



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Благовещенский, О волнах, порожденных источниками, локализованными на бесконечности, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2018, том 471, 59–75

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

19 февраля 2025 г., 10:51:24



А. С. Благовещенский

О ВОЛНАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ИСТОЧНИКАМИ, ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ.

Пространство-время \mathbb{R}^4 компактифицируется с помощью присоединения многообразия бесконечно удаленных точек. Ставится и решается задача построения решения волнового уравнения с правой частью (источником волн) – обобщенной функцией с носителем на многообразии бесконечно удаленных точек. Формулируются условия, которым должен удовлетворять источник. Эти условия имеют весьма жесткий характер.

1. В данной статье рассматривается волновое уравнение

$$U_{tt} - \Delta_X U = \Phi(X, t). \quad (1)$$

Здесь $X = \{X_1, X_2, X_3\} \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, Δ_X – оператор Лапласа по переменным X .

Уравнение (1) описывает распространение волн, порожденных источниками, распределенными в пространстве-времени. Распределение источников задается правой частью $\Phi(X, t)$. Тожественное равенство нулю функции $\Phi(X, t)$ означает отсутствие источников волн, находящихся на конечном расстоянии. В связи с этим возникает вопрос: существовали ли эти волны вечно? или все-таки “на бесконечности” существовал источник, породивший эти волны? Несмотря на то, что постановка вопроса представляется надуманной, она допускает строгую математическую, естественную в некотором смысле формулировку.

Основная идея дальнейшего рассмотрения заключается в том, что мы осуществляем компактификацию пространства \mathbb{R}^4 , присоединяя к нему многообразие бесконечно удаленных точек и рассматриваем уравнение (1) на компактифицированном пространстве \mathbb{R}^4 . Волновым полем, отвечающим бесконечно удаленным источникам, естественно назвать решение уравнения (1), где в правой части стоит обобщенная функция, сосредоточенная на этом бесконечно удаленном многообразии. Указанная программа была реализована в работе [1], где

Ключевые слова: волновое уравнение, функция описывающая источник, двойное преобразование Кельвина, предельный переход.

Исследование выполнено при поддержке гранта СПбГУ No. 11.38.263.2014.

описаны источники типа δ -функции, сосредоточенной на бесконечно удаленном многообразии, и соответствующие им волновые поля, причем оказалось, что функция, описывающая такие источники, должна удовлетворять весьма жестким ограничениям. В статье [2] с обсуждаемой здесь точки зрения рассмотрены плоские волны. В настоящей работе удалось существенно расширить класс допустимых источников. Точные формулировки – в разделе 6. Условия на функции, задающие источники, формулируются в терминах преобразования Радона или преобразования Фурье (формулы (25) и (28)).

2. Для выбора естественного способа компактификации пространства \mathbb{R}^4 обратим внимание на следующее, легко проверяемое свойство волнового уравнения (1).

Пусть $U(X, t)$ – произвольное решение однородного уравнения (1), достаточно быстро убывающее на бесконечности в пространственных направлениях (т.е. при $X \rightarrow \infty$). Пусть точка (X, t) стремится к бесконечности так, что $X(t) = (t + p)\omega + \Delta X(t)$, где $\omega \in \mathbb{R}^3$ – произвольный фиксированный единичный вектор ($|\omega|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1$), $p \in \mathbb{R}$, p – фиксированная константа, $t \rightarrow \pm\infty$; $\Delta X(t)$ обладает свойствами:

- 1) $|\Delta X(t)| = o(t)$,
- 2) $2t\langle\omega, \Delta X(t)\rangle + |\Delta X(t)|^2 = o(t)$, $\langle\omega, \Delta X\rangle := \Sigma\omega_i\Delta X_i$.

Такой способ ухода на бесконечность ($[p, \omega]$ -стремление) означает, грубо говоря, что точка уходит на бесконечность со скоростью, равной единице, т.е. скоростью распространения волн.

Существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} tU(X(t), t) = f(p, \omega)$, не зависящий от выбора $\Delta X(t)$, удовлетворяющего условиям 1), 2).

Обратим специально внимание на то, что величина предела не зависит от того, стремится ли t к плюс или минус бесконечности. Если же точка уходит на бесконечность со скоростью большей или меньшей скорости волн, т.е. в пространственном или времени-подобном направлении, то указанный предел есть нуль. Эти факты легко могут быть доказаны с помощью явных формул для решения задачи Коши, [3 с. 204, 4].

Высказанные соображения делают естественным следующий способ компактификации пространства \mathbb{R}^4 . Присоединим к пространству бесконечно удаленные точки, получающиеся при $[p, \omega]$ -стремлении точек к бесконечности, при этом отождествим точки, получающиеся при

$t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ при фиксированных p и ω . Все бесконечно удаленные точки, получающиеся при уходе точки на бесконечность в нехарактеристическом направлении, отождествим. Множество пар $(p, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, дополненное точкой $p = \infty$, можно рассматривать как параметризацию на множестве бесконечно удаленных точек.

Отметим специальный случай $[p, \omega]$ -стремления к бесконечности, когда $\Delta X(t)$ не зависит от t ; $X(t)$ уходит на бесконечность вдоль характеристической прямой

$$X(t) = \omega(t + p) + \Delta X. \quad (2)$$

Свойства 1), 2) выполнены, если $\langle \omega, \Delta X \rangle = 0$. Прямые (2) заметают характеристическую плоскость в \mathbb{R}^4

$$\langle \omega, X \rangle - t = p.$$

Тем самым пары (p, ω) можно рассматривать и как параметры, задающие характеристические плоскости.

Компактифицированное пространство приобретает структуру C^∞ -многообразия. Чтобы доказать это, достаточно указать окрестности бесконечно удаленных точек, диффеоморфные шару в \mathbb{R}^4 и координаты в этих окрестностях.

Введем предварительно операцию инверсии¹ относительно точки X^*, t^* :

$$(X, t) \xrightarrow{J_{X^*, t^*}} (\xi, \tau),$$

где $\xi = \frac{X - X^*}{(t - t^*)^2 - |X - X^*|^2}$, $\tau = \frac{t - t^*}{(t - t^*)^2 - |X - X^*|^2}$. Пусть точка (X, t) $[p, \omega]$ -стремится к бесконечности. Тогда при условии, что $\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p \neq 0$, $\xi \rightarrow \hat{\xi} = \frac{\omega}{2(\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p)}$, $\tau \rightarrow \hat{\tau} = \frac{1}{2(\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p)}$. Очевидно, точка $(\hat{\xi}, \hat{\tau})$ лежит на конусе $\hat{\tau}^2 - \hat{\xi}^2 = 0$. Примем за координаты в окрестности бесконечно удаленной точки (p, ω) декартовы координаты (ξ, τ) в окрестности $(\hat{\xi}, \hat{\tau})$ — образа бесконечно удаленной точки (p, ω) при инверсии J_{X^*, t^*} . Ограничение $\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p \neq 0$ на (p, ω) легко снимается с помощью изменения выбора точки (X^*, t^*) . Тем самым компактифицированное пространство \mathbb{R}^4 приобретает структуру бесконечно дифференцируемого многообразия. Можно показать ([5 с. 354, 6]), что указанное

¹Преобразование инверсии в совокупности с преобразованиями Лоренца, сдвига и растяжения образуют конформную группу преобразований псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,3}$.

многообразии диффеоморфно $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ с отождествленными противоположными точками.

3. Преобразование инверсии тесно связано с уравнением (1). А именно: пусть $U(X, t)$ удовлетворяет однородному уравнению (1). Тогда функция

$$V(\xi, \tau) =: KU = \frac{1}{\tau^2 - |\xi|^2} U\left(\frac{\xi}{\tau^2 - |\xi|^2}, \frac{\tau}{\tau^2 - |\xi|^2}\right) \quad (3)$$

при $\tau^2 - |\xi|^2 \neq 0$ также удовлетворяет уравнению

$$V_{\tau\tau} - \Delta_\xi V = 0.$$

Преобразование (3) носит название преобразование Кельвина (Отметим также, что некоторые предпочитают называть его преобразованием Бейтмена [7]). Преобразование Кельвина может быть построено с помощью инверсии относительно любой точки (X^*, t^*) .

Определение. Пусть функция V удовлетворяет уравнению

$$V_{\tau\tau} - \Delta_\xi V = \Phi(\xi, \tau),$$

где $\Phi(\xi, \tau)$ – есть обобщенная функция с носителем на конусе $\tau^2 = \xi^2$ (образе многообразия точек на бесконечности). Будем интерпретировать функцию $U(X, t) = (K^{-1}V)(X, t)$ как волновое поле, порожденное источниками, локализованными на бесконечности.

4. Примеры. Здесь рассмотрено с указанных выше позиций два хорошо известных решения волнового уравнения.

Пример 1. Плоская волна. Пусть $U = f(t - \langle X, \omega_0 \rangle)$, где ω_0 – единичный вектор, точка (X, t) $[p, \omega]$ -стремится к бесконечности. Для простоты будем рассматривать простейшую реализацию $[p, \omega]$ -стремления точки к бесконечности: $X(t) = (t + p)\omega$ ($t \rightarrow \infty$). Функцию f предполагаем финитной и бесконечно дифференцируемой. Очевидно, при $\omega \neq \omega_0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} t f(t - (t + p)\langle \omega, \omega_0 \rangle) = 0$, при $\omega = \omega_0$ и $f(-p) \neq 0$ этот предел равен бесконечности. Эти соображения подсказывают, что указанный предел является обобщенной функцией от переменных p, ω .

Справедливо утверждение: $[p, \omega]$ -предел

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} tU(X(t), t) = 2\pi\delta_{\omega_0}(\omega)g^\pm(p),$$

где $g^+(p) = \int_{-p}^{\infty} f(s) ds$, $g^-(p) = - \int_{-\infty}^{-p} f(s) ds$, $\delta_{\omega_0}(\omega)$ – дельта функция на единичной сфере, сосредоточенная в точке ω_0 .

Действительно, рассмотрим функционал

$$t(U, \psi) = t \iint f(t - (t+p)\langle \omega, \omega_0 \rangle) \psi(p, \omega) dp dS_{\omega}.$$

Здесь $\psi(p, \omega) = \psi(p, \theta, \varphi)$ – бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, финитная по переменной p ; θ, φ – сферические координаты на единичной сфере, угол θ отсчитывается от направления ω_0 .

Пусть $\widehat{\psi}(p, \cos \theta) = \int_0^{2\pi} \psi(p, \theta, \varphi) d\varphi$. Легко видеть, что функция $\widehat{\psi}(p, \sigma)$ бесконечно дифференцируема на полосе $\mathbb{R} \times [-1, 1]$, финитна по p , $\widehat{\psi}(p, 1) = 2\pi\psi(p, \omega_0)$. Тогда функционал $t(U, \psi)$ приобретает вид:

$$\begin{aligned} t(U, \psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp t \int_0^{\pi} f(t - (t+p) \cos \theta) \widehat{\psi}(p, \cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp t \int_{-1}^1 f(t - (t+p)\sigma) \widehat{\psi}(p, \sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $tf(t - (t+p)\sigma)$ обладает свойствами:

1) Интеграл $t \int_a^b f(t - (t+p)\sigma) d\sigma = -\frac{t}{t+p} \int_{t(1-a)-ap}^{t(1-b)-bp} f(s) ds$ ограничен при всех $(a, b) \in [-1, 1]$.

2) Этот интеграл стремится к нулю при всех $b < 1$, $t \rightarrow \infty$.

При $b = 1$ $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t \int_a^1 f(t - (t+p)\sigma) d\sigma \rightarrow g^{\pm}(p)$.

Свойства 1), 2) означают, что функция $tf(t - (t+p)\sigma) \rightarrow \delta(\sigma)g^{\pm}(p)$, функционал $t(U, \psi) \rightarrow 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp g^{\pm}(p)\psi(p, \omega_0)$.

Заметим, что “скачок” плоской волны на бесконечности, т.е. разность $[p, \omega]$ -пределов при $t \rightarrow \pm\infty$ есть $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds \delta_{\omega_0}(\omega)$. В частности, плоская волна непрерывна на бесконечности, если нулевой момент функции $f(s)$ равен нулю.

Пример 2. Фундаментальное решение волнового уравнения.

$$E^+(t - t_0, X) = \frac{1}{2\pi} \epsilon(t - t_0) \delta((t - t_0)^2 - X^2) \quad (t_0 > 0).$$

Здесь $\epsilon(\cdot)$ – функция Хевисайда.

$$\begin{aligned} KE^+ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \epsilon\left(\frac{\tau}{\gamma} - t_0\right) \delta\left(\left(\frac{\tau}{\gamma} - t_0\right)^2 - \frac{\xi^2}{\gamma^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \epsilon\left(\frac{\tau}{\gamma} - t_0\right) \delta\left(\frac{\tau^2 - \xi^2}{\gamma^2} - 2\frac{\tau t_0}{\gamma} + t_0^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \epsilon\left(\frac{\tau}{\gamma} - t_0\right) \delta\left(\frac{1}{\gamma} - 2\frac{\tau t_0}{\gamma} + t_0^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi t_0^2} \operatorname{sgn} \gamma \epsilon\left(\frac{\tau}{2\tau t_0 - \tau_0^2} - \frac{1}{\tau_0}\right) \delta((\tau - \tau_0)^2 - \xi^2) \\ &= \frac{1}{2\pi t_0^2} \epsilon\left((\tau_0 - \tau)\left(\tau - \frac{\tau_0}{2}\right)\right) \delta((\tau - \tau_0)^2 - \xi^2), \end{aligned}$$

где $\gamma = \tau^2 - \xi^2$, $\tau_0 = t_0^{-1}$.

Тем самым $(KE^+)(\xi, \tau)$ при $\tau > \frac{\tau_0}{2}$ в терминах переменных ξ, τ пропорциональна антипричинному фундаментальному решению $E^- = E^+(\tau_0 - \tau, \xi)$. Функция $\square_{\xi, \tau}(KE^+)(\xi, \tau)$ отлична от нуля в точке $(0, \tau_0)$ (образе точки $(0, t_0)$ при инверсии) и при $\tau^2 = \xi^2$, $\tau = \tau_0/2$. Это означает, что $E^+(X, t)$ описывает поле, порожденное: 1) точечным источником, сосредоточенным в точке $(0, t_0)$, и 2) источниками на пересечении конуса $t - t_0 = |X|/2$ с бесконечностью.

5. Здесь и в дальнейшем нам будет удобно, вместо обозначения координат (X_1, X_2, X_3, t) , использовать обозначение (x, z, t) (соответственно (ξ, ζ, τ)), где $x = (x_1, x_2) = (X_1, X_2)$, $z = X_3$, $(x, z, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Под x^2 в дальнейшем понимаем $x_1^2 + x_2^2$, $\Gamma = t^2 - x^2 - z^2$, $(x, y) := x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Далее вместо преобразования Кельвина используем композицию \tilde{K} двух преобразований Кельвина: первое, опирающееся на инверсию относительно точки $(0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} (x, z, t) &\rightarrow (x', z', t'), \quad x' = \frac{x}{t^2 - x^2 - z^2}, \\ z' &= \frac{z}{t^2 - x^2 - z^2}, \quad t' = \frac{t}{t^2 - x^2 - z^2}, \end{aligned}$$

второе – относительно точки $x' = 0, z' = t' = \frac{1}{2h}$: $(x', z', t') \rightarrow (\xi, \zeta, \tau)$, т.е.

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x'}{(t' - 1/2h)^2 - x'^2 - (z' - 1/2h)^2}, \\ \zeta &= \frac{z' - 1/2h}{(t' - 1/2h)^2 - x'^2 - (z' - 1/2h)^2}, \\ \tau &= \frac{t' - 1/2h}{(t' - 1/2h)^2 - x'^2 - (z' - 1/2h)^2}.\end{aligned}$$

Итоговое преобразование $(x, z, t) \rightarrow (\xi, \zeta, \tau)$ имеет вид:

$$\xi = \frac{xh}{h - t + z}, \quad \zeta = \frac{zh - \Gamma/2}{h - t + z}, \quad \tau = \frac{th - \Gamma/2}{h - t + z}. \quad (4)$$

Формула обращения этой двойной инверсии:

$$x = \frac{\xi h}{h + \tau - \zeta}, \quad z = \frac{\zeta h + \gamma/2}{h + \tau - \zeta}, \quad t = \frac{\tau h + \gamma/2}{h + \tau - \zeta}. \quad (4a)$$

Отметим полезное соотношение

$$h - t + z = \frac{h^2}{h + \tau - \zeta}. \quad (5)$$

Плоскость $h + \tau - \zeta = 0$ является образом многообразия бесконечно удаленных точек. После перехода к координатам (ξ, ζ, τ) возникает в свою очередь многообразие бесконечно удаленных точек, получающихся при стремлении к бесконечности координат (ξ, ζ, τ) . Плоскость $h - t + z = 0$ является прообразом этого многообразия. Найдем вид вышеупомянутого двукратного преобразования Кельвина \tilde{K} :

$$\begin{aligned}U(x, z, t) &\rightarrow W(x', z', t') = \frac{1}{\Gamma'} U\left(\frac{x'}{\Gamma'}, \frac{z'}{\Gamma'}, \frac{t'}{\Gamma'}\right) \rightarrow V(\xi, \zeta, \tau) \\ &= \frac{1}{\gamma} W\left(\frac{\xi}{\gamma}, \frac{\zeta}{\gamma} + \frac{1}{2h}, \frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{2h}\right) = \frac{1}{\gamma \Gamma'} U\left(\frac{\xi h}{h + \tau - \zeta}, \frac{\zeta h + \gamma/2}{h + \tau - \zeta}, \frac{\tau h + \gamma/2}{h + \tau - \zeta}\right).\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Gamma' = t'^2 - x'^2 - z'^2 &= \left(\frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{2h}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{\gamma} + \frac{1}{2h}\right)^2 - \frac{\xi^2}{\gamma^2} \\ &= \frac{\tau^2 - \zeta^2 - \xi^2}{\gamma^2} + \frac{\tau - \zeta}{h\gamma} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\tau - \zeta}{h\gamma} = \frac{h + \tau - \zeta}{h\gamma}.\end{aligned}$$

Тем самым

$$\begin{aligned} V(\xi, \zeta, \tau) &= (\tilde{K}U)(\xi, \zeta, \tau) \\ &= \frac{h}{h + \tau - \zeta} U\left(\frac{\xi h}{h + \tau - \zeta}, \frac{\zeta h + \gamma/2}{h + \tau - \zeta}, \frac{\tau h + \gamma/2}{h + \tau - \zeta}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Формула обращения преобразования \tilde{K} имеет вид:

$$\begin{aligned} (\tilde{K}^{-1}V)(x, z, t) &= U(x, z, t) \\ &= \frac{h}{h - t + z} V\left(\frac{xh}{h - t + z}, \frac{zh - \Gamma/2}{h - t + z}, \frac{th - \Gamma/2}{h - t + z}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

6. Далее под волновым полем, порожденным источниками на бесконечности будем понимать решение однородного уравнения (1) при $(X, t) \in \mathbb{R}^4$, имеющее вид (7), где функция $V(\xi, \zeta, \tau)$ удовлетворяет уравнению:

$$V_{\tau\tau} - \Delta_{\xi}V - V_{\zeta\zeta} = F(\xi, \zeta, \tau), \quad (8)$$

причем $F(\xi, \zeta, \tau)$ – обобщенная функция с носителем на плоскости $h + \tau - \zeta = 0$ – образе множества бесконечно удаленных точек.

Будем далее предполагать, что $F(\xi, \zeta, \tau)$ имеет вид конечной суммы:

$$F(\xi, \zeta, \tau) = \sum_{k=0}^m \delta^{(k)}(h + \tau - \zeta) f_k(\xi, \zeta), \quad (9)$$

где $f_k(\xi, \zeta) \in Z$. Здесь через Z обозначено множество бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих при некотором β (зависящем от f), любом $\sigma \geq 0$ и любом мультииндексе $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ оценкам

$$\left| \frac{\partial^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \partial \zeta^{\alpha_3}} f(\xi, \zeta) \right| \leq \frac{M_{\alpha\sigma} |1 + \zeta^2|^{\beta}}{(1 + \xi^2)^{\sigma}}. \quad (10)$$

(Мы выделяем направление ζ , так как стремление ζ к бесконечности при $h + \tau - \zeta = 0$ в терминах промежуточных координат (x', z', t') означает стремление точки к вершине конуса $\Gamma' = 0$ – особой точке многообразия бесконечно удаленных точек).

7. Решение уравнения (8) будем строить с помощью свертки функции $F(\xi, \zeta, \tau)$ и фундаментального решения волнового уравнения. В большинстве приложений используется фундаментальное решение

$$E^+(\xi, \zeta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(\tau) \delta(\tau^2 - \xi^2 - \zeta^2),$$

где $\varepsilon(\tau)$ – функция Хевисайда. Решение $E^+(\xi, \zeta, \tau)$ удовлетворяет принципу причинности. В нашей ситуации однако роль принципа причинности представляется сомнительной в связи с тем, что в сколь угодно малой (в терминах переменных (ξ, ζ, τ)) окрестности образа бесконечно удаленной точки находятся как точки, являющиеся образами точек, расположенных в далеком прошлом, так и в отдаленном будущем. Поэтому мы будем использовать как причинное фундаментальное решение $E^+(\xi, \zeta, \tau)$, так и антипричинное $E^-(\xi, \zeta, \tau) = E(\xi, \zeta, -\tau)$.

Представим каждую функцию $f_k(\xi, \zeta)$ в виде суммы

$$f_k(\xi, \zeta) = f_k^+(\xi, \zeta) + f_k^-(\xi, \zeta),$$

где каждое из слагаемых принадлежит Z , в остальном разбиение произвольно. Построим решение уравнения (8) в виде

$$V = \sum_{k=0}^m (V_k^+ + V_k^-),$$

где

$$\begin{aligned} V_k^\pm &= E^\pm(\tau, \xi, \zeta) * (\delta^{(k)}(h + \tau - \zeta) f_k^\pm(\xi, \zeta)) \\ &= \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} E^\pm(\tau, \xi, \zeta) * (\delta(h + \tau - \zeta) f_k^\pm(\xi, \zeta)) \end{aligned} \quad (11)$$

Свертки в формуле (11) определены, так как интегрирование в них (см. далее формулы (12), (13)) фактически производится по параболоиду. Уход ζ' на бесконечность означает одновременно и стремление ξ' к бесконечности пропорционально $\sqrt{|\zeta'|}$. Выбирая показатель σ в оценке (10) достаточно большим, всегда можно добиться сколь угодно быстрого степенного убывания подынтегральной функции.

Рассмотрим V_k^+ ,

$$\begin{aligned} V_k^+ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \int_{\tau' < \tau} \delta((\tau - \tau')^2 - (\zeta - \zeta')^2 - (\xi - \xi')^2) \\ &\quad \times \delta(h + \tau' - \zeta') f_k^+(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' d\tau' \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \int_{\zeta' - h < \tau} \delta((\tau - \zeta' + h)^2 - (\zeta - \zeta')^2 - (\xi - \xi')^2) f_k^+(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta'. \end{aligned}$$

Очевидно, при $\tau < \zeta - h$ носитель δ -функции, стоящей под знаком интеграла, не пересекается с полупространством $\zeta' < \tau + h$ и $V_k^+(\xi, \zeta, \tau) = 0$.

При $\tau > \zeta - h$ носитель δ -функции полностью помещается в полупространстве $\zeta' - h < \tau$; тем самым указание $\zeta' - h < \tau$ под знаком интеграла является излишним, V_k^+ может быть записано в виде

$$V_k^+(\xi, \zeta, \tau) = \varepsilon(\tau - \zeta + h) \times \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \int \delta\left((\tau - \zeta' + h)^2 - (\zeta - \zeta')^2 - (\xi - \xi')^2\right) f_k^+(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta'. \quad (12)$$

Аналогично

$$V_k^-(\xi, \zeta, \tau) = \varepsilon(\zeta - \tau - h) \times \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \int \delta\left((\tau - \zeta' + h)^2 - (\zeta - \zeta')^2 - (\xi - \xi')^2\right) f_k^-(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta'. \quad (13)$$

8. Преобразуем выражение для

$$\frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \int \delta\left((\tau - \zeta' + h)^2 - (\zeta - \zeta')^2 - (\xi - \xi')^2\right) f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta'.$$

Пусть $k = 1$, тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \int \delta\left((\tau + h - \zeta')^2 - (\zeta - \zeta')^2 - (\xi - \xi')^2\right) f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' \\ &= 2 \int (\tau + h - \zeta') \delta' \left((\tau + h - \zeta')^2 - (\zeta - \zeta')^2 - (\xi - \xi')^2 \right) f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' \\ &= 2 \int \delta' \left((2\zeta' - \tau - h - \zeta)(\zeta - \tau - h) - (\xi - \xi')^2 \right) (\tau + h - \zeta') f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta'. \quad (14) \end{aligned}$$

Так как $\delta' \left((2\zeta' - \tau - h - \zeta)(\zeta - \tau - h) - (\xi - \xi')^2 \right)$ можно представить в виде $\frac{1}{2(\zeta - \tau - h)} \frac{\partial}{\partial \zeta'} \delta' \left((2\zeta' - \tau - h - \zeta)(\zeta - \tau - h) - (\xi - \xi')^2 \right)$, то равенство (14) можно продолжить

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \int \delta\left((\tau - \zeta' - h)^2 - (\zeta - \zeta')^2 - (\xi - \xi')^2\right) f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' \\ &= \frac{1}{\zeta - \tau - h} \int \delta\left((\tau - \zeta' - h)^2 - (\zeta - \zeta')^2 - (\xi - \xi')^2\right) \frac{\partial}{\partial \zeta'} (\zeta' - \tau - h) f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' \\ &= \int \delta(\Lambda) b^{-1} \sum_{j=0}^1 P_{1j}(a, b) \frac{\partial}{\partial \zeta'} f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta', \quad (15) \end{aligned}$$

где аргумент δ -функции обозначен через Λ , $\tau+h-\zeta' =: a$, $\tau+h-\zeta =: b$.
Справедливо представление

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \int \delta(\Lambda) f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' \\ &= b^{-k} \int \delta(\Lambda) \sum_{j=0}^k P_{kj}(a, b) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta', \quad (16) \end{aligned}$$

где P_{kj} – однородные полиномы степени j своих аргументов. Докажем это представление с помощью индукции. При $k = 1$ оно верно (формула (15)). Пусть оно верно при каком-то k , тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{k+1}}{\partial \tau^{k+1}} \int \delta(\Lambda) f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int \delta(\Lambda) b^{-k} \sum_{j=0}^k P_{kj}(a, b) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' \\ &= \int \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta(\Lambda)) \cdot b^{-k} \sum_{j=0}^k P_{kj}(a, b) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' \\ &+ \int \delta(\Lambda) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(b^{-k} \sum_{j=0}^k P_{kj}(a, b) \right) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta'. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{k+1}}{\partial \tau^{k+1}} \int \delta(\Lambda) f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' \\ &= \int \delta(\Lambda) \frac{\partial}{\partial \zeta'} \cdot \left(ab^{-k-1} \cdot \sum_{j=0}^k P_{kj}(a, b) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') \right) d\xi' d\zeta' \\ &+ \int \delta(\Lambda) \left(-kb^{-k-1} \cdot \sum_{j=0}^k P_{kj}(a, b) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') \right) \\ &+ b^{-k} \sum_{j=0}^k \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) P_{kj}(a, b) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta' \\ &= \int \delta(\Lambda) b^{-k-1} \left(- \sum_{j=0}^k (P_{kj}(a, b) + a \frac{\partial}{\partial a} P_{kj}(a, b)) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a \sum_{j=0}^{k+1} P_{kj}(a, b) \frac{\partial^{j+1}}{\partial \zeta'^{j+1}} f(\xi', \zeta') - k \sum_{j=0}^k P_{kj}(a, b) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') \\
& + b \sum_{j=0}^k \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) P_{kj}(a, b) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') \Big) d\xi' d\zeta' \\
& = \int \delta(\Lambda) b^{-k-1} \cdot \sum_{j=0}^{k+1} P_{k+1,j}(a, b) \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} f(\xi', \zeta') d\xi' d\zeta'.
\end{aligned}$$

Формула (16) доказана, причем для полиномов $P_{kj}(a, b)$ имеет место рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}
& P_{k+1,j}(a, b) \\
& = -P_{kj}(a, b) - a \frac{\partial}{\partial a} P_{kj}(a, b) + a P_{k,j-1}(a, b) - k P_{kj}(a, b) + b \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) P_{kj}(a, b)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
P_{k+1,j}(a, b) & = -(1+k)P_{kj}(a, b) \\
& - a \frac{\partial}{\partial a} P_{kj}(a, b) + b \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) P_{kj}(a, b) + a P_{k,j-1}(a, b). \quad (17)
\end{aligned}$$

Соотношение (17) верно при всех $j = 0, \dots, k+1$, если принять, что $P_{k,-1}(a, b) = P_{k,k+1}(a, b) = 0$, $P_{00}(a, b) = 1$. Выпишем несколько первых полиномов $P_{kj}(a, b)$:

$$\begin{aligned}
P_{00}(a, b) & = 1, \quad P_{10}(a, b) = -1, \quad P_{11}(a, b) = a, \quad P_{20}(a, b) = 2!, \\
P_{21}(a, b) & = -4a + b, \quad P_{22}(a, b) = a^2, \quad P_{30}(a, b) = -3!, \quad P_{31}(a, b) = 18a - 3b, \\
P_{32}(a, b) & = -9a^2 + 3ab, \quad P_{33}(a, b) = a^3
\end{aligned}$$

и т.д. В частности, при всех k :

$$P_{k0} = (-1)^k k!, \quad P_{kk} = a^k. \quad (18)$$

Итак, построенное решение уравнения (8) имеет вид:

$$\begin{aligned}
V(\xi, \zeta, \tau) & = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m (\tau + h - \zeta)^{-k} \int \delta(\Lambda) \sum_{j=0}^k P_{kj}(\tau + h - \zeta', \tau + h - \zeta) \\
& \times \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} \left(\epsilon(\tau + h - \zeta) f_k^+(\xi', \zeta') + \epsilon(\zeta - \tau - h) f_k^-(\xi', \zeta') \right) d\xi' d\zeta'. \quad (19)
\end{aligned}$$

9. Перейдем в выражении (19) к исходным функции U и переменным (x, z, t) . В силу формулы (7):

$$U(x, z, t) = \frac{h}{h-t+z} V\left(\frac{hx}{h-t+z}, \frac{hz - \Gamma/2}{h-t+z}, \frac{ht - \Gamma/2}{h-t+z}\right).$$

Выполним сначала подстановку в аргументе δ -функции Λ : с учетом того, что

$$\tau + h + \zeta = \frac{x^2 + (z+h)^2 - t^2}{t-h-z} = \frac{x^2}{t-h-z} - (t+z+h),$$

$$\tau + h - \zeta = -\frac{h^2}{h-t+z},$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left(2\zeta' + \frac{x^2}{t-h-z} - (t+z+h)\right) \frac{h^2}{t-h-z} - \xi'^2 - \frac{2(x, \xi')h}{t-h-z} - \frac{x^2 h^2}{(t-h-z)^2} \\ &= \frac{2h^2}{t-h-z} \left(\zeta' - \xi'^2 \frac{t-h-z}{2h^2} + \frac{(x, \xi')}{h} - \frac{t+h+z}{2}\right). \end{aligned}$$

С учетом однородности δ -функции и однородности полиномов P_{kj} , а также формулы (5), получаем:

$$\begin{aligned} U(x, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \frac{1}{h^{2k+1}} \iint \delta\left(\zeta' - \xi'^2 \frac{t-h-z}{2h^2} + \frac{(x, \xi')}{h} - \frac{t+h+z}{2}\right) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^k (h-t+z)^{k-j} P_{kj}\left(h^2 + hz - \Gamma/2 - (h-t+z)\zeta', h^2\right) \\ &\quad \times \frac{\partial^j}{\partial \zeta'^j} \left(\epsilon(h-t+z) f_k^+(\xi', \zeta') - \epsilon(t-z-h) f_k^-(\xi', \zeta')\right) d\xi' d\zeta'. \quad (20) \end{aligned}$$

10. Как видно из формулы (20), построенное решение является гладкой непрерывной функцией от x, z, t всюду, за исключением, может быть, плоскости $t = z + h$ (эта плоскость является прообразом многообразия бесконечно удаленных в смысле координат (ξ, ζ, τ) точек).

Исследуем поведение функции U в окрестности плоскости $t = z + h$. Существуют пределы при $t \rightarrow z + h + 0$ и при $t \rightarrow z + h - 0$ решения $U(x, z, t)$. Действительно,

$$\begin{aligned} U(x, z, z+h+0) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \frac{1}{h^{2k+1}} \iint d\xi' d\zeta' \delta\left(\zeta' + \frac{(x, \xi')}{h} - z - h\right) \\ &\quad \times P_{kk}\left(h^2 + hz - \frac{(h+z)^2 - z^2 - x^2}{2}, h^2\right) \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} f_k^-(\xi', \zeta') \end{aligned}$$

или, с учетом формулы (18):

$$U(x, z, z + h + 0) = -\frac{1}{2\pi h} \times \sum_{k=0}^m \left(\frac{h^2 + x^2}{2h^2}\right)^k \iint d\xi' d\zeta' \delta\left(\zeta' + \frac{(x, \xi')}{h} - z - h\right) \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} f_k^-(\xi', \zeta'). \quad (21)$$

Аналогично, предел

$$U(x, z, z + h - 0) = \frac{1}{2\pi h} \times \sum_{k=0}^m \left(\frac{h^2 + x^2}{2h^2}\right)^k \iint d\xi' d\zeta' \delta\left(\zeta' + \frac{(x, \xi')}{h} - z - h\right) \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} f_k^+(\xi', \zeta'). \quad (22)$$

Тем самым построенная функции U имеет особенность типа скачка при $t = z + h$. При этом неожиданностью является тот факт (подмеченный впервые А. А. Новицкой), что повышение сингулярности источника (добавление членов с производными от δ -функции в формуле (9)) не влечет за собой повышение сингулярности решения.

Найдем величину скачка решения $U(x, z, t)$ при $t = z + h$:

$$\begin{aligned} [U(x, z, t)]|_{t=z+h} &= U(x, z, z + h + 0) - U(x, z, z + h - 0) \\ &= -\frac{1}{2\pi h} \sum_{k=0}^m \left(\frac{h^2 + x^2}{2h^2}\right)^k \iint d\xi' d\zeta' \delta\left(\zeta' + \frac{(x, \xi')}{h} - z - h\right) \\ &\quad \times \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} (f_k^-(\xi', \zeta') + f_k^+(\xi', \zeta')) \\ &= -\frac{1}{2\pi h} \sum_{k=0}^m \left(\frac{h^2 + x^2}{2h^2}\right)^k \iint d\xi' d\zeta' \delta\left(\zeta' + \frac{(x, \xi')}{h} - z - h\right) \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} f_k(\xi', \zeta'). \quad (23) \end{aligned}$$

Замечательно, что несмотря на то, что сама функция U зависит от способа разбиения функций $f_k(\xi, \zeta)$ на слагаемые $f_k^+(\xi, \zeta)$ и $f_k^-(\xi, \zeta)$, величина скачка U при $t = z + h$ не зависит от произвола, заключающегося в этом разбиении.

11. Как следует из построения функции U , она удовлетворяет однородному уравнению (1) всюду, за исключением, может быть, плоскости $t = z + h$.

Будем интерпретировать функцию $U(x, z, t)$ как обобщенную. Результат применения оператора Даламбера $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta_x$ к функции U есть

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta_x\right)U = 2\frac{\partial}{\partial z}[U(x, z, t)]\Big|_{t=z+h} \delta(t-z-h). \quad (24)$$

Уравнение (24) означает, что если волновое поле $U(x, z, t)$ испытывает скачок на характеристической плоскости $t-z=h$, то оно отвечает источнику, описываемому функцией, стоящей в правой части равенства (24). Поскольку мы пытаемся описать поля, порождаемые источниками, локализованными только на бесконечности, то следует потребовать, чтобы при всех $(x, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial z}[U(x, z, t)]\Big|_{t=z+h} = 0,$$

или, переобозначая $z+h \rightarrow z$, $x/h \rightarrow -x$ и опуская штрихи в переменных интегрирования

$$\sum_{k=0}^m \left(\frac{1+x^2}{2}\right)^k \iint d\xi d\zeta \delta(z+(x, \xi) - \zeta) \frac{\partial^{k+1}}{\partial \zeta^{k+1}} f_k(\xi, \zeta) = 0. \quad (25)$$

Равенство (25) представляет собой условие на функции $f_k(\xi, \zeta)$ (рассматриваемого класса Z), необходимое и достаточное для того, чтобы функция вида (9) описывала источник волн, локализованный на бесконечности. Ниже это условие переформулируется в терминах преобразования Фурье.

12. Перепишем условие (25) в форме

$$\sum_{k=0}^m \left(\frac{1+x^2}{2}\right)^k H_k(x, z) = 0,$$

где

$$H_k(x, z) := \iint d\xi d\zeta \delta(z+(x, \xi) - \zeta) g_k(\xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

$$g_k(\xi, \zeta) := \frac{\partial^{k+1}}{\partial \zeta^{k+1}} f_k(\xi, \zeta).$$

Заметим теперь, что функцию $H_k(x, z)$ можно рассматривать при фиксированном x как интеграл по параметру ξ от свертки по переменной

z обобщенных функций $g_k(\xi, z)$ и $\delta(z + (x, \xi))$:

$$H_x(x, z) = \int d\xi \left(\delta(z + (x, \xi)) * g_k(\xi, z) \right). \quad (26)$$

Переходя в равенстве (26) к преобразованию Фурье по z , найдем с учетом того, что: $\Phi_{z \rightarrow q}(\delta(z - a)) = e^{-iaq}$

$$\Phi_{z \rightarrow q}(H_k(x, z)) = \int d\xi e^{iq(x, \xi)} \tilde{g}_k(\xi, q) = \hat{g}_k(p, q)|_{p=-qx}, \quad (27)$$

где через $\tilde{g}_k(\xi, q)$ обозначено $\tilde{g}_k(\xi, q) := \Phi_{z \rightarrow q}(g_k(\xi, z))$, через $\hat{g}_k(p, q) := \Phi_{\xi \rightarrow p, z \rightarrow q}(g_k(\xi, z))$. В итоге необходимое и достаточное условие (25) локализации источника на бесконечности в терминах преобразования Фурье имеет вид

$$\sum_{k=0}^m \left(\frac{1+x^2}{2} \right)^k \hat{g}_k(-qx, q) = 0. \quad (28)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Blagovestchensky, *On wave fields the sources disposed in the infinity*. — J. Inv. Ill-posed Problems **16** (2008), 1–11.
2. А. С. Благовещенский, *Плоские волны, решения Бейтмена и источники на бесконечности*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **426** (2014).
3. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*. М., Мир, 1964.
4. А. С. Благовещенский, *О некоторых новых задачах для волнового уравнения*. Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Л., Наука, 1971.
5. З. Пенроуз, В. Риндлер, *Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени*. М., Мир, 1988.
6. А. С. Благовещенский, *Обобщенный оператор Даламбера на компактифицированном псевдоэвклидовом пространстве*. — Матем. заметки **85** No. 5, (2009).
7. H. Bateman, *The conformal transformations in four dimensions and their applications to geometrical optics*. — Proc. London Math. Soc. **7** (1909), 70–89.

Blagovestchensky A. S. On waves generated by sources localized at infinity.

The space-time \mathbb{R}^4 is compactified by adding the manifold of infinitely distant points. The problem of constructing the solution of the wave equation with the right-hand side (the source of waves) which is a generalized function supported by the variety of infinitely distant points is posed and

solved. Strict necessary and sufficient conditions that the source must satisfy, are formulated.

Физический факультет
С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: a.blagoveshchensky@spbu.ru

Поступило 1 ноября 2018 г.