А. В. Пухликов, Теорема Лиувилля в задачах оптимального управления,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 11, 1958–1965

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 519.6+513.8

А. В. ПУХЛИКОВ

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 0. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1], где был сделан первый шаг в интерпретации оптимального управления как теории кусочно-гладких гамильтоновых систем на симплектических многообразиях. Важным аргументом в пользу правомерности такого подхода является доказанная в [1] теорема о том, что скобка Пуассона кусочно-гладких первых интегралов системы оптимального управления глобально непрерывна, так что, как и в классической ситуации, первые интегралы образуют алгебру Ли. Это позволяет получать новые первые интегралы из уже известных.

В данной работе рассматриваются вполне интегрируемые, т. е. допускающие полный набор глобальных первых интегралов в инволюции, кусочно-гладкие гамильтоновы системы. Доказано, что такие системы эквивалентны гладким, т. е. существует кусочно-гладкий симплектический диффеоморфизм исходного многообразия на некоторое другое, превращающий первые интегралы в гладкие функции. Динамика этих систем описывается классической теоремой Лиувилля [2—4]. В [5] было отмечено, что для кусочно-гладких вполне интегрируемых систем должен быть справедлив аналог теоремы Лиувилля. Здесь дается полное доказательство более сильного факта.

Для доказательства теоремы об интегрируемых системах фазовое пространство разрезается вдоль гиперповерхности излома интегральных траекторий (гиперповерхности синтеза экстремалей, в терминах теории управляемых систем) и затем вновь склеивается специальным образом. Такая схема доказательства требует предварительно постановки и решения общей задачи склейки кусочно-гладкой гамильтоновой системы из набора гладких гамильтоновых систем на многообразиях с краями: проход экстремали через гиперповерхность излома интерпретируется как переход с одного края на другой при склейке этих краев. Задаче склейки посвящен § 1, вполне интегрируемым системам — § 2.

§ 1. СИСТЕМЫ С НЕОСОБОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬЮ ИЗЛОМОВ

Рассматривается задача склеивания кусочно-гладкой гамильтоновой системы из набора гладких.

1.1. Постановка задачи склеивания. Пусть (M^{2n}, ω) — гладкое симплектическое многообразие, $Q \subset M$ — гладкая гиперповерхность без края, $Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$ — ее разложение на связные компоненты, т. е. $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Разрезание многообразия M вдоль компонент гиперповерхности Q приводит к набору симплектических многообразий с краями, что позволяет рассматривать исходное многообразие с кусочно-гладкой структурой Q как результат склейки гладких симплектических многообразий с краями и соответственно кусочно-гладкую гамильтонову систему на M с гиперповерхностью изломов Q как результат склейки гладких гамильтоновых систем на этих многообразиях. Для точной постановки задачи склейки введем следующие понятия и данные.

Ограничение формы ω на Q имеет одномерное ядро, что определяет линейное подрасслоение $\operatorname{Ker}(\omega|_Q)\subset TQ$, слой которого в точке $x\in Q$ обозначим через $\operatorname{Ker}(\omega|_Q)_x$. Далее, полагая для простоты обозначений $Q=Q_i$, имеем точную последовательность векторных расслоений на (гладком связном) многообразии Q: $0\to TQ\to TM|_Q\to N_{Q/M}\to 0$, $N_{Q/M}$ — нормальное линейное расслоение, ориентируемое (и тривиальное) тогда и только тогда, когда гиперповерхность Q коориентируема, т. е. $TM|_Q\backslash TQ$ распадается на две компоненты. Пусть $s_0\colon Q\to N_{Q/M}$ — нулевое сечение, и предположим, что Q коориентируема. Тогда $N_{Q/M}=$ $=N^+_{Q/M}\cup s_0(Q)\cup N^-_{Q/M}$ (выбор $+$ или $-$ произволен), и линейное расслоение $\operatorname{Ker}(\omega|_Q)$ также оказывается ориентируемым (тривиальным): положим $\operatorname{Ker}_\pm(\omega|_Q)_x=\{v\in\operatorname{Ker}(\omega|_Q)_x\,|\,\pm\omega(v,N^+_{Q/M})>0\}$, тогда $\operatorname{Ker}(\omega|_Q)\backslash\tilde{s}_0(Q)=\operatorname{Ker}_+(\omega|_Q)\cup\operatorname{Ker}_-(\omega|_Q)$, $\tilde{s}_0(\cdot)$ — нулевое сечение. Если изменить ориентацию $N_{Q/M}$ на противоположную, то переменится и ориентация расслоения $\operatorname{Ker}(\omega|_Q)$.

Пусть $H\colon M\to\mathbf{R}$ — кусочно-гладкая функция с гиперповерхностью изломов $Q=\bigcup\limits_{i\in I}Q_i$, т. е. H непрерывна, гладкая вне Q и для любого $x\in Q$ существуют окрестность $U\ni x$, $U\backslash(U\cap Q)=U^+\cup U^-$ и пара гладких функций $h_\pm\colon U\to\mathbf{R}$ такие, что $H|_{U^\pm}=h_\pm$.

Определение 1. Кусочно-гладкую функцию H с гиперповерхностью изломов Q назовем *понтрягинской*, если U и $h_\pm$ могут быть каждый раз выбраны так, что $H=\max(h_\pm)$.

Легко видеть, что процедура склейки для каждой компоненты Q_i гиперповерхности Q не зависит от других компонент, поэтому задачу склейки достаточно ставить и решать для связной гиперповерхности Q.

Задача А (коориентируемой склейки). Пусть (M_α,ω_α), $\alpha=1,2,$ — пара симплектических многообразий с краями $\partial M_\alpha=Q_\alpha$ — связными гиперповерхностями. Пусть $\mathcal{F}_\alpha\subset C^\infty(M_\alpha)$ — наборы гладких функций, $\sigma_{12}\colon\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2$ — биекция, $\mathcal{P}_\alpha\subset\mathcal{F}_\alpha$, $\sigma_{12}(\mathcal{P}_1)=\mathcal{P}_2$. Построить симплектическое замкнутое (т. е. без края) многообразие (M,ω), $Q\subset M$ — гладкая связная гиперповерхность, и симплектические вложения $i_\alpha\colon M_\alpha\to M$ такие, что: *i)* $M=i_1(M_1)\cup i_2(M_2)$, $Q=i_1(M_1)\cap i_2(M_2)$; *ii)* $i_1(Q_1)=$ $=i_2(Q_2)=Q$; *iii)* для любой функции $F\in\mathcal{F}_1$ функции $F\circ i_1^{-1}$ на $i_1(M_1)$ и $\sigma_{12}(F)\circ i_2^{-1}$ на $i_2(M_2)$ склеиваются в однозначную глобально непрерывную функцию на M, причем эта функция понтрягинская, если $F\in\mathcal{P}_1$.

Задача В (некоориентируемой склейки). Пусть $(\tilde{M},\tilde{\omega})$ — симплектическое многообразие с краем $\partial\tilde{M}=\tilde{Q}$ — связной гиперповерхностью, $\mathcal{F}\subset C^\infty(\tilde{M})$ — набор гладких функций, $\mathcal{P}\subset\mathcal{F}$. Построить замкнутое симплектическое многообразие (M,ω) с гладкой связной гиперповерхностью $Q\subset M$ и отображение $\pi\colon\tilde{M}\to M$, локально являющееся симплектическим вложением, такие, что: *i)* π взаимно однозначно вне $\tilde{Q}$, Q; *ii)* $\pi\colon\tilde{Q}\to Q$ — неразветвленное двулистное накрытие; *iii)* $F\in\mathcal{F}$ (соответственно $F\in\mathcal{P}$) опускаются до глобально непрерывных (соответственно понтрягинских) функций на M.

1.2. Необходимые условия склейки. Отметим, что при решении задачи склейки многообразия M_α в случае А и многообразие $\tilde{M}$ в случае В можно заменить любыми открытыми подмножествами, содержащими склеиваемые края,— на результат это не повлияет. Вся существенная информация сосредоточена, таким образом, на гиперповерхностях Q_α (задача А) или $\tilde{Q}$ (задача В). Следовательно, задача склейки должна сводиться к некоторой задаче на Q_α или $\tilde{Q}$.

В обозначениях задачи А положим $i_{12}=i_2^{-1}\circ i_1: Q_1\to Q_2$, $i_{21}=i_{12}^{-1}$, в обозначениях задачи В пусть i — инволюция, переставляющая точки в слоях двулистного накрытия π. Очевидно, $i_{12}^*(\omega_2|_{Q_2})=\omega_1|_{Q_1}$, $i^*(\tilde{\omega}|_{\tilde{Q}})=$ $=\tilde{\omega}|_{\tilde{Q}}$. Далее, $i_{12}^*(F|_{Q_2})=\sigma_{12}^{-1}(F)|_{Q_1}$ для $F\in\mathcal{F}_2$, $i^*(F)=F$ для $F\in\mathcal{F}$. Наконец, если коориентировать Q_α (соответственно $\tilde{Q}$) внутренней нормалью, в тривиальных линейных расслоениях $\operatorname{Ker}(\omega_\alpha|_{Q_\alpha})$ (соответственно $\operatorname{Ker}(\tilde{\omega}|_{\tilde{Q}})$) выделяются положительная и отрицательная компоненты $\operatorname{Ker}_\pm(\omega_\alpha|_{Q_\alpha})$ $(\operatorname{Ker}_\pm(\tilde{\omega}|_{\tilde{Q}}))$, и нетрудно видеть, что i_{12} меняет знаки компонент: $(i_{12})_*\operatorname{Ker}_\pm(\omega_1|_{Q_1})=\operatorname{Ker}_\mp(\omega_2|_{Q_2})$, аналогично $i_*\operatorname{Ker}_\pm(\tilde{\omega}|_{\tilde{Q}})=$ $=\operatorname{Ker}_\mp(\tilde{\omega}|_{\tilde{Q}})$.

Основной результат данного раздела — достаточность выписанных необходимых условий для существования решения задачи склейки (в случае $\mathcal{P}=\varnothing$).

Теорема 1. *А) В обозначениях задачи А предположим, что существует диффеоморфизм* $i_{12}: Q_1\to Q_2$, *переводящий* $\omega_2|_{Q_2}$ *в* $\omega_1|_{Q_1}$, $\mathcal{F}_2|_{Q_2}$ *в* $\mathcal{F}_1|_{Q_1}$ *и переставляющий положительную и отрицательную компоненты* $\operatorname{Ker}_\pm(\omega_\alpha|_{Q_\alpha})$. *Тогда задача А имеет решение такое, что* $i_{12}=i_2^{-1}\circ i_1|_{Q_1}$.

В) В обозначениях задачи В предположим, что существует инволюция $i:\tilde{Q}\to\tilde{Q}$, *сохраняющая* $\tilde{\omega}|_{\tilde{Q}}$, $\mathcal{F}|_{\tilde{Q}}$ *и переставляющая компоненты* $\operatorname{Ker}_\pm(\tilde{\omega}|_{\tilde{Q}})$. *Тогда задача В имеет решение такое, что* i *соответствует двулистному накрытию* π.

1.3. Начало доказательства теоремы. Рассмотрим задачу А — вторая часть теоремы устанавливается аналогично.

Очевидно, задачу склейки всегда можно решить локально. Пусть $U_\alpha\subset Q_\alpha$ — открытые множества, $i_{12}(U_1)=U_2$, и предположим, что существуют гладкие функции F_α на M_α такие, что $F_1|_{U_1}=F_2\circ i_{12}|_{U_1}$ и $\operatorname{sgrad} F_\alpha$ всюду на U_α трансверсален к Q_α. Тогда, следуя схеме доказательства теоремы о локальном выпрямлении [1], можно склеить окрестности $V_\alpha\subset M_\alpha$, $V_\alpha\cap Q_\alpha=U_\alpha$ в открытое множество V, продолжая интегральные траектории $\operatorname{sgrad} F_1$ интегральными траекториями $\operatorname{sgrad} F_2$; при этом формы ω_α склеятся в гладкую симплектическую форму на V, а функции F_α — в гладкую функцию. Более того, очевидно, что любая склейка локально получается таким образом. Следовательно, для решения задачи А необходимо глобализовать описанную конструкцию.

Пусть $U_{\alpha j}$, $j\in I$,— открытые покрытия Q_α и $F_{\alpha j}$ — наборы гладких функций на M_α со следующими свойствами: *i*) $i_{12}(U_{1j})=U_{2j}$; *ii*) $F_{1j}|_{U_{1j}}=$ $=F_{2j}\circ i_{12}|_{U_{1j}}$; *iii*) $\operatorname{sgrad} F_{\alpha j}$ всюду на $U_{\alpha j}$ трансверсален к Q_α. Пусть $V_{\alpha j}\subset M_\alpha$ — открытые подмножества, $V_{\alpha j}\cap Q_\alpha=U_{\alpha j}$, $\operatorname{sgrad} F_{\alpha j}\neq 0$ в $V_{\alpha j}$. В объединении $V_{1j}\cup V_{2j}$ отождествим U_{1j} и U_{2j} посредством i_{12} и наделим полученное множество структурой гладкого симплектического многообразия, продолжая интегральные траектории поля $\operatorname{sgrad} F_{1j}$ интегральными траекториями поля $\operatorname{sgrad} F_{2j}$. Обозначим полученное симплектическое многообразие через V_j, а естественные симплектические вложения через $i_{\alpha j}: V_{\alpha j}\to V_j$. Очевидно, $i_{12}|_{U_{1j}}=i_{2j}^{-1}\circ i_{1j}|_{U_{1j}}$. Если теперь положить $M=M_1\cup M_2$ с отождествленными посредством i_{12} гиперповерхностями Q_α, то система открытых множеств V_j, вообще говоря, не будет задавать на M в окрестности Q структуру гладкого многообразия. В самом деле, в окрестности множества $U_{jk}=U_j\cap U_k\subset Q$, $j, k\in I$, имеются две гладкие структуры, наследуемые из V_j и V_k, совпадающие a priori лишь вне U_{jk}. Вдоль U_{jk} эти структуры отличаются на кусочно-гладкий симплектический диффеоморфизм и поэтому, вообще говоря, не эквивалентны. Положение можно исправить, изменив наборы функций $F_{\alpha j}$, задающие склейку.

1.4. Диффеоморфизмы, сохраняющие струи. Напомним, что k-струя интегральной траектории векторного поля X в точке x есть дифференциальный оператор, ставящий в соответствие гладкой функции f разложение Тейлора k-го порядка ее ограничения на эту интегральную траекторию:

$$f \mapsto \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} t^m (X^m f)\,|_x.$$

Будем подправлять функции $F_{\alpha j}$ так, чтобы траектории $\operatorname{sgrad} F_{\alpha a}$, $\operatorname{sgrad} F_{\alpha b}$ на $V_a \cap V_b$ можно было сгладить одновременно до порядка $k=1, 2, \ldots$, т. е. симплектическим автоморфизмом, скажем, $V_{1a} \cap V_{1b}$, можно было добиться одновременного совпадения k-струй траекторий $\operatorname{sgrad} F_{1a}$, $\operatorname{sgrad} F_{2a}$ и $\operatorname{sgrad} F_{1b}$, $\operatorname{sgrad} F_{2b}$.

Лемма 1. *Пусть (U, ω) — симплектическое многообразие, $Z \subset U$ — гладкая гиперповерхность с глобальным уравнением $z=0$, $z \in C^\infty(U)$, $dz|_Z \neq 0$. Тогда: i) для $f, g \in C^\infty(U)$ k-струи векторных полей $\operatorname{sgrad} f$, $\operatorname{sgrad} g$ и f, g совпадают на Z, $k \geqslant 0$, тогда и только тогда, когда z^{k+1} делит $f-g$ в алгебре $C^\infty(U)$; ii) если $\operatorname{sgrad} f|_Z$ всюду трансверсален к Z и симплектический диффеоморфизм $\varphi: U \to U$ сохраняет Z и k-струи $(\operatorname{sgrad} f)|_Z$, то φ сохраняет k-струи с началом в Z; iii) если симплектический диффеоморфизм $\varphi: U \to U$ сохраняет Z и k-струи с началом в Z, то для любой $f \in C^\infty(U)$*

$$\varphi^* f = f + \Phi(f) z^{k+1},$$

где $\Phi(f)|_Z = \{z, f\}|_Z \cdot a_\varphi$, $a_\varphi \in C^\infty(Z)$ — некоторая функция, зависящая только от φ.

Доказательство. i) Если $k=0$, то из $f|_Z = g|_Z$, очевидно, вытекает, что $z | f-g$. Если $k \geqslant 1$, то по предположению индукции имеем $z^k | f-g$, так что $f = g + hz^k$. Но

$$0 = (\operatorname{sgrad} f)^k|_Z - (\operatorname{sgrad} g)^k|_Z = (h|_Z)(\operatorname{sgrad} z)^k|_Z.$$

Векторное поле $\operatorname{sgrad} z|_Z$ есть нигде не исчезающее сечение расслоения $\operatorname{Ker}(\omega|_Z)$, так что $h|_Z = 0$ и $z|h$, что и требовалось. В обратную сторону рассуждения тривиальны. ii) следует из iii): для любого $m \leqslant k$ имеем $\varphi^* g = g + \Phi_m(g) z^m$, где $\Phi_m(f)|_Z = \{z, f\}|_Z \cdot a_{m,\varphi} = 0$, откуда, ввиду того что $\{z, f\}|_Z \neq 0$, получаем $a_{m,\varphi} \equiv 0$ и, значит, $\Phi_m(g)|_Z = 0$ для $m \leqslant k$, т. е. k-струя любого поля $\operatorname{sgrad} g$ на Z сохраняется.

Наконец, iii) получается прямым вычислением: поскольку φ сохраняет симплектическую структуру, $\{\varphi^* f, \varphi^* g\} = \{f, g\}$, но $\{\varphi^* f, \varphi^* g\} = \{f, g\} + (k+1)(\Phi(f)\{z, g\} + \Phi(g)\{z, f\}) z^k + z(\ldots)$, так что $\Phi(f)\{z, g\}|_Z = \Phi(g)\{z, f\}|_Z$. В окрестности каждой точки $x \in Z$ выберем g так, чтобы $\{z, g\}_x \neq 0$, и положим $a_\varphi(x) = \Phi(g)\{z, g\}^{-1}(x)$. Лемма полностью доказана.

1.5. Построение глобальной склейки. Доказательство теоремы 1 будем проводить индукцией по целочисленному параметру $k \geqslant 0$. Отметим, что Q_α можно задать в M_α одним глобальным уравнением $q_\alpha = 0$, $q_\alpha \in C^\infty(M_\alpha)$.

Предположим, что для некоторого $k \in \mathbf{Z}_+$ выполнено следующее условие (S_k): для любых $a, b \in I$, таких, что $U_a \cap U_b \neq \varnothing$ гладкость интегральной траектории $\operatorname{sgrad} F_{\alpha a}$ на $U_a \cap U_b$ вплоть до порядка k

(т. е. совпадение k-струй траекторий $\operatorname{sgrad} F_{1a}$ и $\operatorname{sgrad} F_{2a}$ на Q) влечет за собой гладкость интегральной траектории $\operatorname{sgrad} F_{ab}$ на $U_a \cap U_b$. Основание индукции обеспечивается тем, что для $k=0$ этому условию удовлетворяет исходный набор $\{F_{\alpha j}\}$. Введем на $V_a \cap V_b$ гладкую структуру, считая гладкими траектории $\operatorname{sgrad} F_{\alpha a}$. Согласно лемме 1$i$), в этой структуре имеем $F_{1b}-F_{2b}=d_{ab}q^{k+1}$. Положим $\mu_{ab}=(d_{ab}/\{F_{1b}, q\})|_{U_a \cap U_b}$.

Лемма 2. *Коцепь $\{\mu_{ab}\}$ есть коцикл: $\mu_{ab}=-\mu_{ba}$, $\mu_{ab}+\mu_{bc}+\mu_{ca}=0$ на $U_a \cap U_b \cap U_c$ для любых $a, b, c \in I$, таких, что $U_a \cap U_b \cap U_c \neq \varnothing$.*

Доказательство. Переход от одной гладкой структуры к другой можно рассматривать как применение к одной из «половин» множества $V_a \cap V_b$ симплектического изоморфизма, сохраняющего k-струи вдоль $U_a \cap U_b$. В структуре, определяемой гладкостью интегральной траектории $\operatorname{sgrad} F_{\alpha a}$, имеем $F_{1a}^{(a)}=F_{2a}^{(a)}$, $F_{1b}^{(a)}=F_{2b}^{(a)}+d_{ab}q^{k+1}$. Аналогично в структуре, наследуемой из U_b, имеем $F_{1a}^{(b)}=F_{2a}^{(b)}+d_{ba}q^{k+1}$, $F_{1b}^{(b)}=F_{2b}^{(b)}$. Применяя лемму 1$iii$), получим $\mu_{ab}+\mu_{ba}=0$. Аналогичным образом, выписывая представления для $F_{\alpha c}$ в картах U_a и U_b, применяем лемму 1iii) и получаем второе соотношение, что и требовалось.

Хорошо известно, что структурный пучок гладкого многообразия $\mathscr{C}^\infty$ не имеет высших когомологий, $H^i(Q, \mathscr{C}^\infty_Q)=0$ при $i \geqslant 1$ (пучок гладких функций допускает разбиение единицы). Поэтому, если покрытие $\{U_a\}$ выбрано достаточно хорошим, что можно, переходя к измельчению, предполагать изначально, коцикл $\{\mu_{ab}\}$ является кограницей, т. е. существуют функции $\mu_a \in C^\infty(U_a)$ такие, что $\mu_{ab}=\mu_a-\mu_b$. Пусть $\tilde{\mu}_a \in C^\infty(M_1)$ таковы, что $\tilde{\mu}_a|_{U_a}=\mu_a$, и $s_k \in C^\infty(M_1)$ — функция со следующими тремя свойствами: i) $s_k \equiv 1$ в некоторой окрестности Q_1; ii) $0 \leqslant s_k \leqslant 1$ всюду; iii) $s_k \equiv 0$ вне некоторой окрестности Q_1. Положим теперь $\tilde{F}_{1a}=F_{1a}+s_k\tilde{\mu}_a\{q, F_{1a}\}q^{k+1}$. По построению наборы функций $\{\tilde{F}_{1a}\}$, $\{F_{2a}\}$ задают склейку, удовлетворяющую условию (S_{k+1}).

Итерация описанной процедуры приводит к последовательности наборов $\{F_{1a}^{(k)}\}$. Если бы $F_{1a}^{(k)}$ локально равномерно по Q_1 сходились бы к набору $\{F_{1a}^\infty\}$, то очевидно, что вместе с набором $\{F_{2a}\}$ они задавали бы гладкую склейку. Требуемой сходимости можно добиться подходящим выбором функций s_k, уменьшая множество, вне которого $s_k \equiv 0$.

Для склейки функций из наборов $\mathscr{F}_\alpha$, очевидно, достаточно совместить их на склеиваемых краях, так что наличие этих наборов ничего не меняет (задача существенно усложнилась бы, если бы было необходимо склеить даже одну пару функций $F_\alpha \in C^\infty(M_\alpha)$ в гладкую функцию на M). Теорема 1 полностью доказана.

§ 2. ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Доказано, что вполне интегрируемая кусочно-гладкая гамильтонова система с неособой гиперповерхностью изломов эквивалентна (в кусочно-гладком смысле) гладкой вполне интегрируемой системе, так что ее динамика описывается классической теоремой Лиувилля.

2.1. Полный набор интегралов в инволюции. Пусть (M^{2n}, ω) и $Q \subset M$ такие же, как в п. 1.1, $H_1, \ldots, H_n$ — набор кусочно-гладких функций с гиперповерхностью изломов Q, удовлетворяющий следующим условиям: i) $\{H_a, H_b\} \equiv 0$; ii) $\mathscr{H}=(H_1, \ldots, H_n): M \to U \subset \mathbf{R}^n$ — собственное сюръективное отображение, где $U \subset \mathbf{R}^n$ — открытое подмножество, причем $d\mathscr{H}: TM \to T\mathbf{R}^n$ сюръективно в каждой точке $x \in M$ (если $x \in Q$, то сюръективны $d\mathscr{H}_\pm$); iii) $\mathscr{H}|_Q$ — собственное сюръективное отображение и $d\mathscr{H}: TQ \to T\mathbf{R}^n$ эпиморфно в каждой точке $x \in Q$.

Если $Q=\varnothing$, то условия i), ii) определяют обычную вполне интегрируемую гамильтонову систему. Из ii) следует, что поверхности уровня

$H_1=c_1, \dots, H_n=c_n$, $c\in U$, суть компактные кусочно-гладкие подмногообразия в M (т. е. образы гладких замкнутых компактных многообразий относительно кусочно-гладких вложений в M). Векторные поля $\operatorname{sgrad} H_a$, коммутирующие между собой вне Q, задают коммутирующие потоки на M, сохраняющие поверхности уровня $\mathscr{H}=c\in U$.

Теорема 2. *В описанной ситуации существуют симплектическое многообразие* $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$, $\tilde{Q}\subset\tilde{M}$ — *гладкая гиперповерхность,* $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_n$ — *набор гладких функций, удовлетворяющий i) и ii) с тем же самым* $U\subset\mathbf{R}^n$, *и кусочный симплектический диффеоморфизм* $\varphi: M\to\tilde{M}$, $\varphi(Q)=\tilde{Q}$, *такие, что* $\tilde{H}_a\circ\varphi=H_a$, $a=1, \dots, n$.

Таким образом, набор кусочно-гладких гамильтоновых систем $\operatorname{sgrad} H_a$ допускает одновременное сглаживание.

2.2. Начало доказательства теоремы 2. Разрежем многообразие M вдоль компонент гиперповерхности Q и построим новое многообразие $\tilde{M}$ склейкой получившихся симплектических многообразий вдоль их краев. При этом $\tilde{M}$ можно рассматривать как множество (и топологическое пространство) M с новой структурой гладкого многообразия. Задача состоит в таком введении этой новой структуры, чтобы все функции H_a стали бы гладкими.

Хорошо известно (см., например, [2—4]), что любой набор функций в инволюции можно локально дополнить до системы симплектических координат (если их дифференциалы линейно независимы). Пусть $x\in Q$, $(q_1^+, \dots, q_n^+, H_1^+, \dots, H_n^+)$ и $(q_1^-, \dots, q_n^-, H_1^-, \dots, H_n^-)$ — системы симплектических координат в малой окрестности $U\ni x$ для половинок $U_\pm$ — замыканий компонент $U\setminus(U\cap Q)$, $H_a^\pm=H_a|_{U_\pm}$, $q_a^\pm(x)=0$. Отметим, что $\partial/\partial q^\pm=\operatorname{sgrad} H_i^\pm$. Координаты $q_a^\pm$ с такими свойствами определены не однозначно, а с точностью до сдвига вида $q_a^\pm\mapsto q_a^\pm+\Phi_a^\pm(H_1^\pm, \dots$ $\dots, H_n^\pm)$, где $\Phi^\pm:\tilde{U}\to\mathbf{R}$, $\tilde{U}=\mathscr{H}(U)$, $\Phi_a=(\partial/\partial y_a)\Phi(y_1, \dots, y_n)$. В координатах $(q^\pm, H^\pm)$ гиперповерхность $Q\cap U$ задается уравнениями $f_\pm(q^\pm, H^\pm)=0$. По построению существует согласованная с наборами $\mathscr{H}^\pm$ склейка симплектических многообразий с краями $U_\pm$, при которой функции $H_a^\pm$ становятся кусочно-гладкими.

Лемма 3. *Существует единственная (с точностью до симплектического диффеоморфизма) склейка многообразий* $U_\pm$, *при которой* $H_a^\pm$ *склеиваются в гладкие функции.*

Отсюда теорема 2 получается сразу: в силу единственности локальная склейка в окрестности каждой точки $x\in Q$ решает задачу — на пересечении любых двух окрестностей возникающие гладкие структуры совпадают.

2.3. Доказательство леммы 2. Тождественное отображение Q определяет диффеоморфизм краев $Q_\pm=\partial U_\pm$, сохраняющий ограничение $\omega|_{Q_\pm}$. Иными словами, существует диффеоморфизм φ некоторой окрестности точки x_+ гиперповерхности $f_+(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)=0$ на некоторую окрестность точки $x_-=\varphi(x_+)$ гиперповерхности $f_-(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)=0$, сохраняющий ограничение формы $\Sigma dp_i\wedge dq_i$ на $Q_\pm$ и согласованный с функциями p_i, т. е. $p_i(z)=p_i(\varphi(z))$. Для $z\in Q_+$ пусть $D\varphi: T_zQ_+\to T_{\bar{z}}Q_-$ — его касательное отображение, $\bar{z}=\varphi(z)$. Поскольку $\varphi^*p_i=p_i$, имеем $D\varphi(v)-v\in\left\langle\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}\right\rangle$ и $D\varphi\left(\left\langle\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}\right\rangle\cap\right.$ $\left.\cap T_zQ_+\right)=\left\langle\frac{\partial}{\partial q}\right\rangle\cap T_{\varphi(z)}Q_-$, где $T_{z,\bar{z}}Q_\pm$ отождествлены с соответствующими гиперповерхностями в $\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{R}_p^n\times\mathbf{R}_q^n$. Отсюда для любых $w\in T_zQ_+$ и $v\in T_zQ_+\cap\left\langle\frac{\partial}{\partial q}\right\rangle$, учитывая, что плоскость $\left\langle\frac{\partial}{\partial q}\right\rangle$ изотропна, получаем $\omega(D\varphi(v), w)=\omega(v, w)$. Но по предположению проекция $dp: T_zQ_+\to$

$\to \mathbf{R}_p^n$ эпиморфна, поэтому $D\varphi(v) = v$ и $T_z Q_+ \cap \left\langle \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle = T_{\varphi(z)} Q_- \cap \cap \left\langle \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle$. Поскольку это верно для любой точки $z \in Q_+$, отображение φ есть сдвиг при фиксированных $p_i : \varphi(q, p) = (q + \Delta(p), p)$, $\Delta : \mathscr{H}(U) \subset \subset \mathbf{R}_p^n \to \mathbf{R}_q^n$ — некоторое отображение, и $D\varphi(w) = w + d\Delta \circ dp(w)$. Снова пользуясь тем, что ограничение формы ω на плоскость $\left\langle \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle$ нулевое, получаем для любых v, $w \in \mathbf{R}_p^n$:

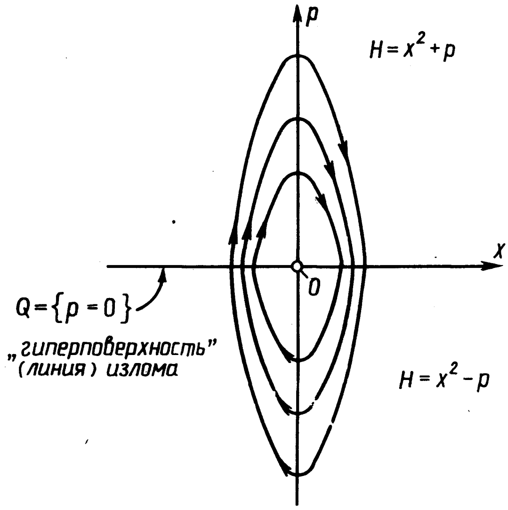
$$\omega(w, d\Delta(v)) + \omega(d\Delta(w), v) = 0.$$

В координатах, полагая $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, $\Delta_{ij} = (\partial/\partial p_j)\Delta_i$, видим, что последнее соотношение эквивалентно симметрии матрицы $\|\Delta_{ij}(p)\|$, т. е. замкнутости формы $\Delta dp = \sum_i \Delta_i dp_i$. Локально эта форма точна, т. е. существует функция $\Phi(p_1, \ldots, p_n)$ такая, что $\Delta_i = (\partial/\partial p_i)\Phi$. Но, как было отмечено выше, симплектические координаты (q, p) при фиксированных (p) определены с точностью до сдвига (q) на градиент гладкой функции от (p). Сдвигая координаты (q) в U_+ на $(\partial/\partial p)\Phi$, получим, что φ в новых координатах — тождественное отображение. Более того, если начать с других систем координат $(q^\pm, p)$ на $U_\pm$, то описанный выше процесс приводит к системам координат $(\tilde{q}^+, p)$, (q^-, p) на $U_\pm$, которые отличаются от построенных выше на градиент одной и той же функции от (p). Таким образом, гладкая склейка $U_\pm$, реализующая $H_a^\pm$ гладкими функциями, существует (она задается построенными выше системами симплектических координат, в которых отображение φ тождественно) и единственна. Лемма 2, а тем самым и теорема 2 полностью доказаны.

2.4. Пример. Следующий ниже пример показывает, что вполне интегрируемые кусочно-гладкие гамильтоновы системы появляются уже в простейших задачах оптимального управления. Пусть $\dot{x} = u$, $x \in \mathbf{R}$, $|u| \leqslant 1$,— управляемая одномерная динамическая система, а задача управления ставится как задача минимизации интегрального функционала

$$J(u(\cdot)) = \int x^2 dt.$$

Стандартная процедура приводит к кусочно-гладкой гамильтоновой системе на плоскости $\mathbf{R}_{x,p}^2$ с симплектической структурой $dp \wedge dx$ и гамильтонианом $H = x^2 + |p|$. Линии уровня $H = c > 0$ суть замкнутые кривые, составленные из двух отрезков парабол (рисунок).



Период обращения по кривой $H = \text{const}$ легко вычисляется: $T(H) = 4\sqrt{H}$. Несложная проверка показывает, что отображение, задаваемое формулами

$$(x, p) \overset{\Phi}{\mapsto} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} (x^2 + |p|)^{3/4} \times$$
$$\times \left(\sin \frac{\pi x}{2\sqrt{x^2 + |p|}}, \frac{p}{|p|} \cos \frac{\pi x}{2\sqrt{x^2 + |p|}} \right),$$

является симплектическим диффеоморфизмом $\mathbf{R}^2 \setminus \{p = 0\}$ на себя, продолжающимся до кусочно-гладкого гомеоморфизма вне начала координат. Это отображение переводит кусочно-гладкую гамильтонову систему $\operatorname{sgrad} H$ в гладкую гамильтонову систему с гамильтонианом $[(3/8)\pi(x^2+p^2)]^{2/3}$. Интегральные траектории последней системы суть окружности $x^2+p^2=\text{const}$. Идея построения глобально сглаживающего отображения Φ состоит в том, чтобы подобрать гладкий гамильтониан с компактными линиями уровня, период обращения вдоль которых совпадал бы с периодом для $H=x^2+|p|$, и затем строить Φ, переводя интегральные траектории исходного гамильтониана в интегральные траектории подобранного.

Приведенный пример является частным случаем общего метода построения сглаживающих отображений для систем с нарушенным условием трансверсальности (в нашем примере оно нарушается в начале координат).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93—01—00470) и Международной лаборатории «Математические методы информатики и управления».

Литература

1. Пухликов А. В. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 1241—1247.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., 1989.
3. Татаринов Я. В. Лекции по классической динамике. М., 1984.
4. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М., 1988.
5. Пухликов А. В. // Сб. трудов ВНИИСИ. М., 1990. Вып. 11. С. 71—84.

Институт системного анализа РАН

Поступила в редакцию 25 ноября 1993 г.