

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ–ЛАГРАНЖА ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А.А. Кельзон

Пусть n и k – фиксированные натуральные числа, причем

$$k \leq n; \quad x_{j,n} = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Через V обозначим класс 2π -периодических функций f , заданных на вещественной оси и имеющих ограниченную вариацию $V(f)$ на периоде. Пусть далее

$$a_k^{(n)}(f) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_{j,n}) \cos kx_{j,n},$$
$$b_k^{(n)}(f) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_{j,n}) \sin kx_{j,n}$$

– коэффициенты Фурье–Лагранжа функции f .

Из результатов, приведенных в книге А.Зигмунда [1, с. 28], легко получается следующая оценка

$$\max\{|a_k^{(n)}(f)|, |b_k^{(n)}(f)|\} \leq \frac{2V(f)}{(2n+1) \sin(k\pi/(2n+1))}. \quad (1)$$

Оценки коэффициентов Фурье–Лагранжа для более широких классов функций получены в работах [2], [3]. В частности, из оценки, приведенной в [2], следует, что в числителе правой части (1) коэффициент 2 можно заменить единицей. В тоже время желательно уточнить оценку (1) так, чтобы неравенство обращалось в равенство на некоторых функциях, не являющихся тождественными постоянными. Решению этой задачи и

посвящена настоящая заметка. Основные результаты сформулированы ниже в теоремах 2 и 4.

Положим

$$V_n(f) = \sum_{j=0}^{2n} |f(x_{j+1,n}) - f(x_{j,n})|.$$

Через $[x]$ и $\{x\}$ будем обозначать целую и дробную части числа x соответственно.

ЛЕММА. *Справедливы равенства*¹

$$\sup_{f \in V} \frac{|a_k^{(n)}(f)|}{V(f)} = \sup_{f \in V} \frac{|a_k^{(n)}(f)|}{V_n(f)} = \sup_{f \in V} \frac{a_k^{(n)}(f)}{V_n(f)}, \quad (2)$$

$$\sup_{f \in V} \frac{|b_k^{(n)}(f)|}{V(f)} = \sup_{f \in V} \frac{|b_k^{(n)}(f)|}{V_n(f)} = \sup_{f \in V} \frac{b_k^{(n)}(f)}{V_n(f)}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, для любой 2π -периодической функции f имеет место неравенство $V_n(f) \leq V(f)$ и, следовательно,

$$\frac{|a_k^{(n)}(f)|}{V(f)} \leq \frac{|a_k^{(n)}(f)|}{V_n(f)}. \quad (4)$$

С другой стороны, для любой 2π -периодической функции g можно построить функцию $\tilde{g} = \tilde{g}_n$ такую, что $V(\tilde{g}) = V_n(g)$, $a_k^{(n)}(\tilde{g}) = a_k^{(n)}(g)$. Для этого достаточно положить $\tilde{g}(x_{j,n}) = g(x_{j,n})$ при всех целых j , а в промежутках между узлами $x_{j,n}$ и $x_{j+1,n}$ считать функцию \tilde{g} линейной. Таким образом, будем иметь

$$\frac{|a_k^{(n)}(g)|}{V_n(g)} = \frac{|a_k^{(n)}(\tilde{g})|}{V(\tilde{g})}.$$

Из последнего равенства следует, что для любой $g \in V$

$$\frac{|a_k^{(n)}(g)|}{V_n(g)} \leq \sup_{f \in V} \frac{|a_k^{(n)}(f)|}{V(f)}.$$

Перейдя теперь к супремуму в левой части последнего неравенства, получим

$$\sup_{f \in V} \frac{|a_k^{(n)}(f)|}{V_n(f)} \leq \sup_{f \in V} \frac{|a_k^{(n)}(f)|}{V(f)}.$$

¹Здесь и ниже, чтобы не исключать случай $f = \text{const}$, считаем $0/0 = 0$.

Но из (4) следует, что верно и противоположное неравенство, и, значит, справедливо левое из равенств (2). Далее, поскольку

$$a_k^{(n)}(-f) = -a_k^{(n)}(f), \quad V_n(-f) = V_n(f),$$

то справедливо правое из равенств (2).

Равенства (3) доказываются аналогично. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место соотношение*

$$\sup_{f \in V} \frac{a_k^{(n)}(f)}{V_n(f)} = \frac{A_k^{(n)}}{2n+1}, \quad (5)$$

где $A_k^{(n)}$ – решение следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2k} c_i z_i &\rightarrow \max, \\ (-1)^{i-1} (z_i - z_{i+1}) &\geq 0, \quad i = \overline{1, 2k-1}, \quad z_1 - z_{2k} \geq 0, \\ \sum_{s=1}^k (z_{2s-1} - z_{2s}) &= 1. \end{aligned}$$

Здесь

$$c_i \equiv c_{i,k,n} = \sum_{j=[(2i-3)(2n+1)/4k]+1}^{[(2i-1)(2n+1)/4k]} \cos \frac{2kj\pi}{2n+1}, \quad i = \overline{1, 2k}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую функцию $f \in V$. Положим

$$y_j \equiv y_{j,n} = f(x_{j,n}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Имеем

$$\frac{a_k^{(n)}(f)}{V_n(f)} = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{2n} y_j \cos kx_{j,n}}{\sum_{j=0}^{2n} |y_j - y_{j+1}|}$$

и, следовательно,

$$\sup_{f \in V} \frac{a_k^{(n)}(f)}{V_n(f)} = \frac{2}{2n+1} G_k^{(n)}, \quad (7)$$

где

$$G_k^{(n)} = \sup_{\{y_j\}} \frac{\sum_{j=0}^{2n} y_j \cos \frac{2kj\pi}{2n+1}}{\sum_{j=0}^{2n-1} |y_j - y_{j+1}| + |y_{2n} - y_0|}; \quad (8)$$

здесь верхняя грань берется по всевозможным наборам вещественных чисел $\{y_j\}$, $j = \overline{0, 2n}$ (мы учли, что $y_0 = y_{2n+1}$ вследствие периодичности функции f).

Пусть имеется некоторый набор вещественных чисел $\{y_j\}$, $j = \overline{0, 2n}$. Среди чисел $\{y_j\}$, $j = 0, [(2n+1)/4k]$ и $j = 2n+1 - [(2n+1)/4k], 2n$ выберем наибольшее и обозначим его через z_1 . Если каждое из этих чисел заменить числом z_1 , то дробь, стоящая в правой части (8), не уменьшится, ибо $\cos \frac{2kj\pi}{2n+1} > 0$ при указанных j , а

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{[(2n+1)/4k]} |y_j - y_{j+1}| + \sum_{j=2n-[(2n+1)/4k]}^{2n-1} |y_j - y_{j+1}| + |y_{2n} - y_0| \\ & \geq |z_1 - y_{[(2n+1)/4k]+1}| + |y_{2n-[(2n+1)/4k]} - z_1|. \end{aligned}$$

Следовательно, при нахождении верхней грани в (8) можно рассматривать лишь такие наборы $\{y_j\}$, для которых

$$y_0 = y_1 = \dots = y_{[(2n+1)/4k]} = y_{2n+1-[(2n+1)/4k]} = \dots = y_{2n}.$$

Далее, среди чисел y_j , $j = \overline{[(2n+1)/4k+1], [3(2n+1)/4k]}$ выберем наименьшее и обозначим его через z_2 . Если все эти числа заменить числом z_2 , то дробь в правой части (8) не уменьшится, ибо при указанных j $\cos \frac{2kj\pi}{2n+1} < 0$ и

$$\sum_{j=[(2n+1)/4k]}^{[3(2n+1)/4k]} |y_j - y_{j+1}| \geq |y_{[(2n+1)/4k]} - z_2| + |z_2 - y_{[3(2n+1)/4k]+1}|.$$

Продолжая эту процедуру, при каждом $i = \overline{2, 2k}$ среди чисел

$$y_j, \quad j = \overline{[(2i-3)(2n+1)/4k+1], [(2i-1)(2n+1)/4k]},$$

выберем наибольшее, если число i нечетно, и наименьшее, если оно четно, и обозначим его через z_i . Аналогично предыдущему устанавливаем, что при замене всех чисел y_j при указанных j числом z_j дробь в правой части (8) не уменьшится и, значит, при нахождении верхней грани в (8) можно рассматривать лишь такие наборы $\{y_j\}$, для которых при $i = \overline{2, 2k}$

$$y_{[(2i-3)(2n+1)/4k]+1} = y_{[(2i-3)(2n+1)/4k]+2} = \dots = y_{[(2i-1)(2n+1)/4k]}.$$

Таким образом,

$$G_{k,n} = \sup_{\{z_i\}} \frac{\sum_{i=1}^{2k} c_i z_i}{\sum_{i=1}^{2k-1} |z_i - z_{i+1}| + |z_{2k} - z_1|}, \quad (9)$$

где c_i задаются формулой (6), а верхняя грань берется по всевозможным наборам вещественных чисел $\{z_i\}$, $i = \overline{1, 2k}$.

Легко видеть, что

$$\text{sign } c_i = (-1)^{i-1}, \quad i = \overline{1, 2k}, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{2k} c_i = 0. \quad (11)$$

Заметим, что при нахождении верхней грани в (9) можно рассматривать лишь такие наборы $\{z_i\}$, для которых

$$z_{2s+1} \geq \max\{z_{2s}, z_{2s+2}\}, \quad s = \overline{1, 2k-1}, \quad z_1 \geq \max\{z_{2k}, z_2\}. \quad (12)$$

Действительно, допустим, например, что $z_{2s+1} < z_{2s}$ при некотором s . Тогда, если заменить z_{2s+1} величиной $z_{2s+1}^* := z_{2s}$, то числитель в правой части (9) увеличится, так как $c_{2s+1} > 0$ в силу (10), а знаменатель в (9) не увеличится, ибо

$$\begin{aligned} |z_{2s} - z_{2s+1}^*| + |z_{2s+1}^* - z_{2s+2}| &= |z_{2s} - z_{2s+2}| \\ &\leq |z_{2s} - z_{2s+1}| + |z_{2s+1} - z_{2s+2}| \end{aligned}$$

и, следовательно, вся дробь в правой части (9) при такой замене увеличится.

Аналогично показывается, что при нахождении верхней грани в (9) можно не рассматривать наборы $\{z_i\}$, для которых не выполнено какое-либо из следующих неравенств

$$z_{2s+1} \geq z_{2s+2}, \quad z_1 \geq z_{2k}, \quad z_1 \geq z_2.$$

В силу сказанного

$$\begin{aligned} G_{k,n} = \max \left\{ \left(\sum_{i=1}^{2k} c_i z_i \right) \left((z_1 - z_2) + (z_3 - z_2) + (z_3 - z_4) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + (z_{2k-1} - z_{2k}) + (z_1 - z_{2k}) \right)^{-1} \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

где максимум вычисляется по наборам $\{z_i\}$, $i = \overline{1, 2k}$, удовлетворяющим условиям (12). Далее, поскольку умножение всех z_i на одну и ту же постоянную не изменит величину дроби в правой части (13), то при нахождении максимума можно считать, что

$$\sum_{s=1}^k (z_{2s-1} - z_{2s}) = 1. \quad (14)$$

Отсюда и из (7) следует утверждение теоремы ($A_k^{(n)} = 2G_k^{(n)}$).

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f \in V} \frac{|a_k^{(n)}(f)|}{V(f)} = \frac{\cos(\pi d/(4n+2))}{(2n+1) \sin(k\pi/(2n+1))},$$

где $d = d(k, 2n+1)$ - наибольший общий делитель k и $2n+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что в силу (11) прибавление ко всем z_i одной и той же постоянной не изменит величины $\sum_{i=1}^{2k} c_i z_i$.

Поэтому далее, не уменьшая общности, считаем, что $z_{2k} = 0$, и будем искать максимум суммы $\sum_{i=1}^{2k-1} c_i z_i$ при условиях, упомянутых в формулировке теоремы 1.

Введем новые переменные

$$t_i = (-1)^{i-1} (z_i - z_{i+1}), \quad i = \overline{1, 2k-1}. \quad (15)$$

Выразим теперь старые переменные через новые

$$z_i = \sum_{j=i}^{2k-1} (-1)^{j-1} t_j, \quad i = \overline{1, 2k-1}. \quad (16)$$

Отсюда видим, что для нахождения величины $A_k^{(n)}$ надо найти максимум суммы

$$\sum_{i=1}^{2k-1} c_i z_i = \sum_{i=1}^{2k-1} g_i t_i,$$

где

$$g_i = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^i c_j, \quad (17)$$

при условиях

$$t_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 2k-1},$$

$$\sum_{j=1}^k t_{2j-1} = 1, \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} t_{2j} \leq 1 \quad (19)$$

(условие (18) получено в результате сложения равенств (15) при нечетных i с учетом (14); условие (19) следует из того, что $z_1 = z_1 - z_{2k} \geq 0$ и (18); при $k = 1$ условие (19) отсутствует).

Положим

$$\tilde{g} = \max_{j=1, k-1} g_{2j}, \quad g^* = \max_{j=1, k} g_{2j-1}$$

(при $k = 1$ считаем $\tilde{g} = 0$). В силу (18) и (19)

$$\sum_{i=1}^{2k-1} g_i t_i \leq \tilde{g} + g^*,$$

причем знак неравенства здесь переходит в знак равенства, если положить $t_{2j} = 1$ при том номере j , для которого $\tilde{g} = g_{2j}$ и $t_{2j} = 0$ при прочих j , $t_{2j-1} = 1$ при том номере j , для которого $g^* = g_{2j-1}$ и $t_{2j-1} = 0$ при прочих j .

Таким образом,

$$A_k^{(n)} = \tilde{g} + g^*. \quad (20)$$

Из (6) и (17) находим

$$g_i = (-1)^{i-1} \sum_{j=-[(2n+1)/4k]}^{[(2i-1)(2n+1)/4k]} \cos \frac{2kj\pi}{2n+1}$$

и, воспользовавшись известной формулой (см., например, [4, с.44]), после несложных преобразований получим

$$g_i = (-1)^{i-1} \frac{\sin\left(\left(\left[\frac{2n+1}{4k}\right] + \frac{1}{2}\right) \frac{2k\pi}{2n+1}\right) + \sin\left(\left(\left[\frac{(2i-1)(2n+1)}{4k}\right] + \frac{1}{2}\right) \frac{2k\pi}{2n+1}\right)}{2 \sin(k\pi/(2n+1))},$$

откуда следует

$$g_i = \frac{\cos\left(\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{(2i-1)(2n+1)}{4k}\right\}\right) \frac{2k\pi}{2n+1}\right) + (-1)^{i-1} \sin\left(\left(\left[\frac{2n+1}{4k}\right] + \frac{1}{2}\right) \frac{2k\pi}{2n+1}\right)}{2 \sin(k\pi/(2n+1))}. \quad (21)$$

Имеем при $k \geq 2$

$$\tilde{g} = \frac{1}{2 \sin(k\pi/(2n+1))} \left(\max_{j=1, k-1} \cos\left(\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{(4j-1)(2n+1)}{4k}\right\}\right) \frac{2k\pi}{2n+1}\right) - \sin\left(\left(\left[\frac{2n+1}{4k}\right] + \frac{1}{2}\right) \frac{2k\pi}{2n+1}\right) \right).$$

Пусть $2n+1 = (2m+1)d$ и $k = rd$, где $(2m+1)$ и r — взаимно простые числа. Следовательно, $(2m+1)$ и $4r$ также взаимно просты.

Рассмотрим далее два случая.

а) Пусть число $(r - m)$ – нечетное. Согласно известной теореме из теории чисел [5, с. 46] найдутся целые числа u и v такие, что $u(2m+1) + v \cdot 4r = r - m$, причем, очевидно, что число u – нечетное. Выберем целое λ так, чтобы выполнялось неравенство $1 \leq (u + 1)/2 + \lambda r < k$. Тогда при $j = (u + 1)/2 + \lambda r$ имеем после несложных преобразований

$$\left\{ \frac{(4j - 1)(2n + 1)}{4k} \right\} = \left\{ \frac{r - m - 4vr}{2r} + \frac{2m + 1}{4r} \right\} = \frac{2r + 1}{4r} = \frac{1}{2} + \frac{d}{4k}.$$

Очевидно, что число $(2r + 1)/4r$ есть ближайшая к $\frac{1}{2}$ правильная дробь со знаменателем $4r$ и нечетным числителем, и поэтому в рассматриваемом случае $((r - m) - \text{нечетное})$

$$\tilde{g} = \frac{1}{2 \sin(k\pi/(2n + 1))} \left(\cos \frac{\pi d}{4n + 2} - \sin \left(\left(\left[\frac{2n + 1}{4k} \right] + \frac{1}{2} \right) \frac{2k\pi}{2n + 1} \right) \right). \quad (22)$$

б) Пусть теперь $(r - m)$ – число четное. В этом случае $(m + r)/2 \in \mathbb{Z}$ найдутся целые числа u и v такие, что

$$u(2m + 1) + v \cdot 4r = (m + r)/2.$$

Выберем целое число λ так, чтобы выполнялось неравенство $1 \leq u + \lambda r < k$. Тогда при $j = u + \lambda r$ имеем в результате несложных преобразований

$$\left\{ \frac{(4j - 1)(2n + 1)}{4k} \right\} = \left\{ \frac{(m + r)/2 - 4vr}{r} - \frac{2m - 1}{4r} \right\} = \frac{2r - 1}{4r} = \frac{1}{2} - \frac{d}{4k}.$$

Отсюда видим, что и при четном $(r - m)$ справедливо равенство (22). Нетрудно проверить также, что при $k = 1$ правая часть (22) обращается в нуль и, следовательно, (22) верно и в этом случае.

Далее, из (21) имеем

$$g^* = \frac{1}{2 \sin(k\pi/(2n + 1))} \left(\max_{j=1, k} \cos \left(\left(\frac{1}{2} - \left\{ \frac{(4j - 3)(2n + 1)}{4k} \right\} \right) \frac{2k\pi}{2n + 1} \right) + \sin \left(\left(\left[\frac{2n + 1}{4k} \right] + \frac{1}{2} \right) \frac{2k\pi}{2n + 1} \right) \right).$$

Аналогично предыдущему показывается, что отсюда следует

$$g^* = \frac{1}{2 \sin(k\pi/(2n + 1))} \left(\cos \frac{\pi d}{4n + 2} + \sin \left(\left(\left[\frac{2n + 1}{4k} \right] + \frac{1}{2} \right) \frac{2k\pi}{2n + 1} \right) \right).$$

Складывая это равенство с (22) и учитывая (20), получим

$$A_k^{(n)} = \frac{\cos(\pi d/(4n+2))}{\sin(k\pi/(2n+1))}.$$

Отсюда и из теоремы 1 следует, что

$$\sup_{f \in V} \frac{a_k^{(n)}(f)}{V_n(f)} = \frac{\cos(\pi d/(4n+2))}{(2n+1) \sin(k\pi/(2n+1))}$$

и в силу леммы 1 получаем утверждение теоремы 2.

Переходим к оценке коэффициента $b_k^{(n)}(f)$.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место соотношение*

$$\sup_{f \in V} \frac{b_k^{(n)}(f)}{V_n(f)} = \frac{B_k^{(n)}}{2n+1},$$

где $B_k^{(n)}$ – решение следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2k} e_i z_i &\rightarrow \max, \\ (-1)^{i-1} (z_i - z_{i+1}) &\geq 0, \quad i = \overline{1, 2k-1}, \quad z_1 - z_{2k} \geq 0, \\ \sum_{s=1}^k (z_{2s-1} - z_{2s}) &= 1. \end{aligned}$$

Здесь

$$e_i = e_{i,k,n} = \sum_{j=[(i-1)(2n+1)/2k]+1}^{[i(2n+1)/2k]} \sin \frac{2kj\pi}{2n+1}, \quad i = \overline{1, 2k}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, поэтому мы его опускаем.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f \in V} \frac{|b_k^{(n)}(f)|}{V(f)} = \frac{1 + \cos(\pi d/(2n+1))}{(4n+2) \sin(k\pi/(2n+1))},$$

где величина d имеет тот же смысл, что и в теореме 2.

Доказательство. Положим

$$h_i = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^i e_j, \quad i = \overline{1, 2k-1}.$$

Несложные преобразования дадут

$$h_i = \frac{\cos\left(\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{i(2n+1)}{2k}\right\}\right)\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + (-1)^{i-1} \cos \frac{k\pi}{2n+1}}{2 \sin(k\pi/(2n+1))}.$$

Далее, аналогично тому, как при доказательстве теоремы 2 была выведена формула (20), можно установить, что

$$B_k^{(n)} = \tilde{h} + h^*, \quad (23)$$

где $\tilde{h} = \max_{j=1, k-1} h_{2j}$, $h^* = \max_{j=1, k} h_{2j-1}$ (при $k=1$ считаем $\tilde{h} = 0$).

Далее с помощью рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 2, устанавливаем, что

$$\tilde{h} = \begin{cases} \frac{1 - \cos(k\pi/(2n+1))}{2 \sin(k\pi/(2n+1))}, & k/2 \in \mathbb{N}; \\ \frac{\cos(\pi d/(2n+1)) - \cos(k\pi/(2n+1))}{2 \sin(k\pi/(2n+1))}, & (k+1)/2 \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$h^* = \begin{cases} \frac{\cos(\pi d/(2n+1)) + \cos(k\pi/(2n+1))}{2 \sin(k\pi/(2n+1))}, & k/2 \in \mathbb{N}; \\ \frac{1 + \cos(k\pi/(2n+1))}{2 \sin(k\pi/(2n+1))}, & (k+1)/2 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Подставив эти выражения в (23) и учтя теорему 3 и лемму, получим утверждение теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следуя Д.Л.Берману [6], назовем 2π -периодическую функцию f функцией квазиограниченной вариации, если

$$\bar{V}(f) \equiv \sup_{m \in \mathbb{N}} V_m(f) < \infty.$$

Из хода доказательств вышеприведенных теорем ясно, что если f — функция квазиограниченной вариации, то для ее коэффициентов Фурье-Лагранжа справедливы следующие точные оценки:

$$|a_k^{(n)}(f)| \leq \frac{\cos(\pi d/(4n+2))V_n(f)}{(2n+1) \sin(k\pi/(2n+1))};$$

$$|b_k^{(n)}(f)| \leq \frac{\cos^2(\pi d/(4n+2))V_n(f)}{(2n+1) \sin(k\pi/(2n+1))}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [2] Кельзон А.А. О коэффициентах Фурье и коэффициентах Фурье–Лагранжа функций ограниченных высших вариаций // ДАН СССР. 1975. Т. 221. № 2. С. 283–286.
- [3] Христов В.Х. О коэффициентах Фурье–Лагранжа // Плиска. Бълг. мат. студ. 1983. Т. 5. С. 23–31.
- [4] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
- [5] Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
- [6] Берман Д.Л. Об одном интерполяционном аналоге критерия Винзера непрерывности функции ограниченной вариации // ДАН СССР. 1950. Т. 196. № 3. С. 495–497.