А. А. Кажымурат, О нижней оценке функционала энергии для семейства гамильтоново минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$,
Сиб. матем. журн., 2018, том 59, номер 4, 814–822

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2018. Том 59, № 4

УДК 514.154.4

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ГАМИЛЬТОНОВО МИНИМАЛЬНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ ТОРОВ В $\mathbb{C}P^2$

А. А. Кажымурат

Аннотация. Изучается функционал энергии на множестве лагранжевых торов в комплексной проективной плоскости. Доказано, что значение функционала энергии на одном семействе гамильтоново минимальных лагранжевых торов в комплексной проективной плоскости строго больше, чем для тора Клиффорда.

DOI 10.17377/smzh.2018.59.406

Ключевые слова: функционал энергии, лагранжевы торы, оператор Шрёдингера.

1. Введение

Как замечено в [1], с каждым лагранжевым тором в $\mathbb{C}P^2$ естественным образом связан двумерный оператор Шрёдингера. А именно, любой лагранжев тор $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$ с индуцированной метрикой

$$ds^2 = 2e^{v(x,y)}(dx^2 + dy^2) \tag{1}$$

может быть получен как образ композиции отображений

$$r : \mathbb{R}^2 \to S^5 \xrightarrow{\mathscr{H}} \mathbb{C}P^2,$$

где r — горизонтальное поднятие, $\mathscr{H}$ — проекция Хопфа. При этом векторфункция r удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$Lr = 0, \quad L = \left(\partial_x - \frac{i\beta_x}{2}\right)^2 + \left(\partial_y - \frac{i\beta_y}{2}\right)^2 + V(x,y), \quad V = 4e^v + \frac{1}{4}\left(\beta_x^2 + \beta_y^2\right) + \frac{i}{2}\Delta\beta,$$

где β — лагранжев угол (см. определение ниже).

Существование оператора L позволяет ввести функционал энергии E на множестве лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$ (см. [2]):

$$E(\Sigma) = \frac{1}{2}\int_\Sigma V\,dx \wedge dy.$$

Как показано в [2], у функционала энергии есть простой геометрический смысл:

$$E(\Sigma) = A(\Sigma) + \frac{1}{8}W(\Sigma), \quad A(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma, \quad W(\Sigma) = \int_\Sigma |H|^2\,d\sigma,$$

где $d\sigma = 2e^v dx \wedge dy$ — индуцированный элемент площади, H — вектор средней кривизны (в данном виде функционал энергии был впервые введен в [3]).

Для тора Клиффорда Σ_{Cl}, который задается с помощью вектор-функции

$$r(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\pi i x}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\pi i(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}y}{2})}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\pi i(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}y}{2})}\right),$$

энергия равна

$$E(\Sigma_{Cl}) = \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}}.$$

В [2] высказана

Гипотеза 1. *Минимум функционала энергии достигается на торе Клиффорда.*

В [2] гипотеза 1 проверена для двух семейств гамильтоново минимальных лагранжевых торов: для однородных торов и для торов, найденных в [4].

Однородный тор $\Sigma_{r_1,r_2,r_3} \subset \mathbb{C}P^2$, $r_1^2+r_2^2+r_3^2=1$, $r_i>0$, задается вектор-функцией

$$r(x,y) = (r_1 e^{2\pi i x}, r_2 e^{2\pi i(a_1x+b_1y)}, r_3 e^{2\pi i(a_2x+b_2y)})$$

с некоторыми ограничениями на a_i, b_i. Справедливо неравенство

$$E(\Sigma_{r_1,r_2,r_3}) = \frac{\pi^2\big(1-r_1^2\big)\big(1-r_2^2\big)\big(1-r_3^2\big)}{2r_1r_2r_3} \geq \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}},$$

причем равенство достигается только на торе Клиффорда.

Второе семейство торов $\Sigma_{m,n,k} \subset \mathbb{C}P^2$, $m,n,k\in\mathbb{Z}$, $m\geq n>0$, $k<0$, имеет вид $\mathscr{H}(\widetilde{\Sigma}_{m,n,k})$, где

$$\widetilde{\Sigma}_{m,n,k} = \{(u_1e^{2\pi i m y}, u_2e^{2\pi i n y}, u_3e^{2\pi i k y})\} \subset S^5,$$

числа u_1,u_2,u_3 удовлетворяют уравнениям

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=1, \quad mu_1^2+nu_2^2+ku_3^2=0.$$

Параметры m,n,k необходимо выбирать так, чтобы инволюция

$$(u_1,u_2,u_3) \longrightarrow (u_1\cos(m\pi), u_2\cos(n\pi), u_3\cos(k\pi))$$

на поверхности $mu_1^2+nu_2^2+ku_3^2=0$ сохраняла ее ориентацию (иначе $\mathscr{H}(\widetilde{\Sigma}_{m,n,k})$ будет бутылкой Клейна, см. [4]). В [2] доказано, что $E(\Sigma_{m,n,k}) > E(\Sigma_{Cl})$. В случае минимальных лагранжевых торов функция $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению Цицейки (см., например, [5]). Гладкие периодические решения этого уравнения являются конечнозонными, т. е. выражаются через тэта-функцию многообразия Якоби спектральной кривой. Из [6] следует, что гипотеза 1 верна для минимальных лагранжевых торов, отвечающих спектральным кривым достаточно большого рода.

Цель этой работы — проверить гипотезу 1 для семейства гамильтоново минимальных лагранжевых торов, построенных в [5] (см. также [7]).

Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}$, $b=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$, $c=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3$, $c_1=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $a_1>a_2>0$ — некоторые вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам (3), (4) (см. ниже). В [5] доказана

Теорема 1.1. *Отображение* $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$, *заданное формулой*

$$\psi(x,y) = (F_1(x)e^{i(G_1(x)+\alpha_1 y)} : F_2(x)e^{i(G_2(x)+\alpha_2 y)} : F_3(x)e^{i(G_3(x)+\alpha_3 y)}),$$

является конформным гамильтоново минимальным лагранжевым погружением, где

$$F_i = \sqrt{\frac{2e^v + \alpha_{i+1}\alpha_{i+2}}{(\alpha_i - \alpha_{i+1})(\alpha_i - \alpha_{i+2})}}, \quad G_i = \alpha_i \int\limits_0^x \frac{c_2 - ae^v}{2\alpha_i e^v - c_1}\, dz,$$

$$2e^{v(x)} = a_1\left(1 - \frac{a_1 - a_2}{a_1}\mathrm{sn}^2\left(x\sqrt{a_1 + a_3}, \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_3}\right)\right)$$

(*индекс* i *рассматривается по модулю* 3), $\mathrm{sn}(x)$ — *эллиптическая функция Якоби*, c_2 — *вещественный корень уравнения* (2), $a_3 = \frac{c_1^2 + c_2^2}{a_1 a_2}$.

Если выполняются дополнительные условия рациональности (7), то ψ — двоякопериодическое отображение и образ плоскости является гамильтоново минимальным лагранжевым тором $\Sigma_M \subset \mathbb{C}P^2$.

Основным результатом этой работы является

Теорема 1.2. *Если* $\alpha_1 - \alpha_3$, $\alpha_2 - \alpha_3$ *взаимно просты, то имеет место неравенство*

$$E(\Sigma_M) > E(\Sigma_{Cl}).$$

Таким образом, теорема 1.2 подтверждает гипотезу 1.

2. Доказательство теоремы 1.2

В силу лагранжевости Σ и горизонтальности отображения $r : \mathbb{R}^2 \to S^5$, а также в силу того, что индуцированная метрика на Σ имеет вид (1), получаем

$$R = \begin{pmatrix} r \\ \frac{r_x}{|r_x|} \\ \frac{r_y}{|r_y|} \end{pmatrix} \in U(3).$$

Лагранжев угол $\beta(x,y)$ определяется из равенства $e^{i\beta} = \det R$. Через лагранжев угол выражается вектор средней кривизны $H = J\nabla\beta$, где J — комплексная структура на $\mathbb{C}P^2$. Для минимальных торов $\beta = \mathrm{const}$. Как следует из [8], в случае гамильтоново минимальных торов β является линейной функцией в изотермических координатах x, y.

Рассмотрим гамильтоново минимальное отображение ψ [5], указанное в теореме 1.1.

Уравнение

$$(a_1 - a_2)^2 x^4 + 2\big(a_1^3 a_2^2 + a_1^2 a_2^3 + \big(a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2\big)bc_1 + \big(a_1^2 + a_2^2\big)c_1^2 + 2a_1^2 a_2^2 c\big)x^2 + \big((a_1 + a_2)c_1^2 - a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2 bc_1\big)^2 = 0 \quad (2)$$

имеет вещественный корень $x = c_2$, если выполнены следующие неравенства:

$$P = a_1^3 a_2^2 + a_1^2 a_2^3 + \big(a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2\big)bc_1 + \big(a_1^2 + a_2^2\big)c_1^2 + 2a_1^2 a_2^2 c \le 0, \quad (3)$$

$$P^2 - (a_1 - a_2)^2\big((a_1 + a_2)c_1^2 - a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2 bc_1\big)^2 \ge 0. \quad (4)$$

Напомним, что $\mathrm{sn}(u, k) = \sin\theta$, где

$$u(\theta) = \int\limits_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}}. \tag{5}$$

Функция $\mathrm{sn}^2(u)$ является периодической с периодом $2u\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (см., например, [9]), следовательно, $v(x)$ имеет период

$$T = \frac{2u\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{a_1 + a_3}}. \tag{6}$$

Далее предположим, что $(\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_3) = 1$.

Погружение $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$ является двоякопериодическим, если существует $\tau \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{G_1(T) - G_3(T) + (\alpha_1 - \alpha_3)\tau}{2\pi} \in \mathbb{Q}, \\ \lambda_2 &= \frac{G_2(T) - G_3(T) + (\alpha_2 - \alpha_3)\tau}{2\pi} \in \mathbb{Q}. \end{aligned} \tag{7}$$

При этом векторы периодов имеют вид

$$e_1 = (0, 2\pi), \quad e_2 = N(T, \tau),$$

где N — некоторое натуральное число. Если условие (7) выполнено, то $\Sigma_M \subset \mathbb{C}P^2$ — погруженный тор с лагранжевым углом $\beta = ax + by$, где

$$a = \frac{bc_1 + a_1a_3 + a_2a_3 - a_1a_2}{c_2}.$$

Имеет место равенство

$$|H|^2 = \frac{1}{2} e^{-v}(a^2 + b^2).$$

Найдем нижние оценки для $W(\Sigma_M)$ и $A(\Sigma_M)$.

Из (6) и $a_3 > 0$ следуют неравенства

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) > \frac{\pi}{2}, \quad T > \frac{\pi}{\sqrt{a_1 + a_3}}.$$

Имеем

$$W(\Sigma_M) = \int\limits_{\Sigma_M} |H|^2 \, d\sigma = \int\limits_{\Lambda} \frac{1}{2} e^{-v}(a^2 + b^2) 2e^v \, dx \wedge dy = 2\pi N T (a^2 + b^2).$$

Таким образом, выполняется нижняя оценка для $W(\Sigma_M)$:

$$W(\Sigma_M) > 2\pi^2 \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a_1 + a_3}}. \tag{8}$$

Следующая лемма дает оценку на $A(\Sigma_M)$.

Лемма 2.1. *Имеет место неравенство*

$$A(\Sigma_M) > \pi^2 \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{a_1 + a_3}}.$$

Доказательство леммы 2.1. Имеем

$$A(\Sigma_M) = \int\limits_{\Sigma_M} d\sigma = \int\limits_{\Lambda} 2e^{v(x)}\, dx \wedge dy = 2\pi \int\limits_0^{NT} 2e^{v(x)}\, dx \geq 2\pi \int\limits_0^{T} 2e^{v(x)}\, dx$$

$$= 2\pi \int\limits_0^T a_1 \biggl(1 - \frac{a_1 - a_2}{a_1} \mathrm{sn}^2\biggl(x\sqrt{a_1 + a_3}, \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_3}\biggr)\biggr)\, dx$$

$$= \frac{2\pi a_1}{\sqrt{a_1 + a_3}} \int\limits_0^{2u(\frac{\pi}{2})} \biggl(1 - \frac{a_1 - a_2}{a_1} \mathrm{sn}^2\biggl(u, \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_3}\biggr)\biggr)\, du.$$

Из (5) получаем

$$\int\limits_0^T 2e^{v(x)}\, dx = \frac{a_1}{\sqrt{a_1 + a_3}} \int\limits_0^{\pi} \frac{1 - \frac{a_1 - a_2}{a_1} \sin^2\theta}{\sqrt{1 - \bigl(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_3}\bigr)^2 \sin^2\theta}}\, d\theta.$$

Так как $0 < \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_3} < 1$, верна оценка

$$\int\limits_0^T 2e^{v(x)}\, dx > \frac{a_1}{\sqrt{a_1 + a_3}} \int\limits_0^{\pi} \biggl(1 - \frac{a_1 - a_2}{a_1} \sin^2\theta\biggr)\, d\theta = \frac{\pi(a_1 + a_2)}{2\sqrt{a_1 + a_3}}.$$

Лемма 2.1 доказана.

Неравенства (3), (4) инвариантны при одновременной замене знаков у α_1, α_2, α_3 и при их перестановках. Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ все одного знака, то у неравенства (3) нет положительных решений. Поэтому без потери общности предположим, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0 \geq \alpha_3$.

Лемма 2.2. *Если $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0 \geq \alpha_3$ и $a_1 > a_2 > 0$, то неравенства* (3) *и* (4) *выполняются одновременно тогда и только тогда, когда*

$$-\alpha_2\alpha_3 \leq a_2 < a_1 \leq -\alpha_1\alpha_3. \tag{9}$$

Доказательство леммы 2.2. Положим

$$Q(x) = -(x + \alpha_1\alpha_2)(x + \alpha_1\alpha_3)(x + \alpha_2\alpha_3).$$

Тогда (2) примет вид

$$(a_1 - a_2)^2 \biggl(x^2 - \biggl(\frac{a_1\sqrt{Q(a_2)} - a_2\sqrt{Q(a_1)}}{a_1 - a_2}\biggr)^2\biggr)$$

$$\times \biggl(x^2 - \biggl(\frac{a_1\sqrt{Q(a_2)} + a_2\sqrt{Q(a_1)}}{a_1 - a_2}\biggr)^2\biggr) = 0.$$

У этого уравнения есть вещественный корень тогда и только тогда, когда $Q(a_1) \geq 0$, $Q(a_2) \geq 0$. Это эквивалентно $-\alpha_2\alpha_3 \leq a_2 < a_1 \leq -\alpha_1\alpha_3$. Лемма 2.2 доказана.

Из доказательства леммы 2.2 следует, что при $\alpha_3 = 0$ или $\alpha_1 = \alpha_2$ неравенства (3), (4) не выполняются при $a_1 > a_2$. Поэтому без потери общности предположим, что

$$\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0 > \alpha_3. \tag{10}$$

Из (8) и леммы 2.1 следует неравенство

$$E(\Sigma_M) > \pi^2 \frac{a_1 + a_2 + \frac{a^2+b^2}{4}}{\sqrt{a_1 + a_3}}.$$

Докажем, что $E(\Sigma_M) > E(\Sigma_{Cl})$. Рассмотрим два случая $\alpha_2 > 0$ и $\alpha_2 = 0$. Предположим, что $\alpha_2 > 0$. Если $(a_1 + a_2)a_3 \geq \frac{7}{4}(a_1 a_2 - bc_1)$, то

$$a^2 = \frac{((a_1 + a_2)a_3 - (a_1 a_2 - bc_1))^2}{c_2^2} \geq \frac{9}{49}(a_1 + a_2)^2 \frac{a_3^2}{c_2^2}$$
$$= \frac{9}{49}(a_1 + a_2)^2 \frac{a_3}{a_1 a_2} \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_2^2} \geq \frac{9}{49}(a_1 + a_2)^2 \frac{a_3}{a_1 a_2}.$$

Так как $a_1 > a_2 \geq 1$ и $(a_1 + a_2)^2 > 4a_1 a_2$, то

$$E(\Sigma_M) > \pi^2 \frac{a_1 + a_2 + \frac{9(a_1+a_2)^2 a_3}{196 a_1 a_2}}{\sqrt{a_1 + a_3}} > \pi^2 \frac{a_1 + \frac{9a_3}{49}}{\sqrt{a_1 + a_3}}$$
$$= \pi^2 \sqrt{a_1} \frac{1 + \frac{9a_3}{49a_1}}{\sqrt{1 + \frac{a_3}{a_1}}} > \pi^2 \frac{1 + \frac{9a_3}{49a_1}}{\sqrt{1 + \frac{a_3}{a_1}}}.$$

Заметим, что для положительных x выполняется $\frac{1+\frac{9x}{49}}{\sqrt{1+x}} > \frac{4}{3\sqrt{3}}$. Следовательно, $E(\Sigma_M) > E(\Sigma_{Cl})$.

Рассмотрим случай

$$(a_1 + a_2)a_3 < \frac{7}{4}(a_1 a_2 - bc_1).$$

Далее разберем два случая $\alpha_1 > -\frac{3}{2}\alpha_2\alpha_3$ и $\alpha_1 \leq -\frac{3}{2}\alpha_2\alpha_3$. Если $\alpha_1 > -\frac{3}{2}\alpha_2\alpha_3$, то $\alpha_1 < -3b = 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, так как $\alpha_1 > -\frac{3}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)$. В силу (9)

$$-\frac{bc_1}{a_1 + a_2} = \frac{b\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{a_1 + a_2} < \frac{b(3b)\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_2\alpha_3} = \frac{3}{2}b^2.$$

Следовательно,

$$E(\Sigma_M) > \pi^2 \frac{a_1 + a_2 + \frac{b^2}{4}}{\sqrt{a_1 + a_3}} > \pi^2 \frac{a_1 + a_2 + \frac{b^2}{4}}{\sqrt{a_1 + \frac{7}{4}\frac{a_1 a_2}{a_1+a_2} - \frac{7}{4}\frac{bc_1}{a_1+a_2}}} > \pi^2 \frac{a_1 + a_2 + \frac{b^2}{4}}{\sqrt{a_1 + \frac{7}{4}a_2 + \frac{21}{8}b^2}}$$
$$> \pi^2 \frac{a_1 + a_2 + \frac{b^2}{4}}{\sqrt{\frac{7}{4}a_1 + \frac{7}{4}a_2 + \frac{21}{8}b^2}} = \pi^2 \sqrt{\frac{4(a_1 + a_2)}{7}} \frac{1 + \frac{b^2}{4(a_1+a_2)}}{\sqrt{1 + \frac{3}{2}\frac{b^2}{a_1+a_2}}}$$
$$> \pi^2 \sqrt{\frac{8}{7}} \frac{1 + \frac{b^2}{4(a_1+a_2)}}{\sqrt{1 + \frac{3}{2}\frac{b^2}{a_1+a_2}}} > E(\Sigma_{Cl}).$$

Последнее неравенство следует из анализа функции $f(x) = \sqrt{\frac{8}{7}}\frac{1+\frac{x}{4}}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x}}$ при $x > 0$.

Если $\alpha_1 \le -\frac{3}{2}\alpha_2\alpha_3$, то в силу (9) и (10) $-bc_1 \le -2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 < \frac{9}{2}a_1a_2^2$. Следовательно,

$$E(\Sigma_M) > \pi^2 \frac{a_1+a_2}{\sqrt{a_1+\frac{7}{4}\frac{a_1a_2-bc_1}{a_1+a_2}}} = \pi^2\frac{(a_1+a_2)\sqrt{a_1+a_2}}{\sqrt{a_1(a_1+a_2)+\frac{7}{4}a_1a_2-\frac{7}{4}bc_1}}$$
$$> \pi^2\frac{(a_1+a_2)\sqrt{a_1+a_2}}{\sqrt{a_1^2+\frac{11}{4}a_1a_2+\frac{63}{8}a_1a_2^2}} > \pi^2\frac{(a_1+a_2)\sqrt{a_1+a_2}}{\sqrt{a_1^3+\frac{11}{4}a_1^2a_2+\frac{63}{8}a_1a_2^2}}$$
$$= \pi^2\frac{\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right)\sqrt{1+\frac{a_2}{a_1}}}{\sqrt{1+\frac{11}{4}\frac{a_2}{a_1}+\frac{63}{8}\frac{a_2^2}{a_1^2}}} > E(\Sigma_{Cl}).$$

Разберем случай $\alpha_2 = 0$. Положим $p = -\alpha_1\alpha_3$, $x = \frac{a_1}{p}, y = \frac{a_2}{p}$. Из (10) следует, что $0 < y < x \le 1$. Тогда неравенства (3), (4) принимают вид

$$p^5x^2y^2(x+y-2) \le 0, \quad 4p^{10}x^4y^4(1-x)(1-y) \ge 0.$$

Из (2) получаем

$$c_2^2 = p^3x^2y^2\frac{2-x-y\pm\sqrt{(2-x-y)^2-(x-y)^2}}{(x-y)^2}. \tag{11}$$

В силу $2-x-y>0$ имеем $\sqrt{(2-x-y)^2-(x-y)^2} = (2-x-y)\sqrt{1-\frac{(x-y)^2}{(2-x-y)^2}}$. Заметим, что по неравенству Бернулли

$$1-\frac{(x-y)^2}{(2-x-y)^2} \le \sqrt{1-\frac{(x-y)^2}{(2-x-y)^2}} \le 1-\frac{(x-y)^2}{2(2-x-y)^2}.$$

Следовательно,

$$2-x-y-\frac{(x-y)^2}{2-x-y} \le \sqrt{(2-x-y)^2-(x-y)^2}$$
$$\le 2-x-y-\frac{(x-y)^2}{2(2-x-y)}. \tag{12}$$

Рассмотрим два случая: знаки $+$ и $-$ в (11). При знаке $-$ из (11) и (12) следуют неравенства

$$p^3\frac{x^2y^2}{2(2-x-y)} \le c_2^2 \le p^3\frac{x^2y^2}{2-x-y}.$$

Так как $c_1 = 0$, то

$$a_3 = \frac{c_2^2}{a_1a_2}, \quad p\frac{xy}{2(2-x-y)} \le a_3 \le p\frac{xy}{2-x-y}.$$

Из этих оценок и леммы 2.1 получаем

$$A(\Sigma_M) \ge \pi^2\sqrt{p}\frac{x+y}{\sqrt{x+\frac{xy}{2-x-y}}}.$$

Справедливо неравенство

$$a = \frac{(a_1+a_2)a_3 - a_1a_2}{c_2} \geq \frac{(xp+yp)p\frac{xy}{2(2-x-y)} - xyp^2}{c_2} \geq \sqrt{p}\left(\frac{x+y}{2(2-x-y)} - 1\right)\sqrt{2-x-y}.$$

Из (8) следует, что

$$W(\Sigma_M) \geq 2\pi^2 \frac{a^2}{\sqrt{a_1+a_3}} \geq 2\pi^2\sqrt{p}\left(\frac{x+y}{2(2-x-y)} - 1\right)^2 \frac{2-x-y}{\sqrt{x+\frac{xy}{2-x-y}}}.$$

Таким образом,

$$E(\Sigma_M) \geq \pi^2\sqrt{p}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x+\frac{xy}{2-x-y}}} + \frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{2(2-x-y)} - 1\right)^2 \frac{2-x-y}{\sqrt{x+\frac{xy}{2-x-y}}}\right).$$

Так как $p \geq 1$, то

$$E(\Sigma_M) \geq \pi^2 B_1(x,y), \quad B_1(x,y) = \frac{16 - 7x^2 + 8x - 14yx + 8y - 7y^2}{16\sqrt{(2-x)(2-x-y)x}}.$$

Лемма 2.3. *Если* $0 < y < x \leq 1$, *то* $B_1(x,y) > 1$.

Доказательство леммы 2.3. Прямыми вычислениями проверяется, что внутри треугольника $0 < y < x \leq 1$ нет критических точек $\partial_x B_1 = \partial_y B_1 = 0$, а на границе этого треугольника выполнено $B_1(x,y) > 1$. Лемма 2.3 доказана.

Следовательно, при знаке $-$ в (11) выполняется $E(\Sigma_M) > E(\Sigma_{Cl})$. При знаке $+$ в (11) из (12) следуют неравенства $p^3 f(x,y) \leq c_2^2 \leq p^3 g(x,y)$, где

$$f(x,y) = x^2y^2\frac{2(2-x-y) - \frac{(x-y)^2}{2-x-y}}{(x-y)^2}, \quad g(x,y) = x^2y^2\frac{2(2-x-y) - \frac{(x-y)^2}{2(2-x-y)}}{(x-y)^2}.$$

Аналогично доказываются неравенства

$$p\frac{f(x,y)}{xy} \leq a_3 \leq p\frac{g(x,y)}{xy}, \quad a \geq \sqrt{p}\frac{(x+y)\frac{f(x,y)}{xy} - xy}{\sqrt{g(x,y)}}.$$

Из (8) и леммы 2.1 получаем

$$A(\Sigma_M) \geq \pi^2\sqrt{p}\frac{x+y}{\sqrt{x+\frac{g(x,y)}{xy}}},$$

$$W(\Sigma_M) \geq 2\pi^2\frac{a^2}{\sqrt{a_1+a_3}} \geq 2\pi^2\sqrt{p}\frac{\left((x+y)\frac{f(x,y)}{xy} - xy\right)^2}{g(x,y)\sqrt{x+\frac{g(x,y)}{xy}}},$$

$$E(\Sigma_M) \geq \pi^2\sqrt{p}\frac{x+y+\frac{1}{4}\frac{((x+y)\frac{f(x,y)}{xy} - xy)^2}{g(x,y)}}{\sqrt{x+\frac{g(x,y)}{xy}}} \geq \pi^2 B_2(x,y),$$

где

$$B_2(x,y) = \frac{x+y+\frac{1}{4}\frac{((x+y)\frac{f(x,y)}{xy} - xy)^2}{g(x,y)}}{\sqrt{x+\frac{g(x,y)}{xy}}}.$$

Лемма 2.4. *Если* $0 < y < x \leq 1$, *то* $B_2(x, y) > 0.9$.

Доказательство леммы 2.4. Прямыми вычислениями проверяется, что значение B_2 в критических точках больше 0.9. Необходимо проверить границу области $0 < y < x \leq 1$; у функции B_2 полюс на прямой $x = y$, прямыми вычислениями проверяется, что значение B_2 на отрезках $y = 0$, $0 < x < 1$ и $x = 1$, $0 < y < 1$ строго больше 0.9. Лемма 2.4 доказана.

Это доказывает теорему 1.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миронов А. Е.* Иерархия уравнений Веселова — Новикова и интегрируемые деформации минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2004. Т. 1. С. 38–46.
2. *Ma H, Mironov A. E., Zuo. D.* An energy functional for Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$ // arXiv 1701.07211. 12 p.
3. *Montiel S., Urbano F.* A Willmore functional for compact surfaces in the complex projective plane // J. Reine Angew. Math. 2002. V. 546. P. 139–154.
4. *Миронов А. Е.* О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 1. С. 89–102.
5. *Миронов А. Е.* О гамильтоново-минимальных лагранжевых торах в $\mathbb{C}P^2$ // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1324–1328.
6. *Haskins M.* The geometric complexity of special Lagrangian T^2-cones // Invent. Math. 2004. V. 157, N 1. P. 11–70.
7. *Ma H., Schmies M.* Examples of Hamiltonian stationary Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$ // Geom. Dedicata. 2006. V. 118. P. 173–183.
8. *Oh. Y.* Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations // Math. Z. 1993. Bd 212, Heft 1. S. 175–192.
9. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 23 сентября 2017 г.

Кажымурат Акназар Арманулы
Назарбаев интеллектуальная школа
физ.-мат. направления г. Алматы,
ул. Б. Жамакаева, 145, Алматы 55000, Казахстан
akkazhymurat@gmail.com