В.А.Шлык

ЕМКОСТЬ КОНДЕНСАТОРА И МОДУЛЬ СЕМЕЙСТВА РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

I. Пусть G - некоторая ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \geq 2$; F_0, F_1 - два непустых без общих точек компакта в $\overline{G}$. Цимер [I] установил равенство, связывающее конформную емкость конденсатора (F_0, F_1, G) с $n/(n-1)$- модулем семейства $\Sigma(F_0, F_1, G)$ всех замкнутых множеств, отделяющих F_0 от F_1 в замыкании G. Модифицируя его рассуждения, ниже выведем соотношение между p-емкостью конденсатора $(G/F) = (F_0, F_1, G/F)$ и q-модулем семейства всех поверхностей, расположенных в $G \setminus E$, где $E = F_0 \cup F_1 \cup F$, и разделяющих компакты F_0, F_1. Здесь $F \subset R^n \setminus (F_0 \cup F_1)$ - ограниченное, замкнутое относительно $R^n \setminus (F_0 \cup F_1)$ множество, каждая компонента связности которого не имеет предельных точек на $F_0 \cup F_1$; $p, q \in (1, +\infty)$ и $1/p + 1/q = 1$. Из этого соотношения, в частности, получим ответ на одно предположение Хедберга [2, с.193].

2. В дальнейшем L_n - n-мерная мера Лебега, $n \geq 1$; H^k - k-мерная мера Хаусдорфа [3]. Если $A \subset R^n$, то ∂A - граница A и для $x \in R^n$ через $d(x, A)$ обозначаем расстояние между точкой x и множеством A; соответственно $d(A, B)$ - расстояние между множествами A, $B \subset R^n$; $B(x, r)$ - открытый n-мерный шар радиуса $r > 0$ и с центром в точке x; $\langle x, y \rangle$ - скалярное произведение векторов x, y из R^n. Запись $A \Subset B$ будет означать, что $\overline{A}$ содержится в B вместе с некоторой своей окрестностью.

Если A - L_n-измеримое множество из R^n, то $\mathcal{L}^p_r(A)$ - семейство всех вектор-функций $u = (u_1, \ldots, u_r)$, для которых

$$\|u\| = \|u\|_{\mathcal{L}^p_r(A)} = \left(\int_A \left(\sum_{i=1}^{r} |u_i(x)|^2\right)^{p/2} dL_n\right)^{1/p} < \infty . \qquad (I)$$

$C^\infty(\mathcal{D})$ ($C^\infty(R^n)$) обозначаем пространство всех функций бесконечно дифференцируемых на ограниченном открытом множестве $\mathcal{D} \subset R^n$ (соответственно, в R^n), через $L^1_p(\mathcal{D})$ - пространство всех вещественных локально суммируемых в $\mathcal{D}$ функций, имеющих обобщенные частные производные первого порядка, суммируемые с p-й степенью в $\mathcal{D}$. Для $u \in L^1_p(\mathcal{D})$ положим

© В. А. Шлык, 1990

$$\|u\| = \|u\|_{L^1_p(\mathcal{D})} = \left(\int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^p dL_n\right)^{1/p}, \qquad (2)$$

где $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$. $\mathcal{L}^p_\tau(A)$, $L^1_p(\mathcal{D})$ - банаховы пространства относительно соответствующих им норм (I), (2), если не различать в них функции, эквивалентные между собой в стандартном смысле [4], [5]. Банахово пространство $\mathcal{L}^p_\tau(A)$ равномерно выпукло в следующем смысле [5, с.38]: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условий $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ и $\|u - v\| \geq \varepsilon$ следует, что $\|u + v\| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon))$.

3. Пусть G, F_0, F_1, F, E - множества, определенные в п.I. Под p-емкостью конденсатора (G/F) будем понимать величину

$$C_p(G/F) = C_p(F_0, F_1, G/F) = \inf \int_G |\nabla u|^p dL_n,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in C^\infty(G) \cap L^1_p(G)$, равным j в некоторой окрестности множества F_j, $j = 0, 1$, и постоянной $c(u, \alpha)$ в некоторой окрестности каждой компоненты связности α множества F. Функции u в этом определении будем называть допустимыми (для $C_p(G/F)$). В случае $F = \emptyset$ p-емкость совпадает с емкостью $C^1_p(F_0, F_1, G)$ (см. [4]). Функцию v назовем p-точной, если v - предел в $L^1_p(G)$ некоторой последовательности допустимых функций; функцию w назовем p-пробной, если w - предел в $L^1_p(G)$ некоторой последовательности функций из $C^\infty(G) \cap L^1_p(G)$, равных нулю в некоторой окрестности компакта $F_0 \cup F_1$ и постоянных в некоторой окрестности каждой компоненты связности множества F; p-точную функцию $u_0 = u(x, G/F)$, $x \in G$, назовем экстремальной (для $C_p(G/F)$), если $C_p(G/F) = \int_G |\nabla u_0|^p dL_n$.

Теорема I. Если $C_p(G/F) < \infty$, то существует единственная (с точностью до аддитивной постоянной) экстремальная функция u_0.

Доказательство. Пусть u_k, $k \in \mathbb{N}$ - последовательность допустимых функций для $C_p(G/F)$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_G |\nabla u_k|^p dL_n = C_p(G/F) = c^p, \quad \text{где } c \geq 0$$

Если $c=0$, то очевидно, что $u_k \longrightarrow 0$ в $L^1_p(G)$. Поэтому предположим, что $c>0$. Если последовательность $\{u_k\}$ не сходится в $L^1_p(G)$, то можно указать две ее подпоследовательности $\{u_{1k}\}$, $\{u_{2k}\}$ и $\varepsilon>0$, для которых

$$\int_G |\nabla u_{jk}|^p dL_n = c^p_{jk} > 0 \quad , \text{ где } j=0,1 \text{ и } c_{jk}>0 ,$$

$$\| u_{1k}/c - u_{2k}/c \|_{L^1_p(G)} \geq 2\varepsilon, \quad k\in\mathbb{N} . \tag{3}$$

Поскольку $V_k = \frac{1}{2}(u_{1k} + v_{1k})$ – допустимая функция для $C_p(G/F)$, то $\int_G |\nabla V_k|^p dL_n \geq c^p$. Ясно, что $\| u_{jk}/c_{jk} \|_{L^1_p(G)} = 1$ и $c_{jk} \longrightarrow c$ при $k \longrightarrow \infty$. В силу (3) для достаточно больших k имеем неравенство $\| u_{1k}/c_{1k} - u_{2k}/c_{2k} \|_{L^1_p(G)} \geq \varepsilon$. Учитывая определение равномерной выпуклости пространства $\mathcal{L}^p_n(G)$, отсюда получаем оценку

$$\left\| \frac{\nabla u_{1k}}{2c_{1k}} + \frac{\nabla u_{2k}}{2c_{2k}} \right\|_{\mathcal{L}^p_n(G)} \leq 1-\delta(\varepsilon) \quad , \text{ где } k\geq k_0 .$$

С другой стороны, для достаточно больших k справедливы соотношения

$$1 \leq \left\| \frac{\nabla V_k}{c} \right\|_{\mathcal{L}^p_n(G)} \leq o(1) + \left\| \frac{\nabla u_{1k}}{2c_{1k}} + \frac{\nabla u_{2k}}{2c_{2k}} \right\|_{\mathcal{L}^p_n(G)} .$$

Сравнивая выписанные неравенства, убеждаемся, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u_0$ в $L^1_p(G)$ существует. Если V_0 – еще одна экстремальная функция, то, заменяя в предыдущих рассуждениях u_{1k} на u_0 и u_{2k} на V_0, установим в G равенство $\nabla u_0 = \nabla V_0$ (точнее, для L_n – почти всех $x\in G$). Согласно теории обобщенных функций [6], в G имеет место соотношение $u_0 = V_0 + const$ (точнее, для L_n – почти всех $x\in G$).

Следующее утверждение для $\partial G = E$ принадлежит Ямамото [7]. Его доказательство почти без изменений переносится на предлагаемый ниже случай.

Теорема 2. p – точная функция u экстремальная для $C_p(G/F)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_G |\nabla u|^{p-2} < \nabla u, \nabla w > dL_n = 0$$

для любой p-пробной функции w.

Доказательство. Необходимость. Пусть w - некоторая p-пробная функция. Тогда $u \pm \varepsilon w$, где $\varepsilon \in (0,1)$, - p-точная функция для $C_p(G/F)$, значит,

$$\int_G |\nabla(u \pm \varepsilon w)|^p dL_n \geq \int_G |\nabla u|^p dL_n = C_p(G/F).$$

Кроме того, применение формулы конечных приращений дает для L_n-почти всех $x \in G$ следующие оценки:

$$|\nabla(u \pm \varepsilon w)|^p \leq (|\nabla u| + |\nabla \varepsilon w|)^p = |\nabla u|^p + p(|\nabla u| + \theta |\nabla \varepsilon w|)^{p-1} |\nabla \varepsilon w|;$$

$$|\nabla u|^p = |\nabla(u \pm \varepsilon w \mp \varepsilon w)|^p \leq |\nabla(u \pm \varepsilon w)|^p + p(|\nabla(u \pm \varepsilon w)| + \theta_1 |\nabla \varepsilon w|)^{p-1} |\nabla \varepsilon w|,$$

где $\theta, \theta_1 \in [0,1]$. Используя неравенство Гельдера, отсюда заключаем, что

$$\frac{||\nabla(u \pm \varepsilon w)|^p - |\nabla u|^p|}{\varepsilon} \leq f \qquad \text{для } L_n\text{-почти всех } x \in G,$$

где

$$f = p|\nabla w|((|\nabla u| + \theta |\nabla \varepsilon w|)^{p-1} + (|\nabla(u \pm \varepsilon w)| + \theta_1 |\nabla \varepsilon w|)^{p-1})$$

- интегрируемая функция в G. По теореме Лебега,

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_G \frac{|\nabla(u \pm \varepsilon w)|^p - |\nabla u|^p}{\varepsilon} dL_n = \int_G \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|\nabla(u \pm \varepsilon w)|^p - |\nabla u|^p}{\varepsilon} dL_n =$$

$$= \pm p \int_G |\nabla u|^{p-2} < \nabla u, \nabla w > dL_n.$$

Тем самым необходимость условия теоремы установлена.

Достаточность. Пусть u - p-точная функция для

$C_p(G/F)$, удовлетворяющая вариационному равенству в теореме. Зададим некоторую p-точную функцию v. Тогда $w = u - v$ – p-пробная функция. Поэтому $\int_G |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla(u-v)\rangle dL_n = 0$.

Отсюда

$$\int_G |\nabla u|^p dL_n \leq \int_G |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| dL_n .$$

Из неравенства Гельдера сразу следует, что

$$\int_G |\nabla u|^p dL_n \leq \int_G |\nabla v|^p dL_n .$$

Это неравенство с учетом произвольности выбора v устанавливает экстремальность функции u для $C_p(G/F)$. Теорема доказана.

4. q-модуль семейства отделяющих поверхностей.

4.I. Пусть ω – компакт, расположенный в $R^n \setminus E$. Будем говорить, что компакт ω отделяет F_0 от F_1 в R^n/F, если можно указать непересекающиеся открытые множества A и B в R^n, удовлетворяющие условиям $A \cup B = R^n \setminus \omega$, $F_0 \subset A$, $F_1 \subset B$. Семейство всех таких компактов ω обозначим через $\Sigma(R^n/F) = \Sigma(F_0, F_1, R^n/F)$. Множество $\sigma = \omega \cap G$, где $\omega \in \Sigma(R^n/F)$, назовем поверхностью, разделяющей в G/F) компакты F_0, F_1. Семейство всех таких поверхностей обозначим через $\Sigma = \Sigma(G/F) = \Sigma(F_0, F_1, G/F)$. Положим

$$M_q(\Sigma_1) = \inf\left\{ \int_{R^n} \rho^q dL_n : \rho \wedge \Sigma_1 \right\}, \quad \Sigma_1 \subset \Sigma,$$

где запись $\rho \wedge \Sigma_1$ означает, что ρ – неотрицательная борелевская функция на R^n такая, что $\int_\sigma \rho dH^{n-1} \geq 1$ для каждой поверхности σ из Σ_1.

Лемма I. Пусть K – некоторый компакт в R^n и α – его компонента связности. Тогда для наперед заданной окрестности $\mathcal{U}$ континуума α можно куказать область V такую, что $\alpha \subset V$, $\bar{V} \subset \mathcal{U}$, $\partial V \cap K = \emptyset$.

Доказательство. Можно считать, что $\mathcal{U}$ – ограниченная область. Положим $T = \partial \mathcal{U} \cup K$. Возможны две ситуации. В первой ситуации α содержится в компоненте связности τ множества T,

где $\tau \cap \partial\mathcal{U} \neq \emptyset$. Другими словами, τ соединяет α и $\partial\mathcal{U}$. Пусть $T_1 = \{x \in \mathcal{U} : d(x, \partial\mathcal{U}) \leq \delta\}$, где $0 < \delta < d(\alpha, \partial\mathcal{U})$ и $\mathcal{D}$ - компонента связности открытого множества $\mathcal{U} \setminus T_1$, в которой содержится α. Ясно, что $\bar{\mathcal{D}} \subset \mathcal{U}$. Тогда (см. [8, с.182, теорема 4]) существует континуум β, для которого $\alpha \subset \beta \subset \bar{\mathcal{D}} \cap \tau$, $\alpha \neq \beta$. Так как $\bar{\mathcal{D}} \cap \tau \subset K$, то это противоречит определению α как максимального элемента в K относительно свойства быть связным. Следовательно, первая ситуация невозможна. Во второй ситуации все компоненты связности τ_1 компакта T, удовлетворяющие условию $\tau_1 \cap \partial\mathcal{U} \neq \emptyset$, не имеют общих точек с α. Поскольку $\partial\mathcal{U}$ - компакт, то объединение $\tilde{T}_1 = \cup\, \tau_1$ всех таких компонент также есть компакт. По определению, τ_1 можно заключить в область $V(\tau_1)$ такую, что $\partial V(\tau_1) \cap T = \emptyset$, $\alpha \subset R^n \setminus \bar{V}(\tau_1)$, Семейство $\{V(\tau_1) : \tau_1 \subset \tilde{T}_1\}$ образует открытое покрытие компакта $\tilde{T}_1$. Извлечем из него конечное подпокрытие $V_1, \ldots, V_m$ компакта $\tilde{T}_1$. Пусть $\mathcal{U}_1 = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ и V - компонента связности множества $R^n \setminus \bar{\mathcal{U}}_1$, в которой содержится α. Тогда V - требуемая область. Лемма доказана.

Поскольку каждая компонента связности множества F находится на положительном расстоянии от $F_0 \cup F_1$, то из леммы I вытекает следующее утверждение.

Следствие I. Каждая компонента связности компакта E является компонентой связности одного из множеств F_0, F_1, F. Обратно, каждая компонента связности одного из множеств F_0, F_1, F является компонентой связности компакта E.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{U}$ - наперед заданная ограниченная окрестность компакта F_1. Тогда можно указать открытое множество V, для которого $\bar{V} \subset \mathcal{U}$, $F_1 \subset V$, $\partial V \cap E = \emptyset$, $F_0 \subset R^n \setminus \bar{V}$.

Выбор V можно осуществить таким образом, чтобы замыкания его компонент связности попарно не пересекались и содержали точки из F_1.

Доказательство. Согласно лемме I, для каждой компоненты связности α компакта F_1 можно указать область $V(\alpha)$, для которой $\bar{V}(\alpha) \subset \mathcal{U}$, $\alpha \subset V(\alpha)$, $\partial V(\alpha) \cap E = \emptyset$, $F_0 \subset R^n \setminus \bar{V}(\alpha)$. Из системы $\{V(\alpha)\}$ всех таких областей в силу компактности F_1 можно извлечь конечную подсистему $V_1, \ldots, V_m$ такую, что $F_1 \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j = V_0$. Пусть $\tilde{V}_0$ - объединение всех компонент

связности множества V_0, имеющих общие точки с F_1. В силу компактности F_1, имеется лишь конечное число таких компонент связности. Несколько уменьшая эти компоненты, получим из $\tilde{V}_0$ требуемое множество V. Лемма доказана.

Заметим, что $\partial V \in \Sigma(R^n/F)$. Отсюда приходим к следующему утверждению.

Следствие 2. $\Sigma(G/F) \neq \emptyset$.

Следствие 3. $C_p(G/F) < \infty$.

Действительно, пусть V определяется также, как в лемме 2. Положим $K = \{x \in V : d(x, V \cap E) \leq \frac{1}{2} d(E, \partial V)\}$. Тогда компакт $V \cap E$ содержится в K вместе с некоторой своей окрестностью. Зададим (см.[4, с.13]) функцию $u(x) \in C^\infty(R^n)$, равную нулю при $x \notin V$ и равную единице при $x \in K$. Тогда u - допустимая функция для $C_p(G/F)$ и

$$C_p(G/F) \leq \int_{R^n} |\nabla u|^p d\mu_n < \infty .$$

4.2. Положим $\Sigma(k) = \{\omega \cap G : \omega \in \Sigma(R^n/F), d(\omega, E) \geq \frac{1}{k}\}$, где $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Sigma(k)$. Последовательность конденсаторов $(G(k)/F(k)) = (F_0(k), F_1(k), G(k)/F(k))$, $k \in \mathbb{N}$, назовем аппроксимирующей для (G/F), если

1) $G(k)$ - область, $E \cap \partial G(k) = \emptyset$;

2) $F_0(k)$, $F_1(k)$, $F(k)$ - попарно непересекающиеся компакты, каждый из которых содержится в $G(k)$ и является объединением конечного числа непересекающихся замкнутых областей; $F_0 \Subset F_0(k)$,
$F_1 \Subset F_1(k)$, $(F \setminus (F_0(k) \cup F_1(k))) \cap G(k) \Subset F(k)$, $\partial F_0(k) \cap E = \emptyset$, $\partial F_1(k) \cap E = \emptyset$, $\partial F(k) \cap E = \emptyset$;

3) $\forall \sigma \in \Sigma(k) \Longrightarrow \sigma \in \Sigma(G(k)/F(k))$;

4) $G(k+1) \subset G(k)$, $F_j(k+1) \Subset F_j(k)$, $j = 0, 1$,

$$F_0(k+1) \cup F_1(k+1) \cup F(k+1) \Subset F_0(k) \cup F_1(k) \cup F(k).$$

Положим $u_k = u(x, G(k)/F(k))$ при $x \in G(k)$ и $u_k, \nabla u_k = 0$ при $x \notin G(k)$.

Лемма 3. Для (G/F) существует аппроксимирующая последовательность конденсаторов $(G(k)/F(k))$, $k \in \mathbb{N}$ такая, что

$$C_p(G/F) \leq C_p(G(k)/F(k)) \leq C_p(G/F) + \frac{1}{k} .$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_j(k)$ – $\frac{1}{k}$-окрестность компакта F_j, $j=0,1$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathcal{U}_0(k)\cap\mathcal{U}_1(k)=\emptyset$ при $k\geq 1$. Пусть V_k – допустимая функция для $C_p(G/F)$ и $\int_G|\nabla v_k|^p dL_n\leq C_p(G/F)+\frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{U}_j^1(k)$ – окрестность компакта F_j, в которой V_k равна j. Рассмотрим подробнее случай $k=1$. Применяя лемму 2, построим в $\mathcal{U}_j(1)\cap\mathcal{U}_j^1(1)$ два открытых множества $V_j(1)$, $V_j^1(1)$, удовлетворяющие условиям:

I) $V_j(1)$, $V_j^1(1)$ – объединения конечного числа областей, в каждой из которых имеются точки из F_j;

2) $F_j\subset V_j^1(1)\Subset V_j(1)\Subset\mathcal{U}_j(1)\cap\mathcal{U}_j^1(1)$;

3) $E\cap\partial V_j(1)=E\cap\partial V_j^1(1)=\emptyset$;

4) $E\cap V_j(1)=E\cap V_j^1(1)$.

Положим $F_j(1)=\overline{V}_j^1(1)$. Пусть $E(1)$ – объединение всех компонент связности компакта $E\setminus(F_0(1)\cup F_1(1))$, имеющих общие точки с $\overline{G}$. Ясно, что $E(1)$ – компакт. Учитывая лемму 2 и определение допустимых функций для $C_p(G\setminus F)$, построим открытое множество $Q(1)$, удовлетворяющее условиям:

I) $\overline{Q}(1)\cap(F_0(1)\cup F_1(1))=\emptyset$, $E(1)\subset Q(1)$;

2) $\partial Q(1)\cap E=\emptyset$;

3) $Q(1)$ – объединение конечного числа областей, каждая из которых содержит точки из $E(1)$;

4) $V_1(x)$ – постоянная на каждой компоненте связности множества $Q(1)$;

5) $\overline{Q}(1)$ содержится в 1-окрестности компакта $E(1)$.

Пусть теперь $Q^1(1)$ – еще одно множество, определяемое аналогично $Q(1)$, причем $\overline{Q}^1(1)\Subset Q(1)$ и $Q^1(1)\cap E=Q(1)\cap E$. Положим $F(1)=\overline{Q}^1(1)$. Тогда $G(1)=G\cup V_0(1)\cup V_1(1)\cup Q(1)$ – область; V_1 – допустимая функция для $C_p(G(1)/F(1))$; $\forall\sigma\in\Sigma(1)\Longrightarrow\sigma\in\Sigma(G(1)/F(1))$. Аналогичным способом находим при $k\geq 2$ множества $F_0(k)$, $F_1(k)$, $F(k)$, $G(k)$. При этом в отличие от случая $k=1$ выбор указанных множеств нужно дополнительно подчинить условию 4) в определении аппроксимирующей последовательности $\{(G(k)/F(k))\}$. По построению,

$$C_p(G/F)\leq\int_{G(k)}|\nabla u_k|^p dL_n\leq\int_{G(k)}|\nabla v_k|^p dL_n\leq C_p(G/F)+\frac{1}{k}.$$

4.3. Лемма 4. $M_p(\Sigma) = \lim\limits_{k\to\infty} M_p(\Sigma(k))$.

Доказательство. Если $\lim\limits_{k\to\infty} M_p(\Sigma(k)) = \infty$, то утверждение леммы очевидно. Если $\lim\limits_{k\to\infty} M_p(\Sigma(k)) = 0$, то Σ, как объединение счетного множества p-исключительных семейств, также представляет собой p-исключительное семейство [9]. Поэтому предположим, что $0 < \lim\limits_{k\to\infty} M_p(\Sigma(k)) < \infty$. Пусть f_k - борелевская неотрицательная функция, для которой

$$\int\limits_{R^n} f_k^p \, dL_n = M_p(\Sigma(k)) \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{\sigma} f_k \, dH^{n-1} \geq 1$$

для M_p-почти всех σ из $\Sigma(k)$ [9]. Ясно, что функцию f_k можно считать равной нулю при $x \notin B(0,R)$, где $E \cup \overline{G} \subset B(0,R)$. Условие $\int\limits_{B(0,R)} \left(\frac{1}{2}(f_k + f_\ell)\right)^p dL_n \geq M_p(\Sigma(k))$, где $\ell \geq k$, равномерная выпуклость пространства $\mathcal{L}_1^p(B(0,R))$ сразу приводят к заключению о сходимости функций f_k при $k \to \infty$ в $\mathcal{L}_1^p(R^n)$ к некоторой борелевской функции f. При этом $\int\limits_{\sigma} f \, dH^{n-1} \geq 1$ для M_p-почти всех σ из $\Sigma = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Sigma(k)$. Отсюда $M_p(\Sigma) = \int\limits_{R^n} f^p \, dL_n = \lim\limits_{k\to\infty} M_p(\Sigma(k))$.

5. p-емкость конденсатора и q-модуль семейства разделяющих поверхностей.

5.1. Теорема 3. $M_q(\Sigma) \geq (C_p(G/F))^{-q/p}$.

Доказательство. Доказательство проведем в предположении, что $M_q(\Sigma) < \infty$. Зададим некоторую функцию f, где $f \wedge \Sigma$. Функцию f можно считать равной нулю при $x \notin G$. Пусть v_k, $(G(k)/F(k))$ сохраняют смысл, указанный в доказательстве леммы 3. Тогда

$$\int\limits_{G(k)} |\nabla v_k|^p dL_n = \int\limits_{G} |\nabla v_k|^p dL_n < C_p(G/F) + \frac{1}{k}.$$

Заметим, что $u_k^{-1}(s) = \{x \in G(k) : u_k(x) = s\}$ для всех $s \in (0,1)$ разбивает область $G(k)$ на два открытых множества $\widetilde{V}_0 \supset F_0$,

$\tilde{V}_1 \supset F_1$. Тем самым на $(0,1)$, исключая конечное число значений, выполнены соотношения $\omega = \partial G(k) \cup u_k^{-1}(s) \in \Sigma(R^n/F)$, $\omega \cap G = u_k^{-1}(s) \in \Sigma$. Отсюда, применяя неравенство Гельдера и формулу коплощади (см. [I]), имеем цепочку неравенств

$$\Big(\int_{G(R)} f^q dL_n\Big)^{1/q}\Big(C_p(G/F)+\frac{1}{k}\Big)^{1/p} \geq \Big(\int_{G(k)} f^q dL_n\Big)^{1/q}\Big(\int_{G(k)} |\nabla v_k|^p dL_n\Big)^{1/p} \geq$$

$$\geq \int_G f|\nabla u| dL_n \geq \int_0^1 \Big(\int_{u_k^{-1}(s)} f dH^{n-1}\Big) dL_1(s) \geq 1 .$$

Отсюда, используя произвол в выборе f, при $k \longrightarrow \infty$ получаем требуемый результат.

5.2. Пусть $\omega \in \Sigma(R^n/F)$ и $\omega(b) = \{x \in R^n : d(x,\omega) < b\}$, где $0 < b < d(\omega, E)$, $u_0 = u(x, G/F)$ при $x \in G$ и $\nabla u_0 = 0$ при $x \notin G$.

Лемма 5. Если $F_0 \cup F_1 \subset G$, $E \cap \partial G = \emptyset$, то

$$\int_{\omega(b)} |\nabla u_0|^{p-1} dL_n \geq 2b\, C_p(G/F).$$

Доказательство (см.также [I0]). Пусть A_j - объединение всех компонент связности α множества $R^n \setminus \omega$, для которых $\alpha \cap F_j \neq \emptyset$, где $j = 0,1$. Ясно, что $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Положим

$$E_j = \{x \in R^n : 0 < d(x, R^n \setminus A_j) < b\} .$$

Тогда $E_j \subset A_j$, $E_0 \cup E_1 \subset \omega(b)$. Дальше рассмотрим случай $j = 1$. Пусть

$$w = \begin{cases} \dfrac{u}{b} - u_0 , & x \in G ; \\ 0 , & x \notin G , \end{cases}$$

где $u = \min(b, d(x, R^n \setminus A_1))$ при $x \in R^n$. В силу известных свойств $d(x, R^n \setminus A_1)$, $|\nabla u| \leq 1$ для L_n-почти всех $x \in R^n$, $\nabla u = 0$ для L_n-почти всех $x \notin E_1$, u - постоянная в некоторой окрестности каждой компоненты

связности компакта E. Прибегая к операции усреднения по Соболеву, отсюда нетрудно заключить, что w – p-пробная функция для $C_p(G/F)$. Подставляя w в вариационное равенство теоремы 2 и преобразуя его с учетом свойств функции u, получим для экстремальной функции u_0 следующее соотношение:

$$\int_{E_1} |\nabla u_0|^{p-1} dL_n \int_{E_1 \cap G} |\nabla u_0|^{p-1} dL_n \geq b \int_G |\nabla u_0|^p dL_n = b \cdot C_p(G/F).$$

Аналогично установим неравенство $\int_{E_0 \cap G} |\nabla u_0|^{p-1} dL_n \geq b \cdot C_p(G/F)$.

Объединяя выписанные неравенства, приходим к требуемой оценке:

$$\int_{\omega(b)} |\nabla u_0|^{p-1} dL_n = \int_{\omega(b) \cap G} \geq \int_{E_0 \cap G} + \int_{E_1 \cap G} \geq 2b\, C_p(G/F).$$

Лемма доказана.

Пусть V – область в R^n такая, что $F_0 \cup F_1 \subset V$, $\partial V \cap E = \emptyset$; v – экстремальная функция для $C_p(V/F)$, $\nabla v = 0$ при $x \notin V$.

Лемма 6. Пусть выполнены условия леммы 5 и $H^{n-1}(\partial G) < \infty$, $V \Subset G$, $V \cap E = G \cap E$. Тогда

$$\int_\sigma |\nabla v|^{p-1} dH^{n-1} \geq C_p(V/F) \quad \text{для } M_q\text{-почти всех } \sigma \text{ из } \Sigma(G/F)$$

Доказательство этой леммы почти дословно совпадает с доказательством леммы 3.8 из [I].

5.3. Теорема 4. $M_q(\Sigma) = C_p(G/F)^{-q/p}$.

Доказательство. Пусть $(G(k)/F(k))$, u_k, v_k сохраняют смысл, указанный в доказательстве леммы 3. Пусть, кроме того, $\tilde{F}_0(k) \Subset F_0(k)$ – компакт, определяемый аналогично $F_0(k)$. Точнее, $F_0 \Subset \tilde{F}_0(k)$, $E \cap F_0(k) = E \cap \tilde{F}_0(k)$, $\tilde{F}_0(k)$ – замыкание некоторого открытого множества, $\partial \tilde{F}_0(k) \cap E = \emptyset$. Соответственно зададим множества $\tilde{F}_1(k) \Subset F_1(k)$, $\tilde{F}(k) \Subset F(k)$. Заметим теперь, что в определении p-емкости достаточно рассмотреть ограниченные допустимые и экстремальные функции. Покажем это на примере v_k и $u_0 = u(x, G/F)$, $x \in G$. Введем срезку $f = \max((\min v_k(x), 1), 0)$ при $x \in G(k)$. Тогда (см. [4, с.183]) $f \in L^1_p(G(k))$, $0 \leq f \leq 1$ на $G(k)$;

$$C_p(G/F)+\frac{1}{k}\geq\int\limits_{G(k)}|\nabla v_k|^p dL_n\geq\int\limits_{G(k)}|\nabla f|^p dL_n .$$

Поскольку f - ограниченная функция на ограниченном множестве $G(k)$, то $f\in W_p^1(G(k))$. По теореме 4.6 из [4, с.88], существует последовательность функций $f_m\in C_1^\infty(G(k))$, $m\in\mathbb{N}$, сходящаяся в $W_p^1(G(k))$ и, значит, в $L_p(G(k))$ к функции f. Положим $f_m=0$ при $x\notin G(k)$. Из доказательства теоремы 4.6 в [4, с.88] следует, что на наперед заданном компакте $K\subset G(k)$ при $m\geq m_0$ функция f_m совпадает с усреднением по Соболеву функции f с шагом h порядка $1/m$ и $0\leq f_m\leq 1$ при $x\in G(k)$. Следовательно, при достаточно больших m f_m - допустимая функция для $C_p(G/F)$ и $\int\limits_{G(k)}|\nabla f_m|^p dL_n$ мало отличается от $\int\limits_{G(k)}|\nabla f|^p dL_n$.

Таким образом, используя рассуждения доказательства теоремы I и теоремы вложения для соболевских пространств [4], получим последовательность функций $g_k: G\to[0,1]$, $k\in\mathbb{N}$, допустимых для $C_p(G/F)$ и сходящихся при $k\to\infty$ в $L_p^1(G)$ к экстремальной функции u_0 с требуемым свойством: $0\leq u_0\leq 1$ в G. Положим теперь $k=s$ и аппроксимируем изнутри область $G(s)$ последовательностью областей $G_m(s)$, $m\in\mathbb{N}$, таких, что $H^{n-1}(\partial G_m(s))<\infty$,

$$G_m(s)\cap E=G(s)\cap E,\ G_m(s)\Subset G_{m+1}(s),\ \partial G_m(s)\cap E=\emptyset,\ \bigcup_{m=1}^{\infty}G_m(s)=G(s).$$

Пусть $g_{m,s}$ - экстремальная функция для $C_p(G_m(s)/F(s))$, где $0\leq g_{m,s}\leq 1$ на $G_m(s)$. Используя равномерную выпуклость пространства $\mathcal{L}_n^p(G_m(s))$, находим функцию $g(s)\in L_p^1(G(s))$ такую, что $g_{m,s}\to g_s$ в $L_p^1(G_{m_0}(s))$ при $m\to\infty$ для всех $m_0\in\mathbb{N}$. При этом

$$\lim_{m\to\infty}C_p(G_m(s)/F(s))=\int\limits_{G(s)}|\nabla g_s|^p dL_n\leq C_p(G(s)/F(s));$$

$g(s) = j$ на $F_j(s)$, $g_s = const$ на каждой компоненте связности компакта $F(s)$ $(j = 0,1)$. Кроме того, применяя еще раз теорему 4.6 из [4, с.88], устанавливаем, что

$$\int_{G(s)} |\nabla g_s|^p dL_n \geq C_p(\tilde{F}_0(s), \tilde{F}_1(s), G(s)/\tilde{F}(s)) = C_p(G(s)/\tilde{F}(s))$$

и существует функция $w_s \in C^\infty(G(s))$, допустимая для $C_p(G(s)/\tilde{F}(s))$ и удовлетворяющая условиям

$$\int_{G(s)} |\nabla(w_s - g_s)|^p dL_n \leq \frac{1}{s}, \quad \int_G |\nabla w_s|^p dL_n \leq \int_G |\nabla g_s|^p dL_n + \frac{1}{s}.$$

Положим $w_s = 0$ при $x \notin G(s)$. Тогда w_s - допустимая функция для $C_p(G/F)$ и для нее справедливы оценки

$$C_p(G/F) \leq \int_G |\nabla w_s|^p dL_n \leq \int_{G(s)} |\nabla v_s|^p dL_n + \frac{1}{s} \leq C_p(G/F) + \frac{2}{s}.$$

Из доказательства теоремы I непосредственно следует, что $w_{s_1} \to u_0$ в $L^1_p(G)$ при $s \to \infty$. Тогда $g_s \to u_0$ в $L_p(G)$ при $s \to \infty$. Доказанные утверждения и лемма 6 приводят при $s \geq k$ к следующим соотношениям:

$$\int_\sigma |\nabla g_s|^{p-1} dH^{n-1} \geq \lim_{m \to \infty} C_p(G_m(s)/F(s)) \geq C_p(G/F),$$

$$\int_\sigma |\nabla u_0|^{p-1} dH^{n-1} \geq C_p(G/F) \quad \text{для } M_q\text{-почти всех } \sigma \text{ из } \Sigma(k).$$

Применяя теперь лемму 4 и теорему 3, стандартными рассуждениями (см. [I]) приходим к искомому утверждению.

Следствие. Пусть u - p-точная функция. Тогда u - экстремальная функция для $C_p(G/F)$ в том и только в том случае, когда $\int_\sigma |\nabla u|^{p-1} dH^{n-1} \geq \int_\sigma |\nabla u|^p dL_n$ для M_q-почти всех $\sigma \in \Sigma(G/F)$.

Замечание. В теоремах I, 2, 4 и в последнем следствии множество G можно считать ограниченным открытым множеством.

6. Пусть $\mathcal{D}$ - ограниченная область в R^n, для которой

$R^n \setminus \mathcal{D}$ состоит из двух компонент связности E_0 и E_1, причем E_0 – неограниченная компонента связности; и пусть K – некоторый компакт в R^n. Предположим сначала, что ни одна из компонент связности компакта K не соединяет E_0 и E_1. Пусть $\tilde{E}_j$ – объединение всех компонент связности α компакта K, где $\alpha \cap E_j \neq \emptyset$, и множества E_j, $j = 0,1$. Пусть G – компонента связности $R^n \setminus (\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1)$, для которой $\partial G \cap \tilde{E}_j \neq \emptyset$, $j = 0,1$. Тогда $G \subset \mathcal{D}$. Положим $F_0 = \partial G \cap \tilde{E}_0$, $F_1 = \partial G \cap \tilde{E}_1$, $F = K \cap G$. Через $\Sigma(\mathcal{D}/K)$ обозначим семейство всех компактов, расположенных в $\mathcal{D} \setminus K$ и разделяющих E_0, E_1. Нетрудно заметить, что $\Sigma(G/F) \subset \Sigma(\mathcal{D}/K)$ и $\Sigma(G/F)$ короче $\Sigma(\mathcal{D}/K)$. Поэтому $M_q(\Sigma(G/F)) = M_q(\Sigma(\mathcal{D}/K))$. Здесь q-модуль семейства $\Sigma(\mathcal{D}/K)$ определяется аналогично q-модулю семейства $\Sigma(G/F)$. Следуя Хедбергу [2], введем величину

$$\Gamma_p(\mathcal{D}/K) = \inf \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^p dL_n,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in C^\infty(R^n)$, имеющим компактный носитель, равным j на E_j, $j = 0,1$, и являющимися постоянными в некоторой окрестности каждой компоненты связности компакта K. Такие функции u назовем допустимыми. На самом деле, вводя срезки $f = \max\left(\left(\min \frac{u-\varepsilon}{1-2\varepsilon}, 1\right), 0\right)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, и их усреднения по Соболеву с малым шагом h, в определении $\Gamma_p(\mathcal{D}/K)$ достаточно рассмотреть допустимые функции, равные j в некоторой окрестности компакта F_j, $j = 0,1$ (см. также [4, с.166-167]). Отсюда нетрудно заключить, что $\Gamma_p(\mathcal{D}/K) = C_p(G/F)$. Объединяя полученные утверждения с теоремой 4, приходим к следующей теореме.

Теорема 5. $M_q(\Sigma(\mathcal{D}/K)) = (\Gamma_p(\mathcal{D}/K))^{-q/p}$. (4)

Если некоторая компонента связности компакта K соединяет E_0 и E_1, то $\Gamma_p(\mathcal{D}/K) \overset{def}{=\!=} \infty$, $M_q(\Sigma(\mathcal{D}/K)) \overset{def}{=\!=} 0$.

Таким образом, равенство (4) формально выполняется и в этом случае. Отметим, что теорема 5 дает ответ на вопрос, поставленный Хедбергом в [2, с.193].

7. Учитывая последние соглашения относительно $\Gamma_p(\mathcal{D}/K)$

и $M_q(\Sigma(\mathcal{D}/K))$, нетрудно заметить, что из доказательства теоремы 4 следует, по существу, более общий результат.

Теорема 6. Пусть в определении $C_p(G/F)$, $M_q(\Sigma(G/F))$ G - открытое ограниченное множество; F_0 , F_1 - непересекающиеся компакты в $\overline{G}$; F - произвольный компакт. Тогда

$$M_q(\Sigma(G/F)) = (C_p(G/F))^{-q/p} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ziemer W.P. Extremal length and conformal capacity. - Trans. Amer.Math.Soc., 1967, vol.126, N 3. p.460-473.
2. Hedberg L.J. Removable singularities and condenser capacities. - Arkiv.math., 1974, vol.12, N 1, p.181-201.
3. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М., 1987.
4. Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М., 1983.
5. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1976.
6. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976.
7. Yamamoto H. On a p-capacity of a condenser and KD^p-null-sets. - Hiroshima Math.J., 1978, vol.8, N 1, p.123-150.
8. Куратовский К. Топология. Т.2., М., 1969.
9. Fuglede B. Extremal length and functional completion. - Acta Math., 1957, vol.98, N 3-4, p.171-219.
10. Шлык В.А. K-емкость и задача Радо для отображений с ограниченным искажением. - Сибирск.мат.ж., 1990, т.31, № 1, с.179-186.