ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2005. Том 6. № 1–2. С. 57–70

УДК 517.962.8+519.688
MSC2000 35J60, 90C52

© Е.А. Калинина*

Численное исследование обратной экстремальной задачи идентификации младшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения

Рассматривается обратная экстремальная задача идентификации младшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения в области Ω по дополнительным измерениям в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. Обсуждаются основные подходы к решению этой проблемы. Развивается и обосновывается вычислительный алгоритм, основанный на двухслойном градиентном методе. Приводятся и анализируются результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: *эллиптическое уравнение, обратная экстремальная задача, идентификация младшего коэффициента, градиентный метод, распространение загрязнений*

Введение

Важнейшей задачей прикладной экологии является задача защиты окружающей среды от антропогенных загрязнений. Решение указанной задачи с помощью метода математического моделирования приводит к необходимости решения обратных задач идентификации неизвестных источников загрязнения и их параметров. Рассматриваемые обратные задачи в ряде случаев удобно формулировать как задачи управления [1–5], т. е. как задачи минимизации определенных функционалов качества на решениях исходной краевой задачи. Параметры, входящие в уравнение переноса загрязнений и граничные условия, являются важными характеристиками процесса распространения примеси, поэтому решение указанных задач играет большую роль в прикладной экологии.

Подчеркнем, что задача идентификации коэффициентов уравнения с частными производными относится к классу нелинейных задач математической физики. Это обстоятельство существенно затрудняет проблему построения вычислительных алгоритмов для приближенного решения обратных коэффициентных задач и сильно осложняет полное и строгое обоснование их сходимости.

Для численного восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений используются различные подходы, основанные прежде всего на методах регуляризации [6]. Особого внимания заслуживают также методы параметрической идентификации, связанные с представлением искомого коэффициента в параметрическом виде и с нахождением параметров этого представления. Такой подход, в частности, осуществлен в [7, 8] для восстановления старшего коэффициента нестационарного одномерного нелинейного параболического уравнения теплопроводности. В работе [9] представлен численный алгоритм восстановления

* 692500, г. Уссурийск ул. Некрасова, 35, Уссурийский государственный педагогический институт. Электронная почта: kalinina-e@newmail.ru

коэффициента конвекции двумерного эллиптического уравнения, основанный на применении градиентного метода и алгоритма Ньютона.

Традиционный подход в решении проблем идентификации младшего коэффициента состоит в сведении обратной задачи к интегральному уравнению Вольтерра первого рода с использованием функции Грина прямой задачи. В частности, такой подход был осуществлен в [10] для определения младшего коэффициента одномерного параболического уравнения. Обратная задача определения младшего коэффицента параболического уравнения рассмотрена также в [11], где проведен сравнительный анализ применения для ее численного решения четырех различных конечно-разностных схем. Следует отметить также работы [12, 13], в которых предложены численные алгоритмы решения задачи идентификации младшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения в ограниченной области, основанные на использовании двухслойного градиентного метода и квазиньютоновского алгоритма соответственно. В работе [14] также представлен численный алгоритм решения экстремальной задачи идентификации младшего коэффициента для эллиптического уравнения переноса примеси, основанный на подходе, впервые примененном в работе [15].

Целью настоящей работы является разработка численного алгоритма решения обратной экстремальной задачи идентификации младшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения, рассматриваемого в ограниченной прямоугольной области Ω по дополнительным измерениям в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. Предлагаемый численный алгоритм для приближенного решения обратной задачи основан на применении двухслойного градиентного метода, сходимость которого исследуется в работе. Данный численный алгоритм сводит решение обратной задачи к многократному решению соответствующих прямой и "сопряженной" задач на каждом итерационном шаге для рассматриваемого уравнения. В работе также приводятся и анализируются результаты проведенных вычислительных экспериментов.

1. Постановка прямой задачи

Пусть Ω-прямоугольная область: $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$. Рассмотрим в области Ω задачу нахождения концентрации φ загрязняющего вещества из соотношений

$$-\lambda\Delta\varphi + \kappa\varphi = f, \tag{1}$$

$$\varphi(x, y) \mid_\Gamma = \psi. \tag{2}$$

Здесь $\lambda = \text{const} > 0$, $\kappa \geq 0$ — величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, f — плотность объемных источников.

При изучении краевой задачи (1), (2) и обратной экстремальной задачи для уравнения (1) будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω, либо границу Γ, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$. При $s = 0$ получаем пространство $H^0(D) = L^2(D)$. Нормы в пространствах $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$ и их векторных аналогах будем обозначать через $\|\cdot\|_{s,\Omega} \equiv \|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$. При $s = 0$ полагаем $\|\psi\|_{0,\Omega} = \|\psi\|$, $\|\psi\|_{0,\Gamma} = \|\psi\|_\Gamma$. Скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ либо $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. Через $\|\cdot\|_1$ и $|\cdot|_1$ будем обозначать норму и полунорму в $H^1(\Omega)$. Отношение двойственности между пространством X и двойственным к нему X^* будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ либо просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Положим $L^2_+(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : q \geq 0\}$. Через $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ обозначим оператор следа, через $R_\gamma : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ — правый обратный оператор к γ, с которым выполняется соотношение $\gamma R_\gamma \psi = \psi$ для всех $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Введем основное для дальнейших рассмотрений функциональное пространство $\mathcal{T} = H^1_0(\Omega) \equiv \{S \in H^1(\Omega) : S = 0 \text{ на } \Gamma\}$, являющееся гильбертовым с нормой

$\|\cdot\|_{\mathcal{T}} = \|\cdot\|_1$, эквивалентной полунорме $|\cdot|_1$ в силу неравенства Фридрикса — Пуанкаре $|\nabla S|^2 \geq \alpha_1 \|S\|_1^2 \ \forall S \in \mathcal{T}, \alpha_1 = \text{const} > 0$. Через $\mathcal{T}^* \equiv H^{-1}(\Omega)$ обозначим пространство, двойственное к $\mathcal{T}$ относительно пространства $L^2(\Omega)$. Введем билинейные формы $a, a_1 : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, где

$$a_1(\varphi, \eta) = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\eta d\Omega, \quad a(\varphi, \eta) = \lambda a_1(\varphi, \eta) + (\kappa\varphi, \eta). \tag{3}$$

Предположим, что выполняются условия:
(i) $f \in \mathcal{T}^*$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$;
(ii) $\kappa \in L^2_+(\Omega)$.

Умножим уравнение (1) на функцию $S \in \mathcal{T}$ и проинтегрируем по области Ω. Используя формулу интегрирования по частям, приходим к следующей вариационной формулировке задачи (1), (2):

$$a(\varphi, S) = \langle f, S\rangle, \ \ \varphi|_\Gamma = \psi \text{ на } \Gamma. \tag{4}$$

В дальнейшем будем ссылаться на (1), (2) как на задачу 1.

Слабым решением задачи 1 будем называть функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую соотношениям (4).

Простой анализ показывает, что билинейная форма a, определенная в (3), непрерывна на $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ и коэрцитивна на $\mathcal{T}$ с константой $\lambda_* = \lambda\alpha_1$. Последнее означает, что $a(\eta, \eta) \geq \lambda_* \|\eta\|_1^2$ для всех $\eta \in \mathcal{T}$. В таком случае из теоремы Лакса-Мильграма [16] следует, что решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи (4) существует и единственно, причем выполняется следующая оценка:

$$\|\varphi\|_1 \leq M_\varphi \equiv (1/\lambda_*)[\|f\|_{\mathcal{T}^*} + C_\gamma(\lambda_* + \lambda + C_0\|\kappa\|)\|\psi\|_{1/2,\Gamma}]. \tag{5}$$

Здесь $C_\gamma = \|R_\gamma\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))}$ — норма оператора R_γ, C_0 — константа, входящая в оценку

$$|(\kappa\varphi, \eta)| \leq C_0\|\kappa\|\|\varphi\|_1\|\eta\|_1 \ \ \forall\kappa \in L^2(\Omega), \ \ (\varphi, \eta) \in H^1(\Omega)^2. \tag{6}$$

Поставим в соответствие задаче 1 оператор, представляющий собой пару

$$(A, \gamma) : X \to Y, X = H^1(\Omega), \ \ Y = (\mathcal{T}^*, H^{1/2}(\Gamma)), \tag{7}$$

состоящую из оператора $A : H^1(\Omega) \to \mathcal{T}^*$, действующего по формуле

$$\langle A\varphi, \eta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} = a(\varphi, \eta) \ \ \forall\varphi \in H^1(\Omega), \ \ \eta \in \mathcal{T}, \tag{8}$$

и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Из свойств формы a и оператора γ вытекает, что оператор $A|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^*$ — изоморфизм, а оператор (7) линеен, непрерывен, обратим и сюръективен. В таком случае из теоремы Банаха о существовании обратного оператора [17, с. 134] следует, что оператор (7) непрерывно обратим и осуществляет изоморфизм. Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (i)–(ii). *Тогда:* 1) *билинейная форма* $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *непрерывна и* $\mathcal{T}$ *— коэрцитивна с константой* $\lambda_* = \lambda\alpha_1 > 0$*;* 2) *для любой функции* $\kappa \in L^2_+(\Omega)$ *задача* 1 *имеет единственное слабое решение* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *и справедлива оценка* (5)*;* 3) *оператор* (7), (8) *осуществляет линейный непрерывный изоморфизм.*

2. Постановка и разрешимость обратной задачи

Рассмотрим в этом разделе обратную задачу, в которой неизвестной помимо концентрации φ является и величина κ, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций. В качестве дополнительной информации о решении будем использовать значения φ_d концентрации φ, которые соответствуют заданию поля концентраций, создаваемого источником в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$.

Решение рассматриваемой обратной задачи можно свести к решению экстремальной задачи при соответствующем выборе функционала качества J и управления. В качестве управления выберем функцию κ, которую будем искать в некотором множестве K, причем будем предполагать, что выполняется следующее условие:

(iii) $K \subset L^2_+(\Omega)$ — непустое замкнутое выпуклое множество.

Введем функционал качества $\tilde{J} : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\tilde{J}(\varphi) = \frac{1}{2}\|\varphi - \varphi_d\|^2_{L^2(Q)} = \frac{1}{2}\int_Q |\varphi - \varphi_d|^2 d\Omega \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega r(\varphi - \varphi_d)^2 d\Omega. \tag{9}$$

Здесь $\varphi_d \in L^2(Q)$ — заданная в подобласти $Q \subset \Omega$ функция, $r = \chi_Q$ — характеристическая функция множества Q. Положим

$$J(\varphi, \kappa) = \tilde{J}(\varphi) + \frac{\mu}{2}\|\kappa\|^2, \ \|\kappa\| = \|\kappa\|_{L^2(\Omega)}, \tag{10}$$

где μ — неотрицательная константа. Рассматривая функционал J на слабых решениях задачи 1, запишем ограничение, имеющее вид ее слабой формулировки (4), в виде

$$F(\varphi, \kappa) = 0. \tag{11}$$

Здесь оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to Y \equiv \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma)$ действует по формулам

$$\langle F_1(\varphi, \kappa), S\rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} = \langle A\varphi, S\rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} - \langle f, S\rangle \equiv a(\varphi, S) - \langle f, S\rangle \quad \forall S \in \mathcal{T}, \ \ F_2(\varphi, \kappa) = \gamma\varphi - \psi. \tag{12}$$

С учетом введенных обозначений перепишем сформулированную выше обратную задачу в виде следующей экстремальной задачи:

$$J(\varphi, \kappa) \to inf, \ \ F(\varphi, \kappa) = 0, \ \ (\varphi, \kappa) \in H^1(\Omega) \times K. \tag{13}$$

Ясно, что функционал $\tilde{J}$ слабо полунепрерывен снизу. Отсюда и теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (i), (iii), *причем* $\mu > 0$ *либо* $\mu \geq 0$ *и* K *— ограниченное множество. Тогда задача* (13) *имеет по крайней мере одно решение* $(\varphi, \kappa) \in H^1(\Omega) \times K$.

Выведем необходимые условия оптимальности для задачи (13). Для этого аналогично [1–4] воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых задачах условной минимизации [16]. Предварительно вычислим производную Фреше F'_φ по φ от оператора F. Легко проверить, что указанная производная Фреше в каждой точке $(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}) \in H^1(\Omega) \times K$ представляет собой линейный непрерывный оператор

$$F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}) \equiv (F'_{1\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}), F'_{2\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{\kappa})) = (\hat{A}, \gamma) : H^1(\Omega) \to Y, \tag{14}$$

где оператор $\hat{A} : H^1(\Omega) \to \mathcal{T}^*$ действует по формуле

$$\langle \hat{A}\tau, S\rangle = \hat{a}(\tau, S) \equiv \lambda a_1(\tau, S) + (\hat{\kappa}\tau, S),\ \forall \tau \in H^1(\Omega),\ S \in \mathcal{T}. \tag{15}$$

Обозначим через $Y^* = \mathcal{T} \times H^{-1/2}(\Gamma)$, где $H^{-1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)^*$, двойственное пространство к пространству Y. Положим $\mathbb{R}^+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$. В соответствии с общей теорией экстремальных задач [16] введем в рассмотрение множитель Лагранжа (λ_0, y^*), где $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$, $y^* = (\eta, \zeta) \in Y^*$, причем элемент $\eta \in \mathcal{T}$ имеет смысл "сопряженной" концентрации, и лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times \mathbb{R}^+ \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, \kappa, \lambda_0, \eta, \zeta) \equiv \lambda_0 J(\varphi, \kappa) + \langle F_1(\varphi, \kappa), \eta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle \zeta, F_2(\varphi, \kappa)\rangle_\Gamma. \tag{16}$$

Поскольку множество $F(\varphi, K)$ является выпуклым подмножеством пространства Y, а оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}) \equiv (\hat{A}, \gamma) : X \to Y$ является изоморфизмом в силу теоремы 1, то из [16, с. 79] вытекает нижеследующая теорема.

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий* (i), (iii) *пара* $(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}) \in H^1(\Omega) \times K$ *является элементом, на котором достигается локальный минимум в задаче* (13). *Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0, y^*) = (\lambda_0, \hat{\eta}, \hat{\zeta}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{T} \times H^{-1/2}(\Gamma)$ *такой, что справедливо уравнение Эйлера — Лагранжа*

$$F'^*_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\kappa})y^* + \lambda_0 J'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}) = 0 \quad в \quad X^*, \tag{17}$$

и выполяется принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}, \lambda_0, y^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\varphi}, \kappa, \lambda_0, y^*)\ \ \forall \kappa \in K. \tag{18}$$

Из изоморфизма оператора $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\kappa})$ и (17) вытекает, что $\lambda_0 \neq 0$. В таком случае можно считать, что $\lambda_0 = 1$, а соотношения (17) и (18) можно переписать в виде

$$\lambda a(\tau, \hat{\eta}) + (\hat{\kappa}\tau, \hat{\eta}) + \langle \hat{\zeta}, \tau\rangle_\Gamma = -(r(\hat{\varphi} - \varphi_d), \tau)\ \ \forall \tau \in X, \tag{19}$$

$$(\hat{\kappa} - \kappa, \hat{\varphi}\eta + \frac{\mu}{2}(\kappa + \hat{\kappa})) \equiv \int_\Omega (\hat{\kappa} - \kappa)[\hat{\varphi}\eta + \frac{\mu}{2}(\kappa + \hat{\kappa})]d\Omega \leq 0\ \ \forall \kappa \in K. \tag{20}$$

Ниже на (19) формально будем ссылаться как на "сопряженную" задачу. Подчеркнем, что прямая задача (4), сопряженная задача (19) и неравенство (20) представляют собой систему оптимальности, описывающую необходимые условия оптимальности для задачи управления (13).

Отметим, что функционал J в (10), зависящий от двух переменных φ и κ, можно переписать с учетом зависимости $F(\varphi, k) = 0$ между φ и k в виде функционала I, зависящего только от функции κ и определяемого формулой

$$I(\kappa) \equiv J(\varphi_\kappa, \kappa) = \frac{1}{2}\|r(\varphi(\kappa) - \varphi_d)\|^2 + \frac{\mu}{2}\|\kappa\|^2. \tag{21}$$

Здесь $\varphi_\kappa = \varphi(\kappa)$ обозначает единственное решение исходной задачи (4), отвечающее функции $\kappa \in K$. Ясно, что задача (13) эквивалентна задаче минимизации функционала $I(\kappa)$ на множестве K, т. е. задаче

$$I(\kappa) \to \inf,\ \kappa \in K. \tag{22}$$

Ниже нам потребуется выражение разности $I(k) - I(\hat{\kappa})$ значений функционала I для произвольной пары $\kappa, \hat{\kappa} \in K$. Для вывода этого выражения обзначим через $\hat{\varphi} = \varphi(\hat{\kappa}) \in H^1(\Omega)$ и $\hat{\eta} = \eta(\hat{\kappa}) \equiv \eta(\hat{\kappa}, \hat{\varphi}) \in \mathcal{T}$, $\hat{\zeta} = \zeta(\hat{\kappa}) \equiv \zeta(\hat{\kappa}, \hat{\varphi}) \in H^{-1/2}(\Gamma)$ решения следующих прямой и сопряженной задач:

$$\lambda(\nabla\hat{\varphi}, \nabla S) + (\hat{\kappa}\hat{\varphi}, S) = \langle f, S\rangle\ \ \forall S \in \mathcal{T},\ \hat{\varphi}|_\Gamma = \psi, \tag{23}$$

$$\lambda(\nabla\hat{\eta},\nabla\tau)+(\hat{\kappa}\hat{\eta},\tau)+\langle\hat{\zeta},\tau\rangle_\Gamma=-(r(\hat{\varphi}-\varphi_d),\tau)\ \forall\tau\in H^1(\Omega),\ \hat{\eta}|_\Gamma=0. \tag{24}$$

Из (23) и (4) следует, что разность $\varphi-\hat{\varphi}\equiv\varphi(\kappa)-\varphi(\hat{\kappa})$ удовлетворяет соотношению

$$\lambda(\nabla(\varphi-\hat{\varphi}),\nabla S)+(\kappa\varphi-\hat{\kappa}\,\hat{\varphi},S)=0\ \ \forall S\in\mathcal{T}, \tag{25}$$

которое перепишем с учетом равенства $\kappa\varphi-\hat{\kappa}\hat{\varphi}=\hat{\kappa}(\varphi-\hat{\varphi})+(\kappa-\hat{\kappa})\varphi$ в виде

$$\lambda(\nabla(\varphi-\hat{\varphi}),\nabla S)+(\hat{\kappa}(\varphi-\hat{\varphi}),S)=-((\kappa-\hat{\kappa})\varphi,S)\ \ \forall S\in\mathcal{T}. \tag{26}$$

В частности, при $S=\hat{\eta}$ соотношение (26) принимает вид

$$\lambda(\nabla(\varphi-\hat{\varphi}),\nabla\hat{\eta})+(\hat{\kappa}(\varphi-\hat{\varphi}),\hat{\eta})=-((\kappa-\hat{\kappa})\varphi,\hat{\eta}). \tag{27}$$

Положим далее в (24) $\tau=(\varphi-\hat{\varphi})\in\mathcal{T}$. Получим

$$\lambda(\nabla\hat{\eta},\nabla(\varphi-\hat{\varphi}))+(\hat{\kappa}\,\hat{\eta},\varphi-\hat{\varphi})=-(r(\hat{\varphi}-\varphi_d),\varphi-\hat{\varphi}). \tag{28}$$

Сравнивая (27) и (28), выводим, что

$$(r(\hat{\varphi}-\varphi_d),\varphi-\hat{\varphi})=((\kappa-\hat{\kappa})\varphi,\hat{\eta}). \tag{29}$$

С помощью равенства (29) легко доказывается следующая лемма:

Лемма 1. *Для любой пары $\kappa,\hat{\kappa}\in K$ выполняется соотношение*

$$I(\kappa)-I(\hat{\kappa})=\frac{\mu}{2}\|\kappa-\hat{\kappa}\|^2+\frac{1}{2}\|r(\varphi(\kappa)-\varphi(\hat{\kappa}))\|^2+\mu(\hat{\kappa},\kappa-\hat{\kappa})+((\kappa-\hat{\kappa})\varphi(\kappa),\eta(\hat{\kappa},\hat{\varphi})). \tag{30}$$

Доказательство. Учитывая (21), легко выводим, что

$$I(\kappa)-I(\hat{\kappa})=\frac{\mu}{2}(\|\kappa\|^2-\|\hat{\kappa}\|^2)+\frac{1}{2}(\|r(\varphi-\varphi_d)\|^2-\|r(\hat{\varphi}-\varphi_d)\|^2)=$$

$$=\frac{\mu}{2}\|\kappa-\hat{\kappa}\|^2+\mu(\hat{\kappa},\kappa-\hat{\kappa})+\frac{1}{2}\|r(\varphi-\hat{\varphi})\|^2+(r(\hat{\varphi}-\varphi_d),\varphi-\hat{\varphi}),\ \varphi=\varphi(\kappa),\hat{\varphi}=\varphi(\hat{\kappa}). \tag{31}$$

Используя (29), отсюда приходим к (30).

Положим далее в (26) $S=\varphi-\hat{\varphi}$. Используя оценку (6) и неравенство Фридрихса-Пуанкаре, выводим, что

$$\lambda_*\|\varphi-\hat{\varphi}\|_1^2\le\lambda\|\nabla(\varphi-\hat{\varphi})\|^2\le C_0\|\kappa-\hat{\kappa}\|\|\varphi\|_1\|\varphi-\hat{\varphi}\|_1.$$

Отсюда и теоремы 1, согласно которой $\|\varphi\|_1\le M_\varphi$, вытекает оценка

$$\|\varphi-\hat{\varphi}\|_1\le C_1\|\kappa-\hat{\kappa}\|,\ \ C_1=C_0M_\varphi/\lambda_*. \tag{32}$$

Точно так же, полагая в (24) $\tau=\hat{\eta}$ и используя неравенство Фридрихса-Пуанкаре и ту же теорему 1, в силу которой $\|\hat{\varphi}\|_1\le M_\varphi$, выводим, что

$$\lambda_*\|\hat{\eta}\|_1^2\le\|\varphi-\varphi_d\|\|\hat{\eta}\|\le(M_\varphi+\|\varphi_d\|_{L^2(Q)})\|\hat{\eta}\|_1.$$

Отсюда приходим к следующей оценке для $\|\hat{\eta}\|_1$:

$$\|\hat{\eta}\|_1\le C_2=(M_\varphi+\|\varphi_d\|_{L^2(Q)})/\lambda_*. \tag{33}$$

Сформулируем полученные результаты в виде леммы

Лемма 2. *Пусть при выполнении условий* (i), (ii) $\varphi(\kappa)$, $\hat{\varphi} = \varphi(\hat{\kappa})$ *и* $\hat{\eta} = \eta(\hat{\kappa})$ *— решения задач* (4), (23) *и* (24), *где* $\kappa \in K$ *и* $\hat{\kappa} \in K$. *Тогда справедливы оценки* (32), (33).

Докажем теперь, что функционал $I(\kappa)$ является дифференцируемым по Гато.

Теорема 4. *Производная Гато от функционала* I *в любой точке* $\hat{\kappa} \in K$ *в направлении вектора* $h \in L^2(\Omega)$ *существует и определяется формулой*

$$\langle I'(\hat{\kappa}), h\rangle = (\mu\hat{\kappa} + \varphi(\hat{\kappa})\eta(\hat{\kappa}), h). \tag{34}$$

Доказательство. Положим $\kappa = \hat{\kappa} + th$ с $t \in [0,1]$, где $h \in L^2(\Omega)$ и t выберем так, чтобы полученный элемент κ снова принадлежал множеству управлений K. Используя лемму 1, тогда имеем

$$\begin{aligned} &I(\hat{\kappa}+th) - I(\hat{\kappa}) = \\ &= \frac{\mu}{2}\|\hat{\kappa}+th-\hat{\kappa}\|^2 + \frac{1}{2}\|r(\varphi(\hat{\kappa}+th)-\varphi(\hat{\kappa}))\|^2 + \mu(\hat{\kappa}, \hat{\kappa}+th-\hat{\kappa}) + ((\hat{\kappa}+th-\hat{\kappa})\varphi(\hat{\kappa}+th), \eta(\hat{\kappa})) = \\ &= \frac{\mu}{2}t^2\|h\|^2 + \frac{1}{2}\|r(\varphi(\hat{\kappa}+th)-\varphi(\hat{\kappa}))\|^2 + \mu t(\hat{\kappa}, h) + t(h\varphi(\hat{\kappa}+th), \eta(\hat{\kappa})). \end{aligned} \tag{35}$$

Из (35) выводим, что

$$\frac{1}{t}\left(I(\hat{\kappa}+th) - I(\hat{\kappa})\right) = \frac{\mu}{2}t\|h\|^2 + \frac{1}{2t}\|r(\varphi(\hat{\kappa}+th)-\varphi(\hat{\kappa}))\|^2 + \mu(\hat{\kappa}, h) + (h\varphi(\hat{\kappa}+th), \eta(\hat{\kappa})). \tag{36}$$

Переходя в (36) к пределу при $t \to 0$, приходим с учетом непрерывной зависимости φ от κ, вытекающей из леммы 2, к соотношению

$$\langle I'(\hat{\kappa}), h\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{I(\hat{\kappa}+th) - I(\hat{\kappa})}{t} = \mu(\hat{\kappa}, h) + (h\varphi(\hat{\kappa}), \eta(\hat{\kappa})) = (\mu\hat{\kappa} + \varphi(\hat{\kappa})\eta(\hat{\kappa}), h).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

3. Численный алгоритм решения обратной задачи

Для численного решения задачи (13) будем использовать двухслойный градиентный итерационный метод, в соответствии с которым уточнение κ_n проводится по схеме

$$\kappa_n = P(\kappa_{n-1} - s_n I'(\kappa_{n-1})), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{37}$$

Здесь $P : L^2(\Omega) \to K$ — оператор проектирования на множество K, n — номер итерации, s_n — итерационный параметр, $I'(\hat{\kappa})$ — градиент функционала I, определяемый в каждой точке $\hat{\kappa} \in K$ формулой (34), где $\hat{\varphi} = \varphi(\hat{\kappa})$ и $\hat{\eta} = \eta(\hat{\kappa})$ — решения прямой и сопряженной задач (23), (24). Формулы (37) и (34) лежат в основе используемого в данной работе численного алгоритма решения задачи (13), который состоит из следующих этапов:

1) выбираем начальное приближение $\kappa_0 \in K$ и полагаем $n = 1$;

2) вычисляем концентрацию $\varphi_n \equiv \varphi(k_{n-1})$ путем численного решения прямой задачи

$$-\lambda\Delta\varphi_n + \kappa_{n-1}\varphi_n = f, \quad \varphi_n|_\Gamma = \psi \tag{38}$$

при выбранном κ_{n-1};

3) вычисляем сопряженную концентрацию $\eta_n = \eta(\kappa_{n-1}) \equiv \eta(k_{n-1}, \varphi_n)$ путем решения сопряженной задачи

$$-\lambda\Delta\eta_n + \kappa_{n-1}\eta_n = -r(\varphi_n - \varphi_d), \ \eta_n|_\Gamma = 0 \tag{39}$$

при выбранном κ_{n-1}, вычисленной выше концентрации φ_n и заданной функции φ_d;

4) вычисляем градиент g_n функционала I в точке k_{n-1} по формуле

$$g_n \equiv I'(k_{n-1}) = \mu\kappa_{n-1} + \varphi_n\eta_n; \tag{40}$$

5) вычисляем новое приближение k_n по формуле

$$\kappa_n = P(\kappa_{n-1} - s_n g_n), \tag{41}$$

где s_n определяется как решение задачи минимизации $I(P(\kappa_{n-1} - sg_n)) \to \inf$ $(s > 0)$;

6) выходим из цикла, выбирая за искомое решение задачи (13) пару (k_n, φ_n), или полагаем $n = n + 1$ и переходим к этапу 2.

Исследуем некоторые вопросы сходимости описанного градиентного метода.

Теорема 5. *Если $g_n \neq 0$, то g_n является направлением спуска для $I(\kappa_{n-1})$ и существует такое число I_0, что*

$$\lim_{n\to\infty} I(\kappa_n) = I_0. \tag{42}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы (41) для доказательства теоремы достаточно доказать существование такого числа $s > 0$, что

$$I(\kappa_n) = I(P(\kappa_{n-1} - sg_n)) < I(\kappa_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots. \tag{43}$$

Считая для простоты, что $(k_{n-1} - sg_n) \in K$, так что $P(\kappa_{n-1} - sg_n) = k_{n-1} - sg_n$, и используя лемму 1 при $\hat{\kappa} = \kappa_{n-1}$ и $\kappa = \kappa_{n-1} - sg_n$, имеем:

$$\begin{aligned} I(\kappa_{n-1} - s\,g_n) - I(\kappa_{n-1}) = \frac{\mu}{2}s^2\|g_n\|^2 + \frac{1}{2}\|r(\varphi(\kappa_{n-1} - s\,g_n) - \varphi(\kappa_{n-1}))\|^2 - \mu s(k_{n-1}, g_n) - \\ - s(\varphi(k_{n-1} - sg_n)\eta(k_{n-1}), g_n) = \frac{\mu}{2}s^2\|g_n\|^2 + \frac{1}{2}\|r(\varphi(\kappa_{n-1} - sg_n) - \varphi(\kappa_{n-1}))\|^2 - \\ - s(g_n, \eta(\kappa_{n-1})(\varphi(\kappa_{n-1} - sg_n) - \varphi(\kappa_{n-1}))) - s(g_n, \varphi(\kappa_{n-1})\eta(\kappa_{n-1}) + \mu\kappa_{n-1}). \end{aligned} \tag{44}$$

Используя лемму 2 и соотношение (6), выводим, что

$$\|r(\varphi(\kappa_{n-1} - s\,g_n) - \varphi(\kappa_{n-1}))\|^2 \le C_1^2\|\kappa_{n-1} - sg_n - \kappa_{n-1}\|^2 = C_1^2 s^2\|g_n\|^2,$$

$$\begin{aligned} |(g_n, \eta(k_{n-1})(\varphi(k_{n-1} - sg_n) - \varphi(k_{n-1})))| \le \\ \le C_0\|g_n\|\|\eta(k_{n-1})\|_1\|\varphi(k_{n-1} - sg_n) - \varphi(k_{n-1})\|_1 \le C_3 s\|g_n\|^2,\ \ C_3 = C_0C_1C_2. \end{aligned} \tag{45}$$

Из (44) и (45) следует с учетом (41), что

$$\begin{aligned} I(\kappa_{n-1} - s\,g_n) - I(\kappa_{n-1}) \le \frac{\mu}{2}s^2\|g_n\|^2 + \frac{1}{2}C_1^2 s^2\|g_n\|^2 + C_3 s^2\|g_n\|^2 - s\|g_n\|^2 = \\ = (\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}C_1^2 + C_3)s^2\|g_n\|^2 - s\|g_n\|^2 = (\beta s^2 - s)\|g_n\|^2, \end{aligned} \tag{46}$$

где $\beta = (\mu + C_1^2)/2 + C_3$. Выбирая s из промежутка $(0, 1/\beta)$ и учитывая, что $g_n \neq 0$, из (46) легко получаем, что $I(\kappa_n) = I(\kappa_{n-1} - s\,g_n) < I(\kappa_{n-1})$.

В общем случае, когда $(\kappa_{n-1} - sg_n) \notin K$, соотношение (43) доказывается по аналогичной схеме с использованием свойства липшицевости оператора проектирования P. Таким образом, при указанном выше выборе значения параметра s последовательность $I(\kappa_n)$ при $n \to \infty$ является неотрицательной убывающей последовательностью. Отсюда следует существование такого числа I_0, что выполняется соотношение (42).

Теорема 6. *Градиенты g_n удовлетворяют условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2 < \infty$, так что, в частности,* $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (46) при $s = 1/(2\beta)$, заключаем, что

$$I(\kappa_n) - I(\kappa_{n-1}) \le \|g_n\|^2(\frac{1}{4\beta} - \frac{1}{2\beta}) = -\frac{1}{4\beta}\|g_n\|^2,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Просуммируем обе части последнего неравенства по n от 1 до N. В результате получим

$$\sum_{n=1}^{N}(I(\kappa_n) - I(\kappa_{n-1})) \le -\frac{1}{4\beta}\sum_{n=1}^{N}\|g_n\|^2.$$

Из этого неравенства приходим к соотношению

$$I(\kappa_N) + \frac{1}{4\beta}\sum_{n=1}^{N}\|g_n\|^2 \le I(\kappa_0).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

4. Сеточная аппроксимация обратной задачи

Рассмотрим в этом разделе сеточную аппроксимацию обратной экстремальной задачи (13). Введем в области Ω равномерную по каждому направлению сетку $\overline{\omega}$ с шагами $h_\alpha,\ \alpha = 1, 2$, полагая

$$\overline{\omega} = \{(x, y) : x = ih_1,\ y = jh_2,\ i = 0, 1, \ldots, N_1,\ j = 0, 1, \ldots, N_2\},\ \omega = \overline{\omega} \setminus \partial\overline{\omega}.$$

Здесь $\partial\overline{\omega}$ обозначает множество граничных узлов. Как обычно, значения произвольной функции $\phi(x, y)$ в узлах (x_i, y_j) сетки $\overline{\omega}$ будем обозначать через ϕ_{ij}.

Для внутренних узлов определим двумерный стандартный разностный оператор Лапласа Λ на пятиточечном шаблоне, полагая $\Lambda\varphi = \varphi_{\bar{x}x} + \varphi_{\bar{y}y}$, и поставим в соответствие исходной краевой задаче (1),(2) и сопряженной краевой задаче (19) следующие разностные задачи Дирихле:

$$[-\lambda\Lambda\varphi + \kappa\varphi]_{ij} = f_{ij},\ i = 1, \ldots, N_1 - 1,\ j = 1, \ldots, N_2 - 1, \tag{47}$$

$$\varphi_{0,j} = \psi_{0,j}, \varphi_{i,0} = \psi_{i,0}, \varphi_{N_1,j} = \psi_{N_1,j}, \varphi_{i,N_2} = \psi_{i,N_2},\ i = 1, \ldots, N_1 - 1, j = 1, \ldots, N_2 - 1, \tag{48}$$

$$[-\lambda\Lambda\eta + \kappa\eta]_{ij} = -r_{ij}(\varphi_{ij} - \varphi^d_{ij}),\ i = 1, \ldots, N_1 - 1,\ j = 1, \ldots, N_2 - 1, \tag{49}$$

$$\eta_{0,j} = \eta_{i,0} = \eta_{N_1,j} = \eta_{i,N_2} = 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, N_1 - 1,\ \ j = 1, 2, \ldots, N_2 - 1. \tag{50}$$

В таком случае разностный аналог представленного в разд. 4 алгоритма принимает следующий вид:

1) выбираем начальное приближение $\kappa^0_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, N_1 - 1,\ j = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$ и полагаем $n = 1$;

2) вычисляем сеточную концентрацию φ^n_{ij} во внутренних узлах сетки $\overline{\omega}$ на n-й итерации путем решения сеточной задачи (47),(48) при $\kappa = \kappa^{n-1}$;

3) вычисляем сеточную сопряженную концентрацию η^n_{ij} во внутренних узлах сетки $\overline{\omega}$ на n-й итерации путем решения сеточной сопряженной задачи (49),(50) при $\kappa = \kappa^{n-1}$, $\varphi = \varphi^{n-1}$;

4) вычисляем сеточный градиент g_n функционала I по формуле $g^n_{ij} = \mu k^{n-1}_{ij} + \varphi^n_{ij}\eta^n_{ij}$;

5) Вычисляем новое приближение κ_n по формуле $\kappa_{ij}^n = [P_h(\kappa^{n-1} - sg^n)]_{ij}$ при определенном, не зависящем от n значении s, где P_h — сеточный аналог оператора P;

6) выходим из цикла, принимая за искомое приближенное решение задачи (13) сеточные функции κ^n и φ^n, или полагаем $n = n + 1$ и переходим к шагу 2.

Следует отметить, что вычислительные эксперименты проводились в рамках простейшего варианта градиентного метода, т. е. метода простой итерации, когда параметр s_n является постоянным на каждом итерационном шаге. В качестве критерия выхода из цикла использовалась одно из двух условий:

$$\int_Q |\varphi_n - \varphi_d|^2 d\Omega < 10^{-5} \quad \text{либо} \quad |I(\kappa_n) - J(\kappa_{n-1})| < 10^{-8}. \tag{51}$$

5. Обсуждение результатов численных экспериментов

Проанализируем в этом разделе результаты численных экспериментов, полученные путем решения модельных обратных задач. Программирование осуществлялось в среде инженерных и научных расчетов MATLAB 6.5 на персональном компьютере PIV-2400.

В соответствии с концепцией квазиреального эксперимента сначала численно решалась прямая задача, описываемая соотношениями (47),(48), при заданных функциях f, ψ и заданном коэффициенте $\kappa = \kappa_d$. В результате расчетов определялись значения $\varphi^n(x_i, y_j)$ сеточного решения прямой задачи (47),(48) во всех узлах $(x_i, y_j) \in \Omega$, $i = 1, \ldots, N_1 - 1$, $j = 1, \ldots, N_2 - 1$. Далее проводилось возмущение сеточной функции φ_n случайными погрешностями в соответствии с формулой

$$\varphi_\delta = \varphi_n + 2\delta(\sigma^n - 1/2). \tag{52}$$

Здесь σ^n — случайная функция, равномерно распределенная на интервале [0,1], а величина δ задает уровень погрешности. Затем решалась обратная задача восстановления младшего коэффициента уравнения — параметра κ, в которой в качестве дополнительной информации о решении φ_d в подобласти $Q \subset \Omega$ использовалась функция (52).

В соответствии с методом, изложенным в разд. 4, 5, выбиралось начальное приближение κ_0, затем на каждом итерационном шаге находилось решение φ_n сеточной задачи (47), (48) при заданном приближении κ_{n-1} для κ. Далее на этом же итерационном шаге решалась сопряженная сеточная задача (49),(50) с использованием найденных значений решения φ_n прямой задачи, этого же приближения κ_{n-1} для κ и значений заданной функции φ_d. Каждая из указанных двух задач имеет вид системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с пятидиагональной симметричной матрицей. Для решения СЛАУ применялся метод сопряженных градиентов (CG) из пакета прикладных программ LINPACK, встроенный в среду MATLAB. Далее, в соответствии с этапами 4 и 5 предложенного алгоритма, вычислялось значение градиента g_n и находилось новое приближение κ_n для κ. Затем осуществлялся переход на новый итерационный шаг или происходил выход из итерационного цикла. В последнем случае за искомое решение принималась пара (κ_n, φ_n), вычисленная на последнем итерационном шаге.

Для численного решения задачи использовалась равномерная по x и y сетка при $N_1 = N_2 = 20$. В качестве исходных данных выбирались следующие функции:

$$\lambda = 1,\ f(x, y) = 0,\ (x, y) \in \Omega,\ \psi(x, y) = 1 + x,\ (x, y) \in \Gamma. \tag{53}$$

Был проведен ряд вычислительных экспериментов по идентификации младшего коэффициента κ уравнения (1), в которых искомый коэффициент являлся константой, функцией, зависящей от одной переменной x или y, а также функцией, зависящей от двух переменных x и y. Ниже мы представим результаты и анализ вычислительных экспериментов по

восстановлению искомого параметра κ для двух тестов, в которых точное значение восстанавливаемого параметра κ определялось соответственно формулами

$$\kappa(x,y)_{\text{точн}} = 5xy \tag{54}$$

и

$$\kappa(x,y)_{\text{точн}} = \sin 2\pi x \sin 2\pi y + 1. \tag{55}$$

В качестве начального приближения использовались функции $\kappa_0 = 8xy$ и $\kappa_0 = 0$ соответственно.

Все проводимые эксперименты в зависимости от значений δ разбивались на две группы. К первой группе относились тесты, в которых отсутствуют дополнительные возмущения функции φ. Целью вычислительных экспериментов этой группы являлось исследование влияния параметра μ, входящего в регуляризирующую добавку функционала качества (21), на точность восстановления искомых значений коэффициента κ, а также изучение влияния значения итерационного параметра s на скорость восстановления коэффициента κ. Ко второй группе относились тесты, в которых функция φ_n зашумлялась по формуле (52). Целью вычислительных экспериментов этой группы являлось исследование зависимости ошибки решения от величины вносимой погрешности δ при фиксированном μ.

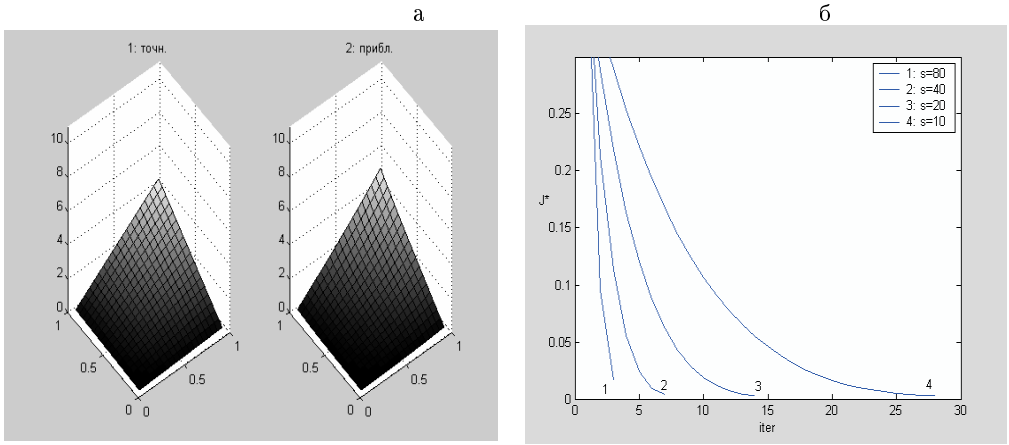
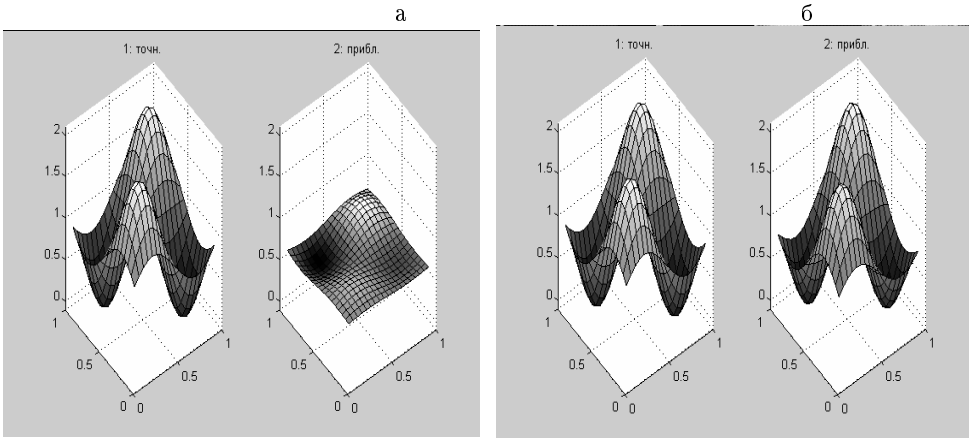


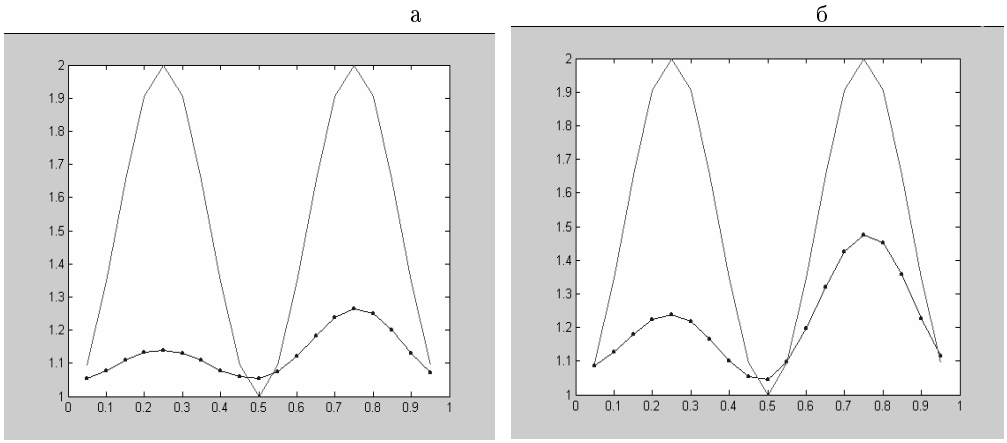
Рис. 1. Результаты вычислительных экспериментов восстановления параметра κ при $\delta = 0,\ \mu = 10^{-3},\ \kappa_{ex} = 5xy,\ \kappa_0 = 8xy.$



$\mu = 10^{-3}$ $\mu = 10^{-5}$

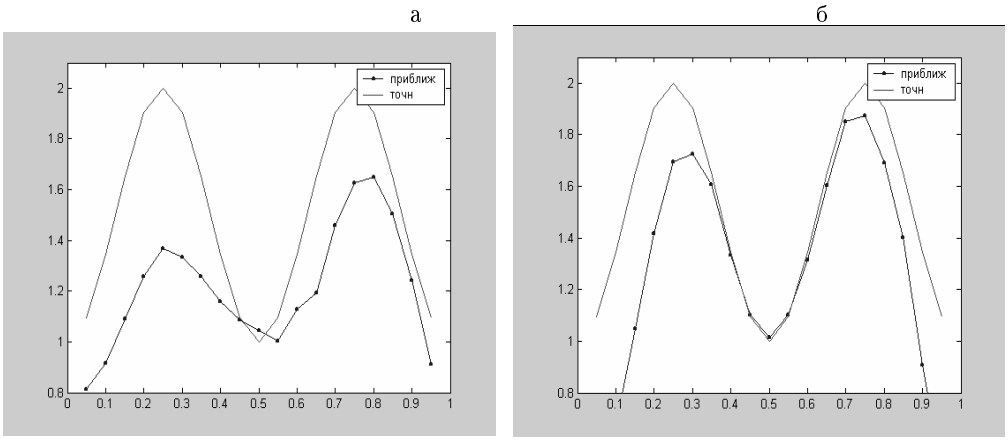
Рис. 2. Результаты вычислительных экспериментов восстановления параметра κ при $\delta = 0,\ \kappa_{ex} = \sin 2\pi x \sin 2\pi y + 1,\ \kappa_0 = 0.$

Результаты вычислительных экспериментов для тестов первой группы представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1а представлены результаты решения обратной задачи для теста 1 в виде поверхностей точно заданного формулой (54) и востановленного с помощью предложенного алгоритма при $\mu = 10^{-3}$ коэффициента κ. На рис. 1б представлены зависимости минимального значениия $I_n = \frac{1}{2}\int_\Omega |\varphi_n - \varphi_d|^2 d\Omega$ функционала качества от числа n итераций для четырех значений параметра s, равных 80, 40, 20 и 10, при $\mu = 10^{-3}$ для этого же теста 1. Видно, что для каждого значения параметра s с увеличением числа n итераций происходит убывание I_n и как следствие — увеличение точности приближенного решения. Кроме того, с увеличением значения итерационного параметра s скорость убывания I_n возрастает.



$\delta = 0.02$ $\delta = 0.005$

Рис. 3. Влияние вносимой погрешности δ на точность восстановления κ при $\mu = 10^{-3}$ $(\kappa_{ex} = \sin 2\pi x \sin 2\pi y + 1,\ \kappa_0 = 0)$.



$\delta = 0.02$ $\delta = 0.005$

Рис. 4. Влияние вносимой погрешности δ на точность восстановления κ при $\mu = 10^{-4}$ $(\kappa_{ex} = \sin 2\pi x \sin 2\pi y + 1,\ \kappa_0 = 0)$.

На рис. 2 представлены результаты решения обратной задачи для теста 2 в виде поверхностей точно заданного формулой (55) и восстановленного с помощью алгоритма коэффициента κ соответственно при $\mu = 10^{-3}$ (рис. 2а) и $\mu = 10^{-5}$ (рис. 2б). Анализ рис. 2 показывает, что точность восстановления коэффициента κ уравнения (1) существенно зависит

от значений параметра μ: чем меньше значение параметра μ, тем точнее восстанавливается искомый коэффициент κ.

Приведем теперь результаты вычислительных экспериментов для тестов второй группы. Напомним, что целью вычислительных экспериментов для тестов этой группы являлось исследование влияния погрешности δ на точность восстановления искомого коэффициента κ. При проведении экспериментов значения параметра μ являлись фиксированными, а значения уровня погрешности δ уменьшались от 10^{-1} до 10^{-5}, причем в качестве точно заданного коэффициента κ использовалась функция (55). Результаты расчетов при $\delta = 0.02$ и $\delta = 0.005$ приведены соответственно для значений $\mu = 10^{-3}$ и $\mu = 10^{-4}$ на рис. 3 и 4 в виде сечений плоскостью $x = y$ поверхностей точно заданного и восстановленного с помощью алгоритма коэффициента κ. Указанные сечения представлены на рис. 3а, 3б при $\mu = 10^{-3}$, а на рис. 4а, 4б — при $\mu = 10^{-4}$.

Анализ приведенных рис. 3 и 4 показывает, что, чем меньше вносимая погрешность δ, тем точнее восстанавливается младший коэффициент κ уравнения (1). Кроме того, точность восстановления коэффициента κ улучшается с уменьшением значения μ.

6. Заключение

В настоящей работе была исследована обратная экстремальная задача идентификации младшего коэффициента для двумерного эллиптического уравнения диффузии-реакции. Для решения указанной задачи был предложен эффективный численный алгоритм, основанный на применении двухслойного итерационного градиентного метода, и исследована его сходимость. Согласно предложенному алгоритму решение рассматриваемой обратной задачи свелось к многократному численному решению прямой и сопряженной задач для рассматриваемого уравнения и вычислению градиента функционала качества на каждом итерационном шаге. Анализ проведенных вычислительных экспериментов показал эффективность предложенного алгоритма в достаточно широком диапазоне изменения параметра μ, входящего в регуляризирующую добавку соответствующего функционала качества, и величины вносимой погрешности δ.

Список литературы

1. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Докл. РАН. 2000. Т. 375, № 3. С. 315–319.

2. *Alekseev C.V., Adomavichus E.A.* Theoretical analysis of inverse extremal problems of admixture diffusion in viscous fluids // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. V. 9, № 5. P. 435–468.

3. *Алексеев Г.В., Адомавичюс Э.А.* Исследование обратных экстремальных задач для нелинейных стационарных уравнений переноса вещества // Дальневост. мат. журн. 2002. Т. 3, № 1. С. 79–92.

4. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 3. С. 380–394.

5. *Алексеев Г.В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.

6. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

7. *Fatullayev A.G.* Determination of unknown coefficient in nonlinear diffusion equation // Nonlinear Analysis. 2001. V. 44. P. 337–344.

8. *Fatullayev A.G.* Numerical procedure for the determination of an unknown coefficients in parabolic equations // Comp. Phys. Comm. 2002. V. 144. P. 29–33.

9. *Ito K., Kunisch K.* Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Problems. 1997. V. 13. P. 995–1013.

10. *Shidfar A., Tavakoli K.* An inverse heat conduction problem // South. Asian Bull. Math. 2002. V. 26. P. 503–507.

11. *Dehghan M.* Finding a control parameter in one-dimensional parabolic equations // Appl. Math. Comp. 2003. V. 135. P. 491–503.

12. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. Москва, 2004. 480 с.

13. *Lowe B., Rundell W.* The determination of a coefficient in an elliptic equation from average flux data // J. Comput. Math. 1996. V. 70. P. 173–187.

14. *Терешко Д.А.* Численное решение задач идентификации параметров примеси для стационарных уравнений массопереноса // Выч.техн. 2004. Т. 9. Спец. вып. Ч. 4. С. 92–98.

15. *Capatina A., Stavre R.* Numerical analysis of a control problem in heat conducting Navier-Stokes fluid // Int. J. Eng. Sci. 1996. V. 34, № 13. P. 1467–1476.

16. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.

17. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 мая 2005 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00136).

Kalinina E.A. Numerical analysis of the inverse identification problem for the lower coefficient of an elliptic equation. Far Eastern Mathematical Journal. 2005. V. 6. № 1–2. P. 57–70.

ABSTRACT

In this paper the inverse problem of identification of a coefficient in the two-dimensional stationary equation of diffusion – reaction is considered. For the solution of this problem the numerical algorithm is developed which is based on the two-layer gradient algorithm. Theoretical aspects and the convergence of the algorithm are discussed. The results of numerical experiments are analyzed in details.
Key words: *elliptic equation, inverse extremal problem, coefficient identification, gradient algorithm, pollutant transfer.*