2000. Т. 36, № 2. С. 177 — 186

УДК 517.925.5

КЛАСС РЕШЕНИЙ И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ТРАЕКТОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. Л. Соболевский

0. Введение. В настоящей работе рассматривается класс Ω функций, являющихся решениями алгебраических дифференциальных уравнений, а также исследуются алгебраические дифференциальные уравнения, все решения которых являются решениями алгебраических дифференциальных уравнений низших порядков (такие уравнения мы называем редуцируемыми). Некоторые из этих результатов обобщают соответствующие результаты В. И. Мироненко [1] относительно двумерных динамических систем с алгебраическими траекториями. При доказательстве этих предложений используется метод вронскиана, предложенный в работе [1]. Основным результатом работы является теорема о том, что всякое редуцируемое уравнение имеет алгебраический интеграл. Полученные результаты применяются к исследованию динамических систем с алгебраическими и замкнутыми траекториями.

1. Ростки решений алгебраических дифференциальных уравнений. Условимся относительно терминологии. Пусть $\mathcal{G}$ — пучок ростков голоморфных функций над $\mathbb{C}$ [2, с. 447]. Введем на $\mathcal{G}$ отношение α такое, что $\varphi\alpha\phi$ тогда и только тогда, когда росток ϕ может быть получен посредством аналитического продолжения ростка φ. Отношение α является, очевидно, отношением эквивалентности. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{G}/\alpha$ — множество классов эквивалентности ростков относительно α. Классы эквивалентности из $\mathcal{A}$ будем называть полными аналитическими функциями. Это определение вполне согласуется с классическим понятием полной аналитической функции и является лишь его точной формулировкой.

Уравнения вида

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где P — полином по $z, w, w', \ldots, w^{(n)}$ будем называть алгебраическими дифференциальными уравнениями порядка $n \geq 0$ (при $n = 0$ уравнение (1) является просто алгебраическим уравнением). Если полином P неприводим, т.е. не может быть представлен в виде произведения двух непостоянных полиномов, то уравнение (1) будем называть алгебраически неприводимым (например, уравнение $w'^2 - w = 0$ алгебраически неприводимо, а уравнения $w'^2 - w^2 = 0$ и $zw' - z = 0$ таковыми не являются). Пусть Ψ — множество одночленов вида $z^{s_0}w^{s_1}w'^{s_2}\ldots(w^{(k)})^{s_{k+1}}$ (фактически Ψ можно отождествить с множеством финитных последовательностей целых неотрицательных чисел $s_0, s_1, s_2, \ldots$). Многочлен P единственным образом представляется в виде суммы одночленов из Ψ с ненулевыми коэффициентами. Множество Λ этих одночленов назовем типом уравнения (1). Для всякого конечного множества $\Lambda \subset \Psi$ обозначим через $\operatorname{ord}(\Lambda)$ максимальный порядок производных w, входящих в одночлены из Λ, а через $d(\Lambda)$ — максимальную степень (сумму степеней переменных) одночленов из Λ.

Будем говорить, что росток $\varphi \in \mathcal{G}$ удовлетворяет уравнению (1), если $P(z, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n)}) = 0$ (здесь и далее подобная запись означает, что росток в левой части равенства является нулевым, т.е. ростком тождественно равной нулю функции). Обозначим через Ω класс ростков $\varphi \in \mathcal{G}$, для которых существует уравнение (1) такое, что φ удовлетворяет (1). Порядок всякого уравнения (1), которому удовлетворяет данный росток φ, назовем надпорядком φ.

Множество ростков из Ω надпорядка n обозначим через Ω_n. Тип всякого уравнения (1), которому удовлетворяет φ, будем называть надтипом φ. Минимальный надпорядок φ (т.е. число $n \in \mathbb{Z}^+$ такое, что φ удовлетворяет некоторому алгебраическому дифференциальному уравнению порядка n, но не удовлетворяет уравнениям порядка меньше n) будем называть порядком φ и обозначать $\operatorname{ord}(\varphi)$. Таким образом, φ удовлетворяет некоторому алгебраическому дифференциальному уравнению порядка $\operatorname{ord}(\varphi)$ и не удовлетворяет уравнениям низших порядков. Уравнение (1) порядка $\operatorname{ord}(\varphi)$, которому удовлетворяет φ, можно, очевидно, считать алгебраически неприводимым. Последнее уравнение определяется с точностью до постоянного множителя, так как если бы φ удовлетворяло двум существенно различным алгебраически неприводимым уравнениям вида (1), то, исключив из их системы $w^{(\operatorname{ord}(\varphi))}$, мы получили бы для φ алгебраическое дифференциальное уравнение порядка ниже порядка φ, что противоречит определению последнего. Тип алгебраически неприводимого уравнения вида (1) порядка $\operatorname{ord}(\varphi)$, которому удовлетворяет φ, будем называть типом φ и обозначать $\operatorname{type}(\varphi)$.

Несложно показать, что если росток удовлетворяет уравнению (1), то и любой эквивалентный (относительно α) ему росток удовлетворяет этому уравнению, т.е. можем говорить, что весь класс эквивалентности (полная аналитическая функция) данного ростка удовлетворяет уравнению (1). Естественно, понятия порядка, типа и надтипа, введенные для ростков, определяются таким образом и для полных аналитических функций. То, что полная аналитическая функция v является решением алгебраического дифференциального уравнения (порядка не выше n) может быть записано в виде $v \subset \Omega$ (Ω_n). В этом случае будем говорить, что v является функцией класса Ω (Ω_n). В частности, класс функций Ω_0 совпадает с классом алгебраических функций.

Критерий того, что росток φ имеет конечный надтип Λ, дает

Теорема 1. *Для того чтобы росток φ принадлежал Ω и конечное подмножество $\Lambda \subset \Psi$ являлось его надтипом, необходимо и достаточно, чтобы $W_\Lambda(\varphi)(z) = W(\{z^{s_0}\varphi^{s_1}\varphi'^{s_2}\dots\varphi^{(k)^{s_{k+1}}} : z^{s_0}w^{s_1}w'^{s_2}\dots(w^{(k)})^{s_{k+1}} \in \Lambda\} = 0$, где*

$$W(\{v_1, v_2, \dots, v_r\}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_r \\ v_1' & v_2' & \dots & v_r' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^{(r-1)} & v_2^{(r-1)} & \dots & v_r^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

(этот определитель будем называть вронскианом конечной системы ростков).

Доказательство. Действительно, то, что Λ является надтипом для φ, означает, что φ удовлетворяет уравнению вида (1) типа Λ, т.е. система ростков $\{z^{s_0}\varphi^{s_1}\varphi'^{s_2}\dots\varphi^{(k)^{s_{k+1}}} : (s_0, s_1, s_2, \dots) \in \Lambda\}$ линейно зависима. Необходимым и достаточным условием этой зависимости является равенство нулю вронскиана данной системы [3]. Теорема 1 доказана.

2. Голоморфные отображения в $\mathcal{G}$. Будем называть множество M комплексно-аналитического многообразия X тонким, если для всякой точки $x \in M$ существует ее окрестность U_x и голоморфная в ней функция f, обращающаяся в нуль на $M \cap U_x$ (такой подход изложен в [2, с. 358]; в [4, с. 82, 234] в определении тонкого множества присутствует требование замкнутости последнего). Будем называть множество M почти тонким, если для всякого $x \in M$ существует окрестность U_x, в которой M может быть покрыто счетной совокупностью тонких множеств. Легко видеть, что объединение конечной системы тонких множеств тонко, а объединение счетной системы почти тонких множеств почти тонко. Тонкие множества, очевидно, нигде не плотны, следовательно, почти тонкие множества являются множествами первой категории Бэра [5, с. 163]. Условимся говорить, что некоторое утверждение выполняется почти для всех точек X, если множество точек, для которых оно не выполняется, является почти тонким.

Множества, не являющиеся тонкими, будем называть широкими, а множества, не являющиеся почти тонкими, — вполне широкими. Заметим, что множество с непустой внутренностью является вполне широким. Смысл понятия широкого множества заключается в том, что две голоморфные функции, совпадающие на широком множестве, совпадают тождественно. Как следует из леммы о единственности голоморфной функции, доказанной в [1, с. 33], декартово произведение нескольких подмножеств $\mathbb{C}$, каждое из которых имеет предельную точку, является широким. Очевидно, справедливо и естественное обобщение этого факта: пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — комплексно-аналитические многообразия, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — их широкие подмножества соответственно; тогда $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ — широкое подмножество многообразия $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Пусть имеем комплексно-аналитическое многообразие X. Отображение $\phi : X \to \mathcal{G}$ будем называть голоморфным, если для всякого $x_0 \in X$ найдется окрестность U, область $V \subset \mathbb{C}$ и голоморфная в $U \times V$ функция w такая, что для всякого $x_1 \in U$ росток $\phi(x_1)$ является ростком $w(x_1, z)$ как функции z в некоторой точке области V.

Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть имеем связное комплексно-аналитическое многообразие X и голоморфное отображение $\phi : X \to \mathcal{G}$. Тогда если множество M точек $x \in X$ таких, что $\phi(x) = 0$ (нулевой росток), является широким, то $M = X$.*

Доказательство. Пусть Z — множество точек $x_0 \in X$ таких, что для всякой окрестности U точки x_0 множество $M \cap U$ является широким. Множество Z, очевидно, непустое и замкнутое. В силу голоморфности ϕ для всякой точки $x_0 \in Z$ найдется окрестность U, область $V \subset \mathbb{C}$ и голоморфная в $U \times V$ функция w такая, что для всякого $x_1 \in U$ росток $\phi(x_1)$ является ростком $w(x_1, z)$ как функции z в некоторой точке области V. Тогда для всякого $x_1 \in M \cap U$ имеем $w(x_1, z) \equiv 0$. По построению Z M является широким в U, следовательно, $w(x, z) \equiv 0$, и поэтому для всякого $x \in U$ $\phi(x) = 0$, т.е. $U \subset M$, а значит, $U \subset Z$. Таким образом, Z — открытое подмножество M, а так как Z замкнуто и непусто, то в силу связности X имеем $X = Z \subset M$, откуда $M = X$. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть X связно и $\phi : X \to \mathcal{G}$ голоморфно. Тогда если множество M точек $x \in X$ таких, что росток $\phi(x)$ удовлетворяет заданному алгебраическому дифференциальному уравнению (1), является широким, то $M = X$.*

Для доказательства достаточно применить лемму 1 к очевидно голоморфному отображению $P \circ \phi$.

Теорема 2. *Пусть имеем связное комплексно-аналитическое многообразие X, голоморфное отображение $\phi : X \to \mathcal{G}$ и вполне широкое подмножество $Y \subset X$. Тогда если $\phi(Y) \subset \Omega$, то и $\phi(X) \subset \Omega$ и найдется конечное подмножество $\Lambda_0 \subset \Psi$ такое, что для всех $x \in X$ росток $\phi(x)$ имеет надтип Λ_0, причем почти для всех $x \in X$ росток $\phi(x)$ имеет тип Λ_0.*

Для доказательства нам потребуется

Лемма 2. *Пусть имеем связное комплексно-аналитическое многообразие X, голоморфное отображение $\phi :\ X \to \mathcal{G}$, широкое подмножество $M \subset X$ и конечное подмножество $\Lambda \subset \Psi$. Тогда если при всяком $x \in M$ росток $\phi(x)$ имеет надтип Λ, то росток $\phi(x)$ имеет надтип Λ при всех $x \in X$.*

Доказательство. Легко видеть, что $W_\Lambda \circ \phi$ голоморфно. Но тогда при всяком $x \in M$ по условию и в силу теоремы 1 имеем $W_\Lambda(\phi(x)) = 0$, откуда в силу леммы 1 $W_\Lambda(\phi(x)) = 0$ при всех $x \in X$, т.е. вследствие теоремы 1 при всех $x \in X$ росток $\phi(x)$ имеет надтип Λ. Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть Ξ — множество всех конечных подмножеств Ψ. Для всякого $\Lambda \in \Xi$ обозначим через M_Λ множество всех $x \in X$, при которых $\phi(x)$ принадлежит Ω и имеет тип Λ. Пусть M — множество всех x, таких, что $\phi(x) \in \Omega$. По условию $Y \subset M$, откуда M — вполне широкое множество. Тогда имеем $M = \bigcup_{\Lambda \in \Xi} M_\Lambda$. Следовательно, найдется $\Lambda_0 \in \Xi$ такое, что M_{Λ_0} широкое (в противном случае M было бы почти тонко как объединение счетной совокупности тонких множеств). Тогда на основании леммы 2 при всех $x \in X$ росток $\phi(x)$ принадлежит Ω и имеет надтип Λ_0.

Нам осталось показать, что множество Z таких $x \in X$, что Λ_0 не является типом $\phi(x)$, почти тонко. Пусть $\Xi_0 \subset \Xi$ множество типов Λ таких, что либо $p(\Lambda) < p(\Lambda_0)$, либо $p(\Lambda) =$

$= p(\Lambda_0)$ и $d(\Lambda) < d(\Lambda_0)$. Тогда, очевидно, $Z = \bigcup\limits_{\Lambda\in\Xi_0} M_\Lambda$. Если бы Z было вполне широким, то нашлось бы $\Lambda_1 \in \Xi_0$ такое, что M_{Λ_1} было бы широким, откуда в силу леммы 2 при всех $x \in X$ и, в частности при всех $x \in M_{\Lambda_0}$, росток $\phi(x)$ имел бы надтип Λ_1, что невозможно, так как росток типа Λ_0, очевидно, не может иметь надтип Λ_1. Теорема 2 доказана.

3. Класс решений алгебраических дифференциальных уравнений. Будем придерживаться оговоренного ранее двойственного понимания Ω как класса решений алгебраических дифференциальных уравнений и как класса их ростков. Установим некоторые свойства этого класса.

Теорема 3. *Всякая аналитическая функция $w \subset \Omega$ является решением некоторого автономного дифференциального уравнения*

$$w^{(n)} = R(w, w', \ldots, w^{(n-1)}), \tag{2}$$

где R — рациональная функция по всем переменным.

Доказательство. Поскольку $w \subset \Omega$, то w удовлетворяет некоторому алгебраически неприводимому алгебраическому дифференциальному уравнению $Q(z, w, w', \ldots, w^{(m)}) = 0$. Выразив из этого уравнения z через w и ее производные, будем иметь $z = S(w, w', \ldots, w^{(m)})$, где S — алгебраическая функция по всем аргументам. Дифференцируя по z последнее соотношение, имеем $1 = \sum\limits_{i=0}^{m} \dfrac{\partial S}{\partial w^{(i)}} w^{(i+1)}$, откуда получаем автономное дифференциальное уравнение для w вида

$$T(w, w', \ldots, w^{(m+1)}) = 0, \tag{3}$$

где T — полином по всем переменным. Можем считать, что (3) алгебраически неприводимо и имеет минимальный порядок среди всех автономных алгебраических дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет w, т.е. что w не удовлетворяет уравнению $\partial T/\partial w^{(m+1)} = 0$. Дифференцируя (3) по z, будем иметь $w^{(m+2)} = -[(\partial T/\partial w)w' + +(\partial T/\partial w')w^{(2)} + \ldots + (\partial T/\partial w^{(m)})w^{(m+1)}]/(\partial T/\partial w^{(m+1)})$, т.е. искомое уравнение вида (2) для w. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть имеем полные аналитические функции $w, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ такие, что $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m \subset \Omega$ и*

$$P(w, w', \ldots, w^{(n)}, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m) \equiv 0, \tag{4}$$

где P — полином по всем переменным. Тогда $w \subset \Omega$.

Доказательство. Поскольку ϕ_i — функции класса Ω, то они, согласно теореме 3, удовлетворяют некоторым автономным дифференциальным уравнениям

$$v^{(s_i)} = R_i(v, v', \ldots, v^{(s_i-1)}), \tag{5}$$

где R_i — рациональные функции всех переменных. Положим $s = \sum\limits_{i=1}^{m} s_i$.

Продифференцировав (4) s раз с учетом (5), получим $s+1$ (вместе с (4)) алгебраических дифференциальных уравнений, в которых помимо функции w и ее производных входят еще s дополнительных переменных: ϕ_i вместе с их производными до порядка $s_i - 1$ соответственно. Исключив эти переменные, найдем автономное алгебраическое дифференциальное уравнение для w, откуда $w \subset \Omega$. Теорема 4 доказана.

Следствие 2. *Если $u, v \in \Omega$, то $u+v, u-v, uv \in \Omega$, и если, дополнительно, v обратим, то $u/v \in \Omega$ (например, $u + v \in \Omega$, так как в силу теоремы 3 из $w - u - v = 0$ следует $w \in \Omega$).*

По теореме Гёльдера [6, с. 433] функция $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$ не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению. Таким образом, существуют аналитические функции, не принадлежащие классу Ω. Ниже будет дана теоретико-множественная характеристика класса Ω как множества банахова пространства G функций, голоморфных в единичном круге $U = \{z : |z| < 1\}$ и непрерывно продолжаемых на его границу с нормой $\|f\| = \sup\limits_{z\in U} |f(z)|$

(при этом относительно борелевских множеств будем придерживаться классических обозначений [7, 8]).

Теорема 5. *Множество Ω является F_σ-множеством первой категории Бэра в G.*

Доказательство. Для каждого конечного подмножества $\Lambda \subset \Psi$ обозначим через M_Λ множество всех функций из Ω надтипа Λ. Тогда $\Omega = \bigcup_\Lambda M_\Lambda$. Из теоремы 1 все функции надпорядка Λ являются решениями алгебраического дифференциального уравнения $W_\Lambda(w) = 0$, следовательно, M_Λ является замкнутым нигде не плотным в G множеством. Таким образом, Ω может быть представлено в виде счетного объединения замкнутых нигде не плотных множеств, что доказывает теорему 5.

4. Алгебраическая интегрируемость алгебраических дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение (1). Пусть E_{n+2} — комплексное евклидово пространство переменных $z, w, w', \ldots, w^{(n)}$, $Y \subset E_{n+2}$ — множество решений уравнения $P = 0$, Z — множество решений уравнения $\partial P/\partial w^{(n)} = 0$. Тогда $X = Y \setminus Z$ — комплексно-аналитическое многообразие в E_{n+2}. Если (1) алгебраически неприводимо, то X связно.

Многообразие X является множеством регулярных начальных данных для уравнения (1). Поставим в соответствие каждой точке $x_0 = (z_0, w_0, w_0', \ldots, w_0^{(n)}) \in X$ росток $\phi(x_0)$ в точке z_0 функции $w(z)$, удовлетворяющей уравнению (1) и такой, что $w^{(i)}(z_0) = w_0^{(i)}$ при $i = 0, 1, \ldots, n$. В силу голоморфной зависимости решений уравнения (1) от начальных данных отображение $\phi : X \to \mathcal{G}$ голоморфно, будем называть его общим решением уравнения (1).

Будем говорить, что полная аналитическая функция w является частным решением уравнения (1), если найдется $x_0 \in X$ такое, что $\phi(x_0) \in w$. Аналитическую функцию, удовлетворяющую уравнению (1), но не являющуюся его частным решением, будем называть особым решением уравнения (1). Всякое особое решение уравнения (1) является также решением уравнения $\partial P/\partial w^{(n)} = 0$, поэтому, исключая $w^{(n)}$ из системы этого уравнения и уравнения (1), получаем для всех особых решений уравнения (1) некоторое алгебраическое дифференциальное уравнение порядка $n-1$, т.е. все особые решения уравнения (1) являются функциями класса Ω_{n-1}.

Будем говорить, что уравнение (1) редуцируемо до порядка m, где $0 \le m < n$, если $\phi(X) \subset \Omega_m$, т.е. всякое его частное решение является решением некоторого алгебраического дифференциального уравнения порядка m. Говоря, что уравнение (1) редуцируемо, будем иметь в виду, что оно редуцируемо по крайней мере до порядка $n-1$.

Применение теоремы 2 к ϕ с учетом связности X для алгебраически неприводимого уравнения (1) позволяет заключить, что имеет место

Теорема 6. *Пусть дано алгебраически неприводимое уравнение (1). Если для некоторого вполне широкого в X множества $M \subset X$ имеем $\phi(M) \subset \Omega_m$, где $m < n$, то уравнение (1) редуцируемо до порядка m. При этом найдется такое Λ_0, что все частные решения уравнения (1) имеют надтип Λ_0, причем почти все они имеют тип Λ_0.*

Замечание 1. Теорема 6 обобщает теорему 2 из [1, с. 35] относительно алгебраических траекторий двумерных динамических систем.

Из теоремы 6 с учетом теоремы 1 вытекает

Теорема 7. *Для редуцируемости уравнения (1) до порядка m необходимо и достаточно существования Λ_0 такого, что $p(\Lambda_0) \le m$ и вронскиан W_{Λ_0}, вычисленный в силу уравнения (1), тождественно равен нулю.*

Также имеет место

Теорема 8. *Пусть даны два уравнения вида (1)*

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(n)}) = 0, \tag{6}$$

$$Q(z, w, w', \ldots, w^{(m)}) = 0, \tag{7}$$

где $m < n$, причем уравнение (7) алгебраически неприводимо. Тогда если функция $\varphi(z)$ является решением обоих уравнений (6) и (7), то либо $\varphi \subset \Omega_{m-1}$, либо все частные решения уравнения (7) являются решениями уравнения (6).

Доказательство. Если φ является особым решением уравнения (7), то, как отмечалось выше, оно принадлежит классу Ω_{m-1}. Пусть теперь φ — частное решение уравнения (7). Разрешив это уравнение относительно $w^{(m)}$ и продифференцировав $n-m$ раз полученное уравнение, выразим производные $w^{(m)}, w^{(m+1)}, \ldots, w^{(n)}$ произвольного частного решения уравнения (6) алгебраически через $z, w, w', \ldots, w^{(m-1)}$. Подставив эти выражения в (6), найдем некоторое уравнение

$$S(z, w, w', \ldots, w^{(m-1)}) = 0. \tag{8}$$

Если $S \equiv 0$, то всякое частное решение уравнения (7) является решением уравнения (6). Если же $S \not\equiv 0$, то (8) является алгебраическим дифференциальным уравнением для φ порядка ниже m. Теорема 8 доказана.

Будем говорить, что уравнение (1) алгебраически интегрируемо до порядка m, где $0 \leq m < n$, если существует уравнение

$$Q(z, w, w', \ldots, w^{(m)}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}) = 0, \tag{9}$$

где Q — полином по всем переменным, такое, что для всяких $C_1, C_2, \ldots, C_{n-m} \in \mathbb{C}$ все частные решения уравнения (9) являются решениями уравнения (1), и обратно, всякое частное решение уравнения (1) является решением уравнения (9) при некоторых $C_1, C_2, \ldots, C_{n-m} \in \mathbb{C}$. Уравнение (а точнее, семейство уравнений) (9) будем называть $(n-m)$-м интегралом уравнения (1). В дальнейшем, говоря об интегрируемости алгебраического дифференциального уравнения будем иметь в виду его алгебраическую интегрируемость по крайней мере до порядка $n-1$. Особое решение уравнения (1) может не быть решением уравнения (9): например, уравнение $(w')^2 = w$ алгебраически интегрируемо до порядка 0 ($w = (z+C)^2/4$ — его первый интеграл), однако его особое решение $w = 0$ не удовлетворяет последнему соотношению ни при каких C (собственно, в этом и заключается классическое определение особого решения). Особое решение уравнения (9) также может не быть решением уравнения (1): например, уравнение $w'' = 1$ имеет первый интеграл $(w')^2 = 2w + C$, однако особые решения $w = -C/2$ последнего не являются решениями исходного уравнения.

Вернемся к алгебраической интегрируемости уравнений (1). Очевидно, что если уравнение интегрируемо, то оно и редуцируемо. Однако алгебраическая интегрируемость является, вообще говоря, более сильным требованием: для интегрируемости необходимо, чтобы все решения уравнения (1) были решениями одного параметрического семейства уравнений низшего порядка, а не просто различных уравнений низшего порядка, как в случае редуцируемости. Тем не менее оказывается, что редуцируемость эквивалентна алгебраической интегрируемости. А именно имеет место

Теорема 9. *Если уравнение (1) редуцируемо до порядка m, где $0 \leq m < n$, то оно и алгебраически интегрируемо до порядка m.*

Доказательство. Без ограничения общности можем считать уравнение (1) алгебраически неприводимым, так как алгебраически приводимое уравнение распадается на конечное число алгебраически неприводимых уравнений; перемножая записанные в виде (9) их интегралы, получим искомый интеграл уравнения (1). Также можем считать, что уравнение (1) не редуцируемо до порядка $m-1$; в противном случае обозначим через m минимальный порядок, до которого редуцируемо уравнение (1). Пусть X — многообразие регулярных начальных данных для уравнения (1), $\phi : X \to \mathcal{G}$ — общее решение уравнения (1).

Тогда в силу теоремы 6 имеем Λ_0 такое, что всякое частное решение уравнения (1) имеет надтип Λ_0 и почти все его частные решения имеют тип Λ_0, т.е. множество Y начальных данных $x \in X$, для которых $\operatorname{type}(\phi(x)) = \Lambda_0$, таково, что $Z = X \setminus Y$ почти тонко. Очевидно, $\operatorname{ord}(\Lambda_0) = m$. Таким образом, всякое частное решение уравнения (1) удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению типа Λ_0. Обозначив неизвестные значения коэффициентов последнего через $C_1, C_2, \ldots, C_s$, запишем его в виде

$$T(z, w, w', \ldots, w^{(m)}, C_1, C_2, \ldots, C_s) = 0, \tag{10}$$

где T — полином по всем переменным. Всякое частное решение $\phi(x)$ уравнения (1) удовлетворяет уравнению (10) при некоторых $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x), \ldots$, $C_s = C_s(x)$. При этом для всех $x \in Y$ уравнение (10) при $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x), \ldots$, $C_s = C_s(x)$ алгебраически неприводимо и $\phi(x)$ является частным решением уравнения (10) (в противном случае $\phi(x)$ имело бы тип, отличный от Λ_0).

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 8, выразив из уравнения (10) и его дифференциальных следствий $w^{(m)}, w^{(m+1)}, \ldots, w^{(n)}$ через $z, w, w', \ldots, w^{(m)}, C_1, C_2, \ldots, C_s$ и подставив полученные выражения в уравнение (1), будем иметь

$$S(z, w, w', \ldots, w^{(m-1)}, C_1, C_2, \ldots, C_s) = 0, \tag{11}$$

где S — алгебраическая функция по всем аргументам. Для всякого $x \in Y$ $\phi(x)$ удовлетворяет (11) при $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x), \ldots$, $C_s = C_s(x)$. Однако росток $\phi(x)$ имеет порядок m, а значит, не может удовлетворять алгебраическому дифференциальному уравнению порядка меньше m. Следовательно, для всякого $x \in Y$ имеем

$$S(z, w, w', \ldots, w^{(m-1)}, C_1(x), C_2(x), \ldots, C_s(x)) \equiv 0. \tag{12}$$

Если $S \not\equiv 0$, то уравнение (12) эквивалентно некоторой системе алгебраических уравнений относительно $C_1, C_2, \ldots, C_s$; пусть $\Sigma \subset \mathbb{C}^s$ — алгебраическое многообразие решений последней (в случае $S \equiv 0$ имеем $\Sigma = \mathbb{C}^s$).

Легко видеть, что найдется область $U \subset \Sigma$, гомеоморфная некоторой области $V \subset \mathbb{C}^r$ ($r \leq s$), и вполне широкое подмножество $M \subset X$ такие, что для всякого $x \in M$ $(C_1(x), C_2(x), \ldots, C_s(x)) \in U$ (действительно, в противном случае из очевидной сепарабельности Σ и включения $(C_1(Y)$, $C_2(Y), \ldots, C_s(Y)) \subset \Sigma$ следовала бы почти тонкость Y). Пусть $C_i = C_i(D_1, D_2, \ldots, D_r)$, $(D_1, D_2, \ldots, D_r) \in V$ — алгебраическая параметризация U. Подставив ее в уравнение (10), будем иметь

$$H(z, w, w', \ldots, w^{(m)}, D_1, D_2, \ldots, D_r) = 0, \tag{13}$$

где H — полином по всем переменным. Поскольку для всех $D_1, D_2, \ldots, D_r \in V$ имеем $S \equiv 0$ при $C_i = C_i(D_1, D_2, \ldots, D_r)$, то, очевидно, $S \equiv 0$ при $C_i = C_i(D_1, D_2, \ldots, D_r)$ для всех $D_1, D_2, \ldots, D_r \in \mathbb{C}$. Следовательно, при всех $D_1, D_2, \ldots, D_r \in \mathbb{C}$ все частные решения уравнения (13) удовлетворяют уравнению (1). Кроме того, для всех $x \in M$ $\phi(x)$ является решением уравнения (13), откуда, применяя следствие 1 к ϕ, установим, что все частные решения уравнения (1) являются решениями уравнения (13). Отсюда, очевидно, $r = n - m$. Таким образом, (13) является искомым $(n-m)$-м интегралом уравнения (1). Теорема 9 доказана.

5. Замкнутые и алгебраические траектории двумерных динамических систем. Пусть имеем динамическую систему

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \tag{14}$$

где P, Q — полиномы по x, y. Если коэффициенты системы (14) действительны, то будем называть ее действительной. Если действительность системы (14) специально не оговорена, то будем предполагать ее коэффициенты комплексными. Вести речь о замкнутых траекториях системы (14) будем лишь в случае действительности системы (под замкнутой траекторией понимаем траекторию системы (14), являющуюся замкнутой гладкой кривой и не проходящую через особые точки системы). Условимся для краткости обозначать траекторию системы (14) $\{x(t), y(t):\ t \in \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ просто $\{x(t), y(t)\}$.

Если P не зависит от y, то будем говорить, что система (14) вырождена по x (аналогично определяется вырожденность по y). Имеет место

Теорема 10. *Если действительная система (14) вырождена по x, то она не имеет замкнутых траекторий.*

Доказательство. Как известно, если траектория $\{x(t), y(t)\}$ динамической системы (14) замкнута, то $x(t)$, $y(t)$ — периодические функции с общим периодом. Однако непостоянные решения автономного дифференциального уравнения $\dot{x} = P(x)$ с гладкой правой частью строго монотонны [9, с. 20], а значит, не могут быть периодическими. Теорема 10 доказана.

В дальнейшем, не оговаривая это специально, рассматриваем только невырожденные по x системы (14).

Исключив y из уравнения $\dot{x} = P(x,y)$ и его дифференциального следствия в силу системы $\ddot{x} = (\partial P(x,y)/\partial x)P(x,y) + (\partial P(x,y)/\partial y)Q(x,y)$, получим автономное алгебраическое дифференциальное уравнение второго порядка для x

$$T(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0. \tag{15}$$

Если уравнение (15) алгебраически интегрируемо, то будем говорить, что система (14) интегрируема по x. Если уравнение (15) имеет автономный первый интеграл, то будем говорить, что система (14) автономно интегрируема по x. Интегрируемую, однако не автономно интегрируемую по x систему (14) будем называть неавтономно интегрируемой по x. Аналогично определяется интегрируемость системы (14) по y. В настоящем пункте установим связь между принадлежностью решений уравнения (15) к классу Ω_1 и свойствами траекторий системы (14).

Имеется достаточно очевидная связь между интегрируемостью системы (14) по x и существованием алгебраического первого интеграла. А именно справедлива

Теорема 11. *Система (14) интегрируема по x тогда и только тогда, когда она имеет алгебраический первый интеграл. Система (14) автономно интегрируема тогда и только тогда, когда она имеет стационарный алгебраический первый интеграл.*

Доказательство. Действительно, если $S(\dot{x}, x, t, C) = 0$ — первый интеграл уравнения (15), то с учетом (14) найдем интеграл системы (14) в виде $S(P(x,y), x, t, C) = 0$, причем если S не зависит от t, то этот интеграл стационарен. Обратно, если $U(x,y,t,C) = 0$ — алгебраический первый интеграл системы (14), то, алгебраически выразив из первого уравнения системы (14) y через x и $\dot{x}$: $y = F(\dot{x}, x)$, найдем первый интеграл уравнения (15) в виде $U(x, F(\dot{x}, x), t, C) = 0$; если U не зависит от t, то последнее уравнение автономно. Теорема 11 доказана.

Автономно интегрируемые по x системы (14) обладают следующим характеристическим свойством.

Теорема 12. *Система (14) автономно интегрируема по x тогда и только тогда, когда все ее траектории алгебраические.*

Доказательство. Если система (14) автономно интегрируема по x, то она в силу теоремы 11 имеет алгебраический стационарный первый интеграл $U(x,y,C) = 0$, откуда все ее траектории алгебраические. Обратно, если все траектории системы (14) алгебраические, то уравнение $Q(x,y)dy/dx + P(x,y) = 0$ редуцируемо, а значит, на основании теоремы 9 алгебраически интегрируемо, т.е. система (14) имеет алгебраический стационарный первый интеграл $U(x,y,C) = 0$, поэтому в силу теоремы 11 система (14) автономно интегрируема по x. Теорема 12 доказана.

Следствие 3. *Если действительная автономно интегрируемая по x система (14) имеет хотя бы одну замкнутую траекторию, то все ее траектории замкнуты, т. е. она имеет особенность типа алгебраический (все траектории алгебраические) центр. В частности, автономно интегрируемая по x система (14) не имеет предельных циклов.*

Следствие 3 очевидно вытекает из теоремы 12 с учетом того, что алгебраическая траектория не может быть спиралеобразной.

Нам потребуется следующая, достаточно очевидная

Лемма 3. *Траектория $\{x(t), y(t)\}$ алгебраическая тогда и только тогда, когда $x(t)$ удовлетворяет некоторому автономному алгебраическому уравнению первого порядка $H(\dot{x}, x) = 0$.*

Доказательство. Если x удовлетворяет уравнению $H(\dot{x}, x) = 0$, то в силу системы (14) $H(P(x,y), x) = 0$, т.е. данная траектория алгебраическая. Обратно, если траектория алгебраическая, то $y = F(x)$, где F — алгебраическая функция, откуда в силу системы (14) $\dot{x} = P(x, F(x))$. Лемма 3 доказана.

Нам потребуется также

Теорема 13. *Если периодическая функция удовлетворяет неавтономному алгебраически неприводимому алгебраическому дифференциальному уравнению n-го порядка, то она* *удовлетворяет некоторому автономному алгебраическому дифференциальному уравнению порядка ниже* n.

Доказательство. Пусть периодическая с периодом T функция $w(z)$ удовлетворяет некоторому уравнению $H(z,w,w',\ldots,w^{(n)})=0$, где H — полином по всем переменным. Пусть $H(z,w,w',\ldots,w^{(n)})=H_0(w,w',\ldots,w^{(n)})+H_1(w,w',\ldots,w^{(n)})z+\ldots+H_r(w,w',\ldots,w^{(n)})z^r$, где H_r не тождественно равен нулю. Тогда для всякого $z_0\in\mathbb{C}$ и $k\in\mathbb{Z}$ имеем $0=H(z_0+$ $+kT,w(z_0+kT),w'(z_0+kT),\ldots,w^{(n)}(z_0+kT))=H(z_0+kT,w(z_0),w'(z_0),\ldots,w^{(n)}(z_0))$. Следовательно, при всех $z\in\mathbb{C}$ $H_j(w(z),w'(z),\ldots,w^{(n)}(z))=0$, $j=0,1,\ldots,r$, так как полином по z с бесконечным числом корней тождественно равен нулю. Исключая $w^{(n)}$ из системы уравнений $H=0$ и $H_r=0$ (что возможно в силу автономности второго и неавтономности и алгебраической неприводимости первого), будем иметь для w алгебраическое дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка. Последнее можно считать алгебраически неприводимым. Если оно неавтономно, то аналогично получим для w алгебраическое дифференциальное уравнение $(n-2)$-го порядка и т.д. до тех пор, пока не получим автономное уравнение. Теорема 13 доказана.

Имеет место следующий критерий алгебраичности замкнутой траектории действительной системы (14).

Теорема 14. *Пусть* $\{x(t),y(t)\}$ *— замкнутая траектория действительной системы (14) (как и ранее, невырожденной по* x *). Эта траектория является алгебраической тогда и только тогда, когда* $x(t)$ *является функцией класса* Ω_1.

Доказательство. Если траектория алгебраическая, то на основании леммы 3 $x(t)$ является функцией класса Ω_1, и поэтому она удовлетворяет некоторому автономному алгебраическому дифференциальному уравнению первого порядка (в противном случае на основании теоремы 13 она удовлетворяет алгебраическому уравнению с постоянными коэффициентами, т.е. является константой, что невозможно), а значит, на основании леммы 3 траектория $\{x(t),y(t)\}$ алгебраическая. Теорема 14 доказана.

Следствие 4. *Автономно интегрируемая по* x *действительная система (14) не может иметь особой точки типа фокус. Неавтономно интегрируемая по* x *действительная система (14) не может иметь особой точки типа центр. Неинтегрируемая по* x *действительная система (14) не может иметь особой точки типа алгебраический центр.*

Доказательство. На основании теоремы 12 все траектории автономно интегрируемой по x системы (14) алгебраические, а значит, не могут быть спиралеобразными, т.е. данная система не может иметь особой точки типа фокус. Если система (14) неавтономно интегрируема по x, то все решения уравнения (15) принадлежат классу Ω_1, откуда в силу теоремы 14 все замкнутые траектории системы (14) алгебраические; если при этом система (14) имеет особую точку типа центр, т.е. все ее траектории замкнуты, то все траектории этой системы алгебраические, следовательно, в силу теоремы 12 система (14) автономно интегрируема по x, что противоречит условию. Если система (14) неинтегрируема по x, то она не может иметь особой точки типа алгебраический центр, так как в последнем случае все ее траектории должны быть алгебраическими, что в силу теоремы 12 невозможно.

Нам потребуется

Теорема 15. *Если автономное алгебраическое дифференциальное уравнение* n*-го порядка*

$$P(w,w',\ldots,w^{(n)})=0, \tag{16}$$

имеет решение $\varphi(z)$ *класса* Ω_{n-1}, *не принадлежащее классу решений автономных алгебраических дифференциальных уравнений* $(n-1)$*-го порядка, то это уравнение алгебраически интегрируемо.*

Доказательство. Пусть φ удовлетворяет алгебраически неприводимому уравнению $H(z,w,w',\ldots,w^{(n-1)})=0$, где H — полином по всем переменным, существенно зависящий от z и $w^{(n-1)}$. Поскольку φ не принадлежит классу Ω_{n-2} (поскольку, как видно из доказательства теоремы 3, все функции класса Ω_{n-2} являются решениями автономных алгебраических дифференциальных уравнений $(n-1)$-го порядка), то на основании теоремы 8 все решения

$H(z, w, w', \ldots, w^{(n-1)}) = 0$ являются решениями уравнения (16). Однако для всякого решения $w(t)$ автономного уравнения (16) его решениями является и все семейство $z(t + C)$. Следовательно, все решения однопараметрического семейства уравнений $H(z+C, w, w', \ldots, w^{(n-1)}) = 0$ будут решениями уравнения (16), т.е. это семейство является первым интегралом уравнения (16). Теорема 15 доказана.

Для неинтегрируемых по x систем (14) доставляемый теоремой 14 критерий алгебраичности может быть применен ко всем, а не только к замкнутым траекториям и не только для действительных, но и для комплексных систем.

Теорема 16. *Пусть система (14) неинтегрируема по x. Тогда ее траектория $\{x(t), y(t)\}$ является алгебраической тогда и только тогда, когда $x(t)$ является функцией класса Ω_1.*

Доказательство. Если траектория является алгебраической, то на основании леммы 3 $x(t)$ является решением автономного алгебраического дифференциального уравнения первого порядка, а значит, функцией класса Ω_1. Обратно, если $x(t)$ — функция класса Ω_1, то она — решение некоторого автономного алгебраического дифференциального уравнения первого порядка, так как в противном случае в силу теоремы 15 система (14) была бы интегрируема по x. Тогда на основании леммы 3 данная траектория алгебраическая. Теорема 16 доказана.

Приведем еще одно достаточное условие алгебраичности замкнутых траекторий (14), связанное с отражающей функцией В. И. Мироненко [10].

Теорема 17. *Если отражающая функция $F(t, x, y)$ действительной системы (14) алгебраическая по x, y, то все замкнутые траектории системы (14) алгебраические, разве что система (14) имеет особую точку типа изохронный центр.*

Доказательство. Поскольку все точки замкнутой траектории являются, очевидно, начальными данными для периодических решений системы (14), то всякая замкнутая траектория $\{x(t), y(t)\}$ этой системы удовлетворяет алгебраической системе $F(\pi, x(t), y(t)) = (x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$, где π — период $x(t), y(t)$, а значит, является алгебраической, если только $F(\pi, x, y) - (x, y)^{\mathrm{T}}$ не тождественно равно нулю. В последнем случае все решения системы (14) π-периодические, т.е. система (14) имеет особую точку типа изохронный центр. Теорема 17 доказана.

Автор выражает благодарность В. И. Мироненко за внимание к работе.

Литература

1. *Мироненко В. И.* Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Мн., 1981.
2. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., 1969.
3. *Horn R. A.* // Amer. Math. Mon. 1970. Vol. 77, N 1. P. 65 — 66.
4. *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих переменных. М., 1962.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.
6. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.;Л., 1952.
7. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л., 1937.
8. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. М., 1966. Т. 1.
9. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964.
10. *Мироненко В. И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы

Поступила в редакцию 21 октября 1998 г.