

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Елизаров, Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев,  
О задании распределения скорости при построении  
крылового профиля методом квазирешений,  
*Тр. сем. по краев. задачам*, 1985, выпуск 22, 69–78

<https://www.mathnet.ru/kukz114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

28 апреля 2025 г., 22:46:30



*А. М. Елизаров, Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев*

## О ЗАДАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ МЕТОДОМ КВАЗИРЕШЕНИЙ

При аэродинамическом проектировании летательных аппаратов немаловажным является вопрос получения максимальной подъемной силы. Большие возможности в решении этой проблемы открываются при построении крыловых профилей по заданному на поверхности профиля распределению скорости  $v(s)$  ( $s$  — дуговая абсцисса контура). Соответствующие методы отыскания формы профиля, обтекаемого плоским потенциальным неограниченным потоком идеальной несжимаемой жидкости были предложены в работах [1, 2] (см. также [3], § 14). Однако произвольному распределению  $v(s)$  при этом может соответствовать, вообще говоря, разомкнутый и неоднolistный профиль. В связи с этим в [4] разработан метод построения квазирешения указанной задачи, позволяющий находить замкнутый контур, распределение скорости  $\tilde{v}(s)$  вдоль которого является наиболее близким (в определенном смысле) к исходному распределению скорости  $v(s)$ . Существенным в этих задачах является вопрос, из каких соображений следует выбирать  $v(s)$ . Приведем некоторые соображения.

При обтекании профиля безграничным потоком вязкого газа с малыми дозвуковыми скоростями сжимаемостью газа можно пренебречь. Кроме того, при больших значениях чисел Рейнольдса наличие вязкости сказывается лишь вблизи поверхности контура внутри пограничного слоя, а вне этого слоя газ можно считать идеальным. При этом, как отмечено в [5, с. 771—776], распределение давления по поверхности крылового профиля будет совпадать с распределением давления при плоском потенциальном обтекании идеальной жидкостью полутела, образованного наращиванием на профиль крыла и по обе стороны от нулевой линии тока в его следе толщины вытеснения  $\delta^*$ . Причем в том случае, когда течение в пограничном слое безотрывное или область, где происходит отрыв, мала, величиной  $\delta^*$  можно пренебречь по сравнению с размерами контура. Таким образом, в качестве внешнего потока в этом случае можно приближенно брать поток идеальной жидкости, обтекающий исходный (а не увеличенный на толщину  $\delta^*$ ) профиль [6]. Тогда следующим этапом в решении проблемы максимизации подъемной силы будет оптимизация распределения скорости для обеспечения этого максимума при учете дополнительных ограничений, налагаемых требованиями безотрывности

обтекания и возможностью получения реальной формы профиля (замкнутого и однолистного). Отметим, что оптимизация распределения скорости при частных предположениях проводилась в ряде работ, обзор которых содержится в [7]. Для обеспечения безотрывности течения авторы этих работ использовали полученное Стрэтфордом [8] распределение скорости по диффузорной части верхней поверхности профиля, где происходит торможение потока.

В настоящей работе с целью решения затронутых вопросов выводится отличная от [8] форма распределения скорости на участке торможения, обеспечивающая отсутствие отрыва пограничного слоя. Идея использования такого распределения в рассматриваемой задаче принадлежит Г. Ю. Степанову. Из многопараметрического семейства указанных распределений выбирается такое, которое обеспечивает максимум подъемной силы. Рассмотрены соответствующие вариационные задачи. При численном построении формы замкнутого профиля по заданному на нем распределению скорости, удовлетворяющему условию безотрывности течения, использовались результаты работы [4].

1. Обсудим вопрос о виде распределения скорости по поверхности профиля с бесконечно-тонкой задней кромкой, удовлетворяющего условиям безотрывности обтекания и максимума величины подъемной силы (рис. 1). Используя уточненную постановку обратной краевой задачи гидроаэродинамики из [4], будем предполагать, что имеется участок разгона от точки  $A$  разветвления потока (с дуговой абсциссой  $s_A \in (0, L)$ ,  $L$  — заданный периметр профиля) до точки, где скорость достигает некоторого максимального значения  $v_{\max}$ , а затем идет участок

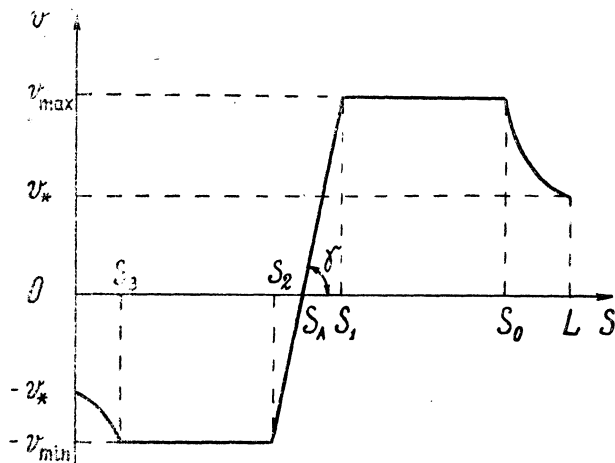


Рис. 1.

торможения, где скорость убывает до значения  $v_* < v_\infty$ ,  $v_\infty$  — известная величина модуля вектора скорости на бесконечности.

Пусть  $s_0 \in (s_A, L)$  — дуговая абсцисса начала участка восстановления давления. Пограничный слой считаем турбулентным. Простейшее условие безотрывности обтекания при указанных ограничениях имеет вид [9, с. 398]

$$-\frac{\delta^{**}}{v(s)} \frac{dv}{ds} = B (R^{**})^{-1/m}, \quad (1)$$

где  $m, B$  — взаимосвязанные постоянные,  $\delta^{**}$  — толщина потери импульса,  $v(s)$  — распределение скорости на участке торможения  $[s_0, L]$ ,  $R^{**} = \delta^{**} v(s) / \nu$ ,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. Пренебрегая трением на участке восстановления давления, из уравнения импульсов пограничного слоя [9, § 54] выводим связь между введенными выше величинами,  $v_{\max} = v(s_0)$  и толщиной потери импульса  $\delta_0^{**}$  в точке  $s_0$ :

$$\delta^{**} = [v_{\max} / v(s)]^{2+H} \delta_0^{**}, \quad H = \text{const}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает уравнение

$$- [v(s)]^{-(k+1)} dv/ds = B v_{\max}^{-(k+1)/m} (\delta_0^{**})^{-(m+1)/m} v^{1/m}, \quad (3)$$

где  $k = [(2+H)(m+1) - 1]/m$ . Интегрируя (3) в пределах от  $s_0$  до  $s$  получим

$$v(s) = v_{\max} [1 + kB (\nu/v_{\max})^{1/m} (\delta_0^{**})^{-(m+1)/m} (s - s_0)]^{-1/k}. \quad (4)$$

В частности, примем  $H=3$ ,  $m=\infty$ ,  $B=0,005$  [9]. При этом  $k=5$ . Используя указанные выше значения постоянных  $m, B, k$  из (4) найдем

$$v(s) = v_{\max} [1 + 0,025 (s - s_0) / \delta_0^{**}]^{-1/5}. \quad (5)$$

Из формулы (54.14) [9, с. 398] следует, что  $\delta_0^{**} / \tilde{s}_0 = 0,0361 R^{-1/5}$ , где  $\tilde{s}_0 = s_0 - s_A$ ,  $R = v_{\max} \tilde{s}_0 / \nu$ . [Значит, распределение скорости на  $[s_0, L]$ , удовлетворяющее условию безотрывности, окончательно примет вид

$$v(s) = v_{\max} [1 + 0,7 R^{1/5} (\tilde{s} / \tilde{s}_0 - 1)]^{-1/5} \quad (6)$$

и соответственно скорость  $v_*$  на выходной кромке будет

$$v_* = v_{\max} [1 + 0,7 R^{1/5} (\tilde{L} / \tilde{s}_0 - 1)]^{-1/5}, \quad (7)$$

где  $\tilde{L} = L - s_A$ ,  $\tilde{s} = s - s_A$ . Соотношение (7) является уравнением для определения  $s_0$  при заданных  $v_*$ ,  $v_{\max}$  или выражает

связь между  $v_{\max}$ ,  $v_*$  и  $s_0$ , если  $v_{\max}$  и  $v_*$  не фиксированы. Отметим, что распределение (7) по форме близко к распределению Стрэтфорда [8], но является более простым.

2. Остановимся на вопросе максимизации площади эпюры распределения скорости на верхней поверхности в целях увеличения циркуляции  $\Gamma$  и, следовательно, подъемной силы. Будем предполагать, что скорость  $v(s)$  монотонно возрастает от  $v=0$  в точке  $s=s_A$  до значения  $v_{\max}$  (участок разгона). Можно показать, что верхняя грань площади эпюры  $v(s)$  на  $[s_A, s_0]$  равна  $v_{\max}(s_0 - s_A)$  и не достигается для монотонно возрастающих распределений  $v(s)$ . Если допустить разрыв скорости в точке  $s=s_A$ , то верхняя грань достигается для  $v(s) \equiv v_{\max}$ ,  $s \in [s_A, s_0]$ . Этот очевидный факт получен в [10] из решения соответствующей вариационной задачи.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что  $v(s)$  меняется непрерывно, причем  $v(s) = (s - s_A) \operatorname{tg} \gamma$  при некотором  $\gamma$  ( $0 < \gamma < \pi/2$ ) на фиксированном участке разгона длины  $s_1 - s_A$ , затем  $v(s)$  монотонно возрастает от  $v(s_1) = (s_1 - s_A) \operatorname{tg} \gamma$  до  $v_{\max}$  на участке  $[s_1, s_0]$ , а на  $[s_0, L]$  имеем распределение (6).

Очевидно, что максимальное значение площади эпюры  $v(s)$  на участке  $[s_1, s_0]$  достигается при  $v(s) \equiv v_{\max}$ . Следовательно, величину  $\gamma$  нужно определять из уравнения

$$\operatorname{ctg} \gamma = (s_1 - s_A)/v_{\max}. \quad (8)$$

Итак, при фиксированных значениях  $s_1$  и  $v_{\max}$  получили распределение скорости на верхней поверхности профиля в виде

$$v_1(s) = \begin{cases} (s - s_A) \operatorname{tg} \gamma, & s_A \leq s \leq s_1, \\ v_{\max}, & s_1 \leq s \leq s_0, \\ v_{\max} [1 + 0,7R^{1/5} (\tilde{s}/\tilde{s}_0 - 1)]^{-1/5}, & s_0 \leq s \leq L, \end{cases} \quad (9)$$

причем величина  $\gamma$  определяется из (8). В распределении (9) свободными являются параметры  $s_0$ ,  $v_{\max}$  и  $v_*$ ; соотношение (7) задает связь между ними. Очевидно, что при варьировании  $s_0$  и  $v_{\max}$  площадь  $S$  эпюры  $v(s)$  на участке  $[s_1, L]$  становится бесконечно большой за счет неограниченного увеличения  $v_{\max}$ . При этом скорость  $v_*$ , определяемая из (7), всегда будет отлична от нуля. При уменьшении  $v_{\max}$  величина  $S$  уменьшается, не достигая своей нижней грани  $S=0$ . При фиксированном значении  $v_{\max}$  верхняя грань  $S$  равна  $v_{\max}(L - s_1)$  (что соответствует случаю  $s_0 = L$ ) и не достигается, при фиксированном значении  $s_0$   $\sup S = \infty$ . При фиксировании значений любых

двух параметров из набора  $s_0, v_{\max}, v_*$  для определения значения третьего параметра служит уравнение (7). Отметим, что оно в этом случае может оказаться и неразрешимым.

Введем новые независимые переменные  $X = R^{1/5} = (\tilde{s}_0 v_{\max} / \nu)^{1/5}$ ,  $Y = v_{\max}$ ,  $Z = v_{\max} / v_*$ . Имеем

$$S = \frac{5\nu}{2,8} X^4 (Z^4 - 1) + \nu X^5 (1 - \tilde{s}_1 / \tilde{L}) - \frac{\nu}{0,7} X^4 (Z^5 - 1) (\tilde{s}_1 / \tilde{L}), \quad (10)$$

где  $\tilde{s}_1 = s_1 - s_A$ , а выражение  $S$  получено с использованием равенства (7), принимающего в новых обозначениях вид

$$I \equiv \nu X^4 (Z^5 - 1) - 0,7 (\tilde{L} Y - \nu X^5) = 0. \quad (11)$$

Предположим, что заранее задана величина  $R$ , соответствующая рассматриваемой модели обтекания (следовательно, задано значение  $X$ ). Тогда  $S$  в (10) есть функция одного переменного и достигает максимума при  $Z = \Delta = \tilde{L} / \tilde{s}_1$ . При этом  $\tilde{s}_0 = 0,7 \tilde{L} R^{1/5} / (0,7 R^{1/5} + \Delta^5 - 1)$ . Учитывая, что по условию задачи  $s_0 \in [s_1, L]$ , получим окончательно следующий результат: если фиксированное значение  $R$  удовлетворяет неравенству  $R \geq R_0 = \{(\Delta^5 - 1) / [0,7 (\Delta - 1)]\}^5$ , то максимальное значение  $S$  достигается при  $Z = \Delta$ , причем  $\tilde{s}_0 = 0,7 \tilde{L} R^{1/5} / (0,7 R^{1/5} + \Delta^5 - 1)$  и  $v_{\max} = \nu R^{4/5} (0,7 R^{1/5} + \Delta^5 - 1) / (0,7 \tilde{L})$ . Если же  $R < R_0$ , то  $S_{\max}$  достигается при  $Z = [0,7 R^{1/5} (\Delta - 1) + 1]^{1/5}$ , причем  $\tilde{s}_0 = \tilde{s}_1$ ,  $v_{\max} = \nu R / \tilde{s}_1$ .

Отметим, что в работе [10] при исследовании влияния значения  $v_*$  на величину площади эпюры распределения скорости в форме Стрэтфорда значение  $R$  также считалось заранее известным, и экстремум площади достигался лишь при изменении  $R$  в фиксированном интервале.

Рассмотрим теперь случай, когда фиксировано  $Z$ . Из (10) следует, что  $S = S(X)$  и либо  $S$  монотонно возрастает по  $X$ , либо имеет единственную точку минимума. Следовательно,  $\sup S = \infty$ .

Пусть теперь зафиксировано значение  $v_*$ . Подставляя  $Y = Z v_*$  в (10) и (11), приходим к задаче минимизации непрерывной функции  $S = S(X, Z)$  на множестве  $I = 0$ . Для существования экстремумов достаточно доказать, что уравнение  $I = 0$  определяет компактное множество, лежащее в  $M = \{Z \geq 1, X \geq (\tilde{s}_1 v_* / \nu)^{1/5}\}$  — области определения функции  $S(X, Z)$  (т. е. определяет ограниченную непрерывную кривую вместе с ее концами). Имеем  $I'_X > 0$ . Значит, уравнение (11) разрешимо относительно  $X$  в виде  $X = F(Z)$ ,  $F$  — однозначная функция.

Кривая  $I=0$  пересекает линию  $Z=1$  в точке  $X=(\tilde{L}v_*/v)^{1/5}$  и линию  $X=(\tilde{s}_1 v_*/v)^{1/5}$  в точках, являющихся корнями уравнения

$$I_1(Z) \equiv v^{1/5} (\tilde{s}_1 v_*)^{4/5} (Z^5 - 1) - 0,7 (\tilde{L}Z - \tilde{s}_1) v_* = 0. \quad (12)$$

Так как  $I_1(1) < 0$ ,  $I_1' > 0$  при  $Z > Z_* = [0,7 \tilde{L} v_*^{1/5} \tilde{s}_1^{-4/5} / (5v^{1/5})]^{1/4}$  и  $I_1' < 0$  при  $Z < Z_*$ , то  $I_1(Z)$  достигает единственного минимума и существует корень  $Z_0$  уравнения (12) на интервале  $Z \geq 1$ . Так как при росте  $Z$  функция  $F(Z)$  убывает, то в  $M$  лежит единственная ограниченная ветка кривой  $I(X, Z) = 0$ ,  $1 \leq Z \leq Z_0$ ,  $(\tilde{s}_1 v_*/v)^{1/5} \leq X \leq X_0$ ,  $X_0 = \max_{[1, Z_0]} F(Z)$ , являющаяся компактным множеством. Значения  $X$  и  $Z$ , соответствующие максимальной величине  $S$ , можно найти, например, методом множителей Лагранжа, решая на множестве  $[(\tilde{s}_1 v_*/v)^{1/5}, X_0] \times [1, Z_0]$  задачу максимизации  $S$  в (10) при условии (11). Кроме того, легко видеть, что минимальное значение  $S$  достигается при  $v_{\max} = v_*$ ,  $\tilde{s}_0 = \tilde{L}$ .

Итак, задавая заранее значения  $R$  или  $v_*$ , можно найти набор параметров  $v_{\max}$ ,  $v_*$ ,  $s_0$ , соответствующих максимальному значению площади эпюры распределения скорости по участку  $[s_1, L]$  и величину  $\gamma$  из (8). При этом

$$\begin{aligned} \varphi_B = \int_{s_A}^L v(s) ds &= \frac{5v}{2,8} R^{4/5} [(v_{\max}/v_*)^4 - 1] + \\ &+ v_{\max} (s_0 - s_1) + \frac{1}{2} (s_1 - s_A) v_{\max}. \end{aligned}$$

3. Предположим, что величина приращения потенциала скорости по нижней поверхности  $\varphi_n = \int_{s_A}^b v(s) ds$  задана. Тогда известна циркуляция  $\Gamma = \varphi_B - \varphi_n$  и в силу [4] значение угла атаки  $\alpha$  ( $0 < |\alpha| < \pi/2$ ) однозначно определяется из уравнения  $\text{ctg } \alpha = -\alpha + \pi \varphi_B / \Gamma - \pi/2$ . Полученное в п. 1 распределение скорости (6) в отличие от распределения Стрэтфорда [8] позволяет найти в явном виде функцию  $\tilde{p}(\theta) = \ln |s'(\theta)| - \ln(2 \sin \theta/2)$ , где  $\theta$  — полярный угол на единичной окружности во вспомогательной плоскости, соответствующей физической плоскости. Действительно, используя формулы (см. [4])

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_{s_A}^s v(s) ds, \quad 0 \leq s \leq L; \\ \varphi(\theta) = g(\theta) &\equiv -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \theta + \frac{\cos(\theta - \alpha) - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right] + \varphi_B, \quad (13) \end{aligned}$$

в силу (9) имеем

$$\varphi(s) = \begin{cases} \operatorname{tg} \gamma (s - s_A)^2/2, & s \in [s_A, s_1], \\ \operatorname{tg} \gamma (s_1 - s_A)^2/2 + v_{\max} (s - s_1), & s \in [s_1, s_0], \\ \operatorname{tg} \gamma (s_1 - s_A)^2/2 + v_{\max} \{(s_0 - s_1) + \\ + 5 \{ [1 + \lambda (s - s_0)]^{4/5} - 1 \} / (4\lambda) \}, & s \in [s_0, L], \end{cases} \quad (14)$$

где  $\lambda = 0,7R^{1/5}/s_0$ . Пусть теперь  $\tilde{p}(\theta) = \{\tilde{p}_1(\theta), \theta \in [0, \theta_A]; \tilde{p}_2(\theta), \theta \in [\theta_A, 2\pi]\}$ , где  $\theta_A = \pi + 2\alpha$  соответствует точке разветвления потока. Из (13) и (14) имеем

$$\tilde{p}_1(\theta) = \ln \left[ 2U_0 \cos \left( \frac{\theta}{2} - \alpha \right) \right] + \begin{cases} 0,5 \ln \{ \operatorname{ctg} \gamma / [2g(\theta)] \}, & \theta \in [\theta_1, \theta_A], \\ -\ln v_{\max}, & \theta \in [\theta_0, \theta_1], \\ -\ln v_{\max} + 0,25 \ln \{ 1 + 4\lambda [g(\theta)/v_{\max}] - \\ - s_0 + s_A + (v_{\max} \operatorname{ctg} \gamma) / 2 \}, & \theta \in [0, \theta_1], \end{cases} \quad (15)$$

где точки  $e^{i\theta_1}$ ,  $e^{i\theta_0}$  ( $0 < \theta_0 < \theta_1 < \theta_A$ ) соответствуют точкам с дуговыми абсциссами  $s_1$  и  $s_0$  и однозначно определяются из условия непрерывности  $s'(\theta)$  из уравнений  $2g(\theta_1) = v_{\max}^2 \operatorname{ctg} \gamma$ ,

$$g(\theta_0) = v_{\max} [s_0 - s_A - (v_{\max} \operatorname{ctg} \gamma) / 2], \quad U_0 = \Gamma / (4\pi \sin \alpha).$$

4. При задании  $v(s)$  на нижней поверхности можно рассматривать модель, аналогичную модели задания скорости в виде (9), т. е. предполагать, что на некотором участке  $[0, s_3]$  скорость  $v(s)$  убывает по закону типа (6), на участке  $[s_3, s_2]$  — плоская полка  $v = -v_{\min}$ , а на  $[s_2, s_A]$  — линейное распределение  $v(s) = (s - s_A) \operatorname{tg} \gamma$  ( $s_3, s_2$  — некоторые постоянные, причем  $s_2$  определяется по  $v_{\min}$  и  $\gamma$  из равенства  $(s_A - s_2) \operatorname{tg} \gamma = v_{\min}$ ). Нам необходимо минимизировать площадь эпюры этого распределения. Так как значение  $v_*$  фиксировано, из результатов п. 1 следует, что минимум площади будет достигаться при  $v_{\min} = v_*$ ,  $s_3 = 0$ . Нетрудно подсчитать, что в этом случае  $\varphi_n = [s_A - (v_* \operatorname{ctg} \gamma) / 2] v_*$  и

$$\tilde{p}_2(\theta) = \begin{cases} \ln | U_0 \sqrt{2 \operatorname{ctg} \gamma / g(\theta)} \cos(\theta/2 - \alpha) |, & \theta \in [\theta_A, \theta_2], \\ \ln | 2U_0 \cos(\theta/2 - \alpha) / v_* |, & \theta \in [\theta_2, 2\pi], \end{cases}$$

где  $e^{i\theta_2}$  ( $\theta_A < \theta_2 < 2\pi$ ) соответствует точке на нижней поверхности с дуговой абсциссой  $s_2$ , а значение  $\theta_2$  определяется из равенства  $v_*^2 \operatorname{ctg} \gamma = 2g(\theta_2)$ .

Отметим, что при задании  $v(s)$  на нижней поверхности в указанном виде квазирешению задачи  $p_*(\theta)$  (см. [4]) может



вообще говоря, соответствовать не монотонная функция  $\tilde{v}(s)$ . Так как величина  $\varphi_n$  в этом случае не меняется, происходит „перераспределение“ площади эпюры при переходе к квази-решению. Кроме того, периметр построенного профиля отличается от  $L$  на величину  $s_B$  изменения длины нижней поверхности при переходе к квази-решению.

Для обеспечения безотрывности обтекания на нижней поверхности можно взять в качестве распределения скорости и монотонную функцию, принимающую при  $s = 0$  значение  $-v_*$ , а при  $s = s_A$  обращаящуюся в нуль (причем  $v'_s(s_A) = \operatorname{tg} \gamma$ ). Определяя  $\varphi_n$ , можно найти все параметры потока, функцию  $\tilde{p}_1(\theta)$  в виде (15) и функцию  $\tilde{p}_2(\theta)$ . Условия замкнутости для построенных функций  $\tilde{p}_1(\theta)$  и  $\tilde{p}_2(\theta)$ , вообще говоря, могут не выполняться. Поэтому вновь приходим к задаче отыскания квази-решения. Нетрудно установить, что на нижней поверхности

$$v(\theta) = \Gamma \exp[-\tilde{p}_2(\theta)] \cos(\theta/2 - \alpha) / (2\pi \sin \alpha), \quad \theta \in [\theta_A, 2\pi].$$

Если отыскивать квази-решение так, чтобы соответствующая ему функция  $\tilde{v}(s)$  была неубывающей на нижней поверхности, то необходимо требовать выполнения неравенства  $v'(\theta) \leq 0$ . Оно эквивалентно требованию (при условии непрерывной дифференцируемости  $\tilde{p}_2(\theta)$ )  $\tilde{p}'_2(\theta) \leq -0,5 \operatorname{tg}(\theta/2 - \alpha)$ ,  $\theta_A \leq \theta \leq 2\pi$ , которое, очевидно, будет выполнено, если  $\tilde{p}'_2(\theta) \leq 0,5 \operatorname{tg} \alpha$ . Последнее неравенство при предположении непрерывной дифференцируемости функции  $\tilde{p}_2(\theta)$  является дополнительным ограничением на множество корректности из [4], в котором ищется квази-решение задачи. Нетрудно доказать, что приведенные в [4] результаты справедливы и при этом дополнительном предположении.

5. С целью численной реализации изложенного метода были проведены расчеты на ЭВМ ЕС-1033 при следующих значениях исходных параметров:  $R = 10^5$ ,  $\nu = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $L = 1 \text{ м}$ ,  $s_A = 0,5 \text{ м}$ ,  $s_1 = 0,52 \text{ м}$  (величина  $v_\infty$  для упрощения расчетов не задавалась). Из решения задачи максимизации  $\Gamma$  получилось, что при указанных значениях исходных параметров горизонтальная полка у эпюры скорости на верхней поверхности отсутствует ( $s_0 = s_1$ ), при этом  $v_\infty = 58,05 \text{ м/с}$ ,  $\alpha = 0,07$ ,  $v_{\max} = 150 \text{ м/с}$ ,  $v_* = 53,77 \text{ м/с}$ ,  $\varphi_n = 33,42 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Gamma = 6,73 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $s_B = 0,017 \text{ м}$ . Полученное распределение  $v(s)$  и соответствующий ему незамкнутый контур изображены на рис. 2 (кривые 1 и 3 соответственно). Затем в соответствии с методом работы [4] было проведено изменение эпюры скоростей на нижней поверхности, причем считалось, что

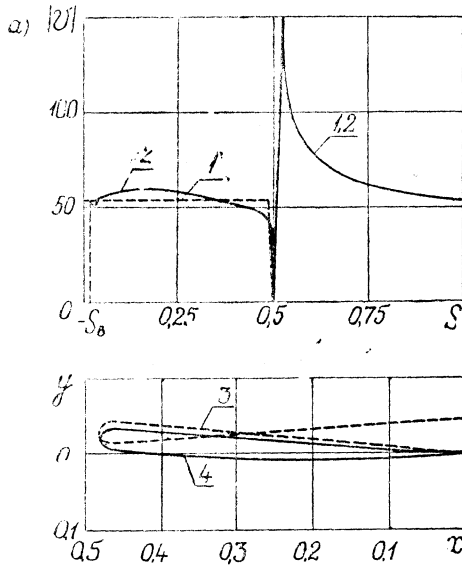


Рис. 2.

$$p_*(\theta) = \tilde{p}_2(\theta) + \sum_{k=1}^N (c_k \cos k\tilde{\theta} + d_k \sin k\tilde{\theta}), \quad \text{где } \tilde{\theta} = 2\pi(\theta - \theta_A)/(2\pi - \theta_A),$$

$N=20$ . Измененная эпюра скорости и соответствующий ей замкнутый профиль показаны на рис. 2 (кривые 2 и 4). Была определена величина коэффициента подъемной силы  $C_y = 2\Gamma/(v_\infty c) = 0,48$ , где  $c = 0,48$  м — хорда профиля.

Таким образом, метод квазирешений в обратной задаче гидроаэродинамики позволил сразу (без всяких приближений) „замкнуть“ получившийся вначале незамкнутый контур (сохранив при этом желаемое распределение скорости  $v(s)$  по верхней поверхности профиля и обеспечив там безотрывность обтекания), минимально изменив исходное  $v(s)$  на нижней поверхности с сохранением заданной величины подъемной силы. При этом никаких ограничений на малость изменений эпюры скоростей или профиля, что необходимо в задачах модификации, здесь не требуется.

В заключение отметим, что решив задачу методом квазирешений, нетрудно затем рассчитать распределение скорости вдоль построенного контура и при изменении параметров набегающего потока (в частности, при нерасчетных углах атаки). Действительно, в процессе решения задачи строится конформное отображение внешности единичного круга во вспомогательной плоскости на внешность искомого профиля по известной функции  $s = s(\theta)$ . Легко показать, что при новых значениях параметров набегающего потока  $\alpha_n$ ,  $v_{\infty n}$  новое распределение

скорости  $v_n(s)$  и новые значения циркуляции  $\Gamma_n$  и коэффициента подъемной силы  $C_{y_n}$  будут связаны с первоначальными величинами формулами

$$v_n(s) = v(s) \frac{v_{\infty n}}{v_{\infty}} \frac{\cos[\theta(s)/2 - \alpha_n]}{\cos[\theta(s)/2 - \alpha]}, \quad (16)$$

$\Gamma_n = \Gamma v_{\infty n} \sin \alpha_n / (v_{\infty} \sin \alpha)$ ,  $C_{y_n} = C_y \sin \alpha_n / \sin \alpha$  (здесь  $\theta = \theta(s)$  — обратная к функции  $s = s(\theta)$ ). Однако следует иметь в виду, что формулы (16) можно применять для расчета обтекания лишь тогда, когда течение остается безотрывным и величиной  $\delta^*$  можно пренебрегать.

Авторы благодарят Г. Ю. Степанова за полезное обсуждение результатов работы, ценные замечания и предложения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Mangler W. Die Berechnung eines Tragflügelprofils mit vorgeschriebener Druckverteilung.— Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung, 1938, p. 146—153.
2. Тумашев Г. Г. Определение формы границ потока по заданному распределению скорости или давления.— Ученые записки Казан. ун-та, 1952 113, кн. 3, с. 3—24.
3. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.— 332 с.
4. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б. Метод квазирешений в обратной краевой задаче гидроаэродинамики.— Изв. вузов. Математика, 1984, № 10, с. 50—59.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.— 994 с.
6. Степанов Г. Ю. Об основных модельных представлениях механики жидкости и газа в теории крыла.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М., Изд-во МГУ, 1978, с. 5—28.
7. Либек Х. Аэродинамическое проектирование профилей с высоким значением коэффициента подъемной силы.— Ракетная техника и космонавтика, 1978, 16, № 12, с. 122—143.
8. Stratford B. S. The prediction of separation of the turbulent boundary layer.— J. of Fluid Mechanics, 1959, v. 5, p. 1—16.
9. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин.— М.: Физматгиз, 1962.— 512 с.
10. Ормсби А., Чен А. Оптимизация формы многоэлементных профилей в смысле максимума коэффициента подъемной силы.— Ракетная техника и космонавтика, 1972, 10, № 12, с. 84—90.

*Доложено на семинаре 2 февраля 1984 года.*