$

Нетрудно установить, что  $\Phi_2(0) = 0$ ,  $\Phi_2(\infty) = 0$  и  $\Phi_2(q_1) > 0$  при  $q_1 \in (0, \infty)$ . Пусть  $\max \Phi_2(q_1) = \varepsilon_0$  при  $q_1 = q_0$ . Тогда из вышеизложенного следует

*Теорема. Пусть выполняются условия (2.1), (2.2) и  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Тогда существует хотя бы одно решение системы (1.7)–(1.10), причем  $\|u\| < q_0$ ,  $\|\lambda\|_\alpha < \Phi_1(q_0)$ .*

В заключение автор благодарит И. Л. Гуревича за полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф. К задаче о струйном обтекании упругой оболочкой.—Изв. вузов. Математика“, 1976, № 11.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
3. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
5. Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Шкалы банаховых пространств.—„Успехи матем. наук“, 1966, т. 21, вып. 2 (128).
6. Биркгоф Г., Сарантанелло Э. Струи, следы и каверны. М., „Мир“, 1964.

*Доложено на семинаре 5 мая 1976 г.*