Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 356, 2008 г.

А. А. Осиновская

РЕГУЛЯРНЫЕ УНИПОТЕНТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ИЗ ЕСТЕСТВЕННО ВЛОЖЕННЫХ ПОДГРУПП РАНГА 2 В МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

1. Введение

Данная статья является частью программы исследования свойств унипотентных элементов в модулярных представлениях полупростых алгебраических групп и разработки методов распознавания представлений на основе этих свойств. В работах М. В. Величко, И. Д. Супруненко и автора [2, 4, 11, 17] изучалось поведение унипотентных элементов из естественно вложенных подгрупп типов A_1, A_2 и A_3 в модулярных представлениях простых алгебраических групп (для подгрупп типов A_2 и A_3 рассматривались только представления специальных линейных групп). Заметим, что именно присутствием в группе унипотентных элементов объясняются многие свойства алгебраических групп и конечных групп Шевалле в положительной характеристике, не имеющие аналогов в характеристике 0.

Информация о поведении унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп может быть использована при распознавании представлений линейных групп, а также для решения некоторых других задач. Например, А. Е. Залесский и Ф. Х. Тьеп использовали информацию о структуре блоков Жордана унипотентных элементов для классификации неприводимых комплексных представлений конечных групп типа Ли в характеристике p, неразветвленных над p и остающихся неприводимыми после редукции по модулю p [16, теорема 1.2].

Далее в работе $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, G – односвязная классическая алгебраическая группа ранга n над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p > 2$, $n \geq 4$ при $G = D_n(K)$ и $n \geq 3$ в остальных случаях. Подгруппа Π алгебраической группы Γ называется естественно вложенной, если Π порождается корневыми подгруппами группы Γ, ассоциированными с некоторыми простыми корнями и противоположными к ним корнями. Обозначим через H естественно вложенную подгруппу группы G типа A_2 либо B_2. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – базис системы корней группы G, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – соответствующие им доминантные веса, ϕ – p-ограниченное неприводимое представление группы G со старшим весом $\omega = \sum_{i=1}^{n} m_i\omega_i$, $\mathtt{u} \in H$ – регулярный унипотентный элемент из подгруппы H, $\mathtt{J}_\phi(\mathtt{u})$ – множество размерностей блоков (без учета кратностей) жордановой нормальной формы образа $\phi(\mathtt{u})$ элемента $\mathtt{u}$. Если V – модуль, в котором реализуется представление ϕ, то аналогично определяется множество $\mathtt{J}_V(\mathtt{u})$. Напомним, что представление ϕ называется p-ограниченным, если $m_i < p$ для любого i, $1 \le i \le n$. Отметим, что при $p > 2$ порядок элемента $\mathtt{u}$ равен p. Положим

$$m(\omega) = \begin{cases} \min(2m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_n + 1, p), & G = A_n(K); \\ \min(2m_1 + 4m_2 + \ldots + 4m_{n-1} + 2m_n + 1, p), & G = B_n(K), \\ & H = A_2(K); \\ \min(4m_1 + 6m_2 + \ldots + 6m_{n-1} + 3m_n + 1, p), & G = B_n(K), \\ & H = B_2(K); \\ \min(2m_1 + 4m_2 + \ldots + 4m_n + 1, p), & G = C_n(K), \\ & H = A_2(K); \\ \min(2m_1 + 4m_2 + \ldots + 4m_{n-2} + 2m_{n-1} + 2m_n + 1, p), & G = D_n(K), \end{cases}$$

$$s(\omega) = \begin{cases} \min_{1 \le i,j \le n}(2m_i + 2m_j + 1), & G = A_n(K) \text{ или } D_n(K); \\ \min_{1 \le i,j \le n-1}(2m_i + 2m_j + 1), & G = B_n(K) \text{ или } C_n(K), H = A_2(K); \\ 4m_{n-1} + 3m_n + 1 & G = B_n(K), H = B_2(K), \end{cases}$$

где при $H = A_2(K)$ корни α_i и α_j связаны на схеме Дынкина.

Теорема 1. *Пусть группа G, подгруппа H, элемент $\mathtt{u}$ и представление ϕ такие, как выше. Предположим, что $s(\omega) \le p$. Тогда*

$$\{k \in \mathbb{N} \mid s(\omega) \le k \le m(\phi), k \equiv m(\omega) \pmod 2\} \subset \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}).$$

Для группы $G = A_n(K)$ теорема 1 была доказана в [11, предложение 6].

Теорема 2. *Пусть группа G, элемент $\mathtt{u}$ и представление ϕ такие, как выше, $s(\omega) + 2 \le p$ при $G = A_n(K)$, $n \ge 5$, или $G = B_n(K)$, $C_n(K)$ или $D_n(K)$, $n \ge 6$, и $H \cong A_2(K)$, и пусть $s(\omega) = 1$ в противном случае. Тогда*

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k \le m(\omega), k \equiv m(\omega) \pmod 2\} \subset \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}),$$

т.е. у элемента $\phi(\mathtt{u})$ есть все априори возможные размерности блоков Жордана одной четности.

Отметим, что при больших значениях ранга группы n класс представлений с локально малыми старшими весами из теорем 1 и 2 оказывается достаточно обширным. Результаты можно легко перенести на конечные группы типа Ли.

Теорема 2, а также результаты работ [2, 4, 11, 17] позволяют предположить, что образы унипотентных элементов простого порядка из естественно вложенных подгрупп малых рангов в представлениях, как правило, имеют блоки Жордана всех априори возможных размерностей или всех этих размерностей определенной четности.

Результаты, изложенные в работе, получены при выполнении проектов Ф04-242 и Ф06-176 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и при выполнении задания “Математические модели 03.1” государственной программы фундаментальных исследований.

2. Предварительные леммы

Мы сохраняем обозначения из введения и добавляем следующее. Для простой алгебраической группы Γ символы V_λ и W_λ означают неприводимый модуль со старшим весом λ и модуль Вейля веса λ соответственно. Далее $\mathfrak{X}(\Gamma)$, $\mathfrak{X}^+(\Gamma)$, $W(\Gamma)$ и $\operatorname{Irr}\Gamma$ – система весов, множество всех доминантных весов, группа Вейля и множество всех неприводимых представлений группы Γ соответственно; $v^+ \in V_\lambda$ – ненулевой вектор старшего веса Γ-модуля V_λ. Из контекста всегда ясно, о каком модуле идет речь. На множестве $\mathfrak{X}(\Gamma)$ вводится частичный порядок. Для весов $\mu, \nu \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ мы пишем $\mu < \nu$, если $\nu - \mu$ является суммой положительных корней группы Γ относительно базиса системы корней $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ этой группы. Пусть $\sigma_i \in W(\Gamma)$ – отражение, соответствующее корню α_i.

Обозначим через $\Gamma(\beta_1, \dots, \beta_s)$ подгруппу группы Γ, порожденную корневыми подгруппами этой группы, ассоциированными с корнями $\beta_1, \dots, \beta_s$ и $-\beta_1, \dots, -\beta_s$. Во всех случаях, когда рассматриваются подгруппы такого типа, корни $\beta_1, \dots, \beta_s$ выбираются таким образом, чтобы они составляли базис системы корней подгруппы $\Gamma(\beta_1, \dots, \beta_s)$. В этой ситуации фундаментальные веса подгруппы $\Gamma(\beta_1, \dots, \beta_s)$ определяются относительно этого базиса. Положим $\Gamma(i_1, \dots, i_s) = \Gamma(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s})$.

Для корня α группы Γ, $t \in K$, $k \in \mathbb{N}$ обозначим символами X_α, $\mathcal{X}_\alpha$ и $X_{\alpha,k}$ корневой элемент алгебры Ли группы Γ и корневую подгруппу группы Γ, ассоциированные с α, и элемент гипералгебры алгебры Ли группы Γ, ассоциированный с парой (α, k), соответственно. Для $k < p$ имеем $X_{\alpha,k} = (X_\alpha)^k/k!$. Для $\alpha = \alpha_{\pm i}$ мы пишем $X_{\pm i}$, $\mathcal{X}_{\pm i}$ и $X_{\pm i,k}$. Обозначим через $U^+(S) \subset \Gamma$ подгруппу, порожденную подгруппами $\mathcal{X}_\alpha$, где α пробегает множество всех положительных корней подгруппы $S \subset \Gamma$.

Предполагается, что все рассматриваемые модули и представления являются рациональными и конечномерными. Для Γ-модуля V символы $\mathfrak{X}(V)$, V^μ, $\operatorname{Irr} V$ и $V|S$ обозначают множество всех весов, весовое подпространство веса μ, множество всех весов модуля V и ограничение этого модуля на подгруппу $S \subset \Gamma$ соответственно. Аналогично вводится $\operatorname{Irr} \phi$ и $\phi|S$. Для веса $\mu \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ символ $\mu|S$ обозначает его ограничение на подгруппу S. Для любого веса $\mu \in \mathfrak{X}(V_\omega)$ имеем $\mu = \omega - \sum_{i=1}^n b_i\alpha_i$, где $b_i \in \mathbb{N}$ [6, теорема 39]; в этом случае положим $b_i(\mu) = b_i$.

Пусть $p > 0$ и S – естественно вложенная подгруппа группы Γ. Обозначим через Γ^0 и S^0 простую односвязную алгебраическую группу над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 того же типа, что и Γ, и подгруппу в Γ^0, порожденную корневыми подгруппами для тех же корней, что и S. Мы отождествляем системы весов групп Γ и Γ^0 стандартным образом. Для неприводимого Γ-модуля V обозначим символом V^0 неприводимый Γ^0-модуль с тем же старшим весом. Аналогично вводится представление ϕ^0.

Заметим, что множество $\mathfrak{X}(A_1(K))$ отождествляется с $\mathbb{Z}$ при помощи отображения $a\omega_1 \mapsto a$. При этом множество $\mathfrak{X}^+(A_1(K))$ отождествляется с $\mathbb{N}$.

Теорема 3 [9, теорема 3]**.** *Пусть $p = 0$, $\Gamma = A_2(K)$, $\mathfrak{u} \in \Gamma$ – регулярный унипотентный элемент, $\phi \in \operatorname{Irr}\Gamma$ и старший вес представления ϕ равен $a_1\omega_1 + a_2\omega_2$. Тогда образ $\phi(u)$ содержит блоки Жордана в точности следующих размерностей:*

1. $1 \le k \le 2a_1 + 2a_2 + 1$, *где* $k \equiv 2a_1 + 2a_2 + 1 \pmod 4$, *если* $a_1 = 0$ *или* $a_2 = 0$.
2. $3, 5, \dots, 2a_1 + 2a_2 + 1$, *если числа* $a_1, a_2 \ne 0$ *и по крайней мере одно из них нечетно.*
3. $1, 5, \dots, 2a_1 + 2a_2 + 1$ *(отсутствует только 3), если числа* $a_1, a_2 \ne 0$ *и оба четны.*

Лемма 1 [15, лемма 2.9]. *Пусть V – неприводимый Γ-модуль и $\mu = \sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$. Положим $y_k = -\langle\alpha_{k-1}, \alpha_k\rangle$, $z_k = -\langle\alpha_{k+1}, \alpha_k\rangle$. Пусть $1 \leq i, j \leq r$ и все корни α_t при t, лежащем в интервале с концами i и j, образуют цепочку на диаграмме Дынкина группы Γ. Для целого числа d при $0 < d \leq a_j$ определим вектор $v(i, j, d)$ следующим образом. Положим $d_j = d$. Если $i > j$, положим $d_k = a_k + d_{k-1}y_k$ для $i \geq k > j$. Если $i < j$, положим $d_k = a_k + d_{k+1}z_k$ для $i \leq k < j$. Теперь пусть*

$$v = X_{-i,d_i} \dots X_{-k,d_k} \dots X_{-j,d}v^+.$$

Тогда $v \neq 0$ и $X_{l,b}v = 0$ для $l \neq i$ и $b > 0$. Следовательно, группа $\mathcal{X}_l$ оставляет вектор v на месте.

Определение 1. *Пусть Π – естественно вложенная подгруппа группы Γ и V – Γ-модуль. Вектор $v \in V$ называется примитивным Π-вектором, если v – ненулевой весовой вектор и группа $U^+(\Pi)$ оставляет его на месте.*

Лемма 2. *Пусть Γ – простая алгебраическая группа над полем K характеристики $p \neq 2$, $\Pi = A_r(K) \subset \Gamma$ – ее естественно вложенная подгруппа, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – базис системы корней группы Π, V – неразложимый Γ-модуль, $U \subset V$ – неразложимый Π-модуль со старшим вектором w веса $\nu = a_1\omega_1 + \dots + a_r\omega_r$,*

$$v = X_{-2,a_2+\dots+a_r} \dots X_{-r,a_r}w,$$

μ – вес вектора v. Если вес $\mu + k\alpha_1 \in \mathfrak{X}(V)$ для целого числа $k > 0$, то $\nu + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \in \mathfrak{X}(V)$

Доказательство. По лемме 1 вектор $v \neq 0$ и $\mu \in \mathfrak{X}(V)$. Предположим, что $\mu + k\alpha_1 \in \mathfrak{X}(V)$. Из теоремы Премета [5] следует, что при $p \neq 2$ справедливо равенство $\mathfrak{X}(V) = \mathfrak{X}(V^0)$. Значит, можно считать, что $p = 0$. Согласно [1, гл. VIII, §7.2, предл. 4] $\mathfrak{X}(V^0)$ – насыщенное множество, следовательно,

$$\lambda = \mu + \alpha_1 = \nu + \alpha_1 - (a_2 + \dots + a_r)\alpha_2 - \dots - a_r\alpha_r \in \mathfrak{X}(V^0).$$

Кроме того, из насыщенности множества $\mathfrak{X}(V^0_\mu)$ следует, что оно замкнуто относительно группы $W(G^0)$. Тогда

$$\sigma_2(\lambda) = \nu + \alpha_1 + \alpha_2 - (a_3 + \dots + a_r)\alpha_3 - \dots - a_r\alpha_r \in \mathfrak{X}(V^0).$$

Применяя индукцию, получаем, что

$$\sigma_r \ldots \sigma_2(\lambda) = \nu + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r \in \mathfrak{X}(V^0). \quad \square$$

Если $H = A_2(K)$, то зафиксируем индексы i и j, при которых $2m_i + 2m_j + 1 = s(\omega)$. Мы можем считать, что $i < j$. При $H = B_2(K)$ положим $i = n - 1$ и $j = n$.

Лемма 3. *Размерность максимального блока Жордана образа $\phi(\mathtt{u})$ равна $m(\phi)$.*

Доказательство. Обозначим через $d_\phi(u)$ степень минимального полинома образа $\phi(\mathtt{u})$. Очевидно, что размерность максимального блока Жордана равна $d_\phi(u)$. Пусть $z \in G^0$ – элемент с той же нормальной формой Жордана, что и u. Тогда из [7, теорема 1.1, предложение 1.3 и алгоритм 1.4] следует, что

$$d_\phi(u) = \min(p, d_{\phi^0}(z)).$$

Обозначим через S подгруппу типа A_1 из группы G^0, для которой $z \in S$. Заметим, что в характеристике 0 полная приводимость представлений полупростых групп и известные свойства A_1-модулей позволяют найти блоки Жордана образа корневого элемента z в заданном представлении по известным композиционным факторам ограничения представления ϕ^0 на подгруппу S. В самом деле, каждый фактор старшего веса k дает блок Жордана размерности $k+1$, и наоборот. Обозначим через $M(\phi^0, S)$ максимальный элемент в $\operatorname{Irr}(\phi^0|S)$. Тогда $d_{\phi^0}(z) = M(\phi^0, S) + 1$.

Чтобы найти $M(\phi^0, S)$ ограничим представление ϕ^0 сначала на подгруппу H^0, а затем на S. Пусть $H = A_2(K)$. Тогда из теоремы 3 следует, что

$$M(\phi^0, S) = \max_{a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in \operatorname{Irr}(\phi^0|H^0)} (2a_1 + 2a_2).$$

Если $G = A_n(K)$, то применяя [12, теорема 1.1], получаем, что

$$M(\phi^0, S) = 2m_1 + \ldots + 2m_n.$$

Если $G = B_n(K)$ или $D_n(K)$, то из [12, предложение 1.1] следует, что

$$M(\phi^0, S) = 2m_1 + 4m_2 + \ldots + 4m_{n-1} + 2m_n$$

и $2m_1+4m_2+\ldots+4m_{n-2}+2m_{n-1}+2m_n$ соответственно. Предположим, что $G = C_n(K)$. Обозначим через $\alpha_{\max}$ максимальный корень группы H^0 и положим $P = H^0(\alpha_{\max})$. Если $\mu = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ – старший вес композиционного фактора из $\mathrm{Irr}(\phi^0|H^0)$, то $a_1 + a_2$ будет старшим весом некоторого композиционного фактора ограничения $\mathrm{Irr}(\phi^0|P)$. Применяя [10, теорема 1.1] получаем, что

$$M(\phi^0, S) \leq 2(m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_n).$$

Докажем обратное неравенство. Мы можем считать, что $H^0 = G^0(1,2)$. Положим

$$w = X_{-n,m_n+m_{n-1}+\ldots+m_2}X_{-(n-1),m_{n-1}+\ldots+m_2} \ldots X_{-3,m_3+m_2}X_{-2,m_2}v^+.$$

По лемме 1 для группы G^0 вектор $w \neq 0$ и примитивен относительно подгруппы $\Pi = G^0(1,\ldots,n-1)$. Обозначим через $\nu = c_1\omega_1+\ldots+c_n\omega_n$ его вес. Имеем

$$\nu|\Pi = (m_1 + m_2)\omega_1 + m_3\omega_2 + \ldots + m_{n-1}\omega_{n-2} + (m_2 + \ldots + m_{n-1} + 2m_n)\omega_{n-1}.$$

Положим

$$v = X_{-3,c_3+\ldots+c_{n-1}} \ldots X_{-(n-1),c_{n-1}}w.$$

Применяя лемму 1 к группе Π, получаем, что $v \neq 0$.

Докажем, что вектор v примитивен относительно H^0, то есть для неотрицательных целых чисел a_1 и a_2, не равных одновременно 0,

$$\mu + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \notin \mathfrak{X}(V^0_\omega).$$

Поскольку при построении веса μ из ω не вычитался корень α_1, то эта формула справедлива при $a_1 > 0$. Предположим теперь, что $a_1 = 0$. Тогда, согласно лемме 2

$$\nu + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} \in \mathfrak{X}(V^0_\omega).$$

Но такой вес не принадлежит $\mathfrak{X}(V^0_\omega)$. Значит, вектор v примитивен относительно H^0. Его вес относительно этой подгруппы равен

$$\lambda = (m_1 + m_2)\omega_1 + (m_2 + 2m_3 + \ldots + 2m_n)\omega_2.$$

Рассматривая ограничение H^0-модуля V^0_λ на S, получаем, что

$$M(\phi^0, S) = 2m_1 + 4m_2 + \ldots + 4m_n.$$

Пусть теперь $H = B_2(K)$. Согласно [9, теорема 6]

$$M(\phi^0, S) = \max_{a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in \mathrm{Irr}(\phi^0|H^0)} (4a_1 + 3a_2).$$

Используя правила ветвления для ограничений представлений групп типа B_r на подгруппы типа B_{r-1} [3], получаем, что

$$M(\phi^0, S) = 4m_1 + 6m_2 + \ldots + 6m_{n-1} + 3m_n. \qquad \square$$

Лемма 4 [11, лемма 12]**.** *Пусть* Γ *– алгебраическая группа,* $z \in \Gamma$ *и* $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_t$ *– прямая сумма* Γ*-модулей. Тогда* $\mathrm{J}_V(z) = \cup_{l=1}^t \mathrm{J}_{U_l}(z)$.

Лемма 5. *Пусть* $p > 0$, $\Gamma = A_1(K)$ *и* V_a *–* Γ*-модуль. Тогда* $X_{-1,a}v^+ \neq 0$ *и* $X_{-1,a+1}v^+ = 0$. *Если* $a < p$, *то* $X_{-1,k}v^+ \neq 0$ *при* $0 < k < a$.

Доказательство. Известно, что $V_a \cong W_a/U$, где $U \subset W_a$ – подмодуль [8, лемма 2.13(b)]. Из [1, глава VIII, §1.3] следует, что лемма справедлива для W_a. Вектор $v^+ \notin U$, поскольку $V_a \neq U$. Из [8, часть 2, предложение 8.19] легко видно, что при $a < p$ подмодуль $U = 0$. Факторизуя W_a по U, получаем утверждение леммы.

Лемма 6 [11, лемма 18]**.** *Пусть* $p > 2$, $\Gamma = A_2(K)$ *и* $\mu = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in \mathfrak{X}^+(\Gamma)$. *Предположим, что* $S \subseteq \Gamma$ *– замкнутая в топологии Зариского простая группа типа* A_1, *содержащая регулярный унипотентный элемент. Тогда* $2a_1 + 2a_2 \in \mathrm{Irr}(V_\mu|S)$. *Если* $a = \lambda|S$ *для веса* $\lambda \in \mathfrak{X}(V_\mu)$, *то число* a *четно и* $a \leq 2a_1 + 2a_2$.

Лемма 7 [11, лемма 9]**.** *Пусть* V *–* A_1*-модуль и* $|a| < p$ *для всех* $a \in \mathfrak{X}(V)$. *Тогда* V *вполне приводим.*

Лемма 8 [11, лемма 10]**.** *Пусть* $S = A_1(K)$, $a < p$ *и* V_a *– неприводимый* S*-модуль. Тогда* $\mathrm{J}_{V_a}(z) = \{a+1\}$ *для неединичного унипотентного элемента* $z \in S$.

Лемма 9. *Пусть* Γ *– простая алгебраическая группа,* V *–* Γ*-модуль и подгруппа* $\Pi = \Gamma(\beta_1, \ldots, \beta_k)$. *Предположим, что веса* $\mu_1, \ldots, \mu_l \in \mathfrak{X}(V)$ *и что для любых двух индексов* $1 \leq r, s \leq l$ *разность* $\mu_r - \mu_s \neq i_1\beta_1 + \ldots + i_k\beta_k$, *где* $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{Z}$. *Положим для* $1 \leq r \leq l$

$$\mathfrak{X}_r = \{\nu \in \mathfrak{X}(V) \mid \nu = \mu_r - n_1\beta_1 - \ldots - n_k\beta_k,\ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}\},$$

$\mathfrak{X}_{l+1} = \mathfrak{X}(V) \setminus (\cup_{r=1}^{l} \mathfrak{X}_r)$ *и* $U_r = \sum_{\lambda \in \mathfrak{X}_r} V^\lambda$ *для* $1 \le r \le l+1$. *Тогда* U_t *–* Π*-модули и* $V = \oplus_{t=1}^{l+1} U_t$.

Доказательство. Для любых двух различных индексов $1 \le r, s \le l+1$ имеем $\mathfrak{X}_r \cap \mathfrak{X}_s = \varnothing$. Очевидно, что любой вес $\lambda \in \mathfrak{X}(V)$ содержится в некотором $\mathfrak{X}_r$. Значит, $\mathfrak{X}(V) = \bigsqcup_{r=1}^{l+1} \mathfrak{X}_r$.

Чтобы показать, что U_r является Π-модулем при $1 \le r \le l+1$, достаточно проверить, что $\mathcal{X}_{\pm\beta_a}(t) V^\nu \subseteq U_r$ для любого $\nu \in \mathfrak{X}_r$ и $1 \le a \le k$. Пусть $v \in V^\nu$. Согласно [6, лемма 72] $\mathcal{X}_{\beta_a}(t) v = v + \sum_{d=1}^{\infty} t^d v_d$, где $v_d \in V^{\mu + d\beta_a}$. Очевидно, что все векторы $v_d \in U_r$, и поэтому $\mathcal{X}_{\beta_a}(t) v \in U_r$. Аналогично, $\mathcal{X}_{-\beta_a}(t) v \in U_r$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть* V *– неразложимый* Γ*-модуль со старшим весом* ω, *подгруппа* $\Pi = \Gamma(i_1, \ldots, i_k)$ *и веса* $\mu_1, \ldots, \mu_l$ *удовлетворяют следующему условию: для любых двух различных индексов* $1 \le r, s \le l$ *существует целое число* $a \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, *такое, что* $b_a(\mu_r) \ne b_a(\mu_s)$. *Тогда* U_t *–* Π*-модули и* $V = \oplus_{t=1}^{l+1} U_t$.

Следствие 2. *Пусть вес* $\mu_r|\Pi$ *является максимальным весом* Π*-модуля* U_r *для некоторого* $1 \le r \le l$ *и унипотентный элемент* z *порядка* p *содержится в* A_1*-подгруппе* $S \subset \Pi$. *Предположим, что* $\mu_r|S < p$. *Тогда* $\mu_r|S + 1 \in \mathrm{J}_V(z)$.

Доказательство. Согласно лемме 7 модуль U_r вполне приводим относительно подгруппы S. Теперь из лемм 6 и 8 следует, что $\mu_r|S+1 \in \mathrm{J}_V(z)$. $\square$

Следствие 3. *Пусть вес* $\lambda_r = \mu_r|\Pi$ *является максимальным весом* Π*-модуля* U_r *для некоторого* $1 \le r \le l$ *и унипотентный элемент* z *порядка* p *содержится в* A_1*-подгруппе* $S \subset \Pi$. *Предположим, что* $\mu_r|S < p$ *и модуль* W_{λ_r} *неприводим. Тогда* $\mathrm{J}_{V^0_{\lambda_r}}(z) \subset \mathrm{J}_V(z)$.

Доказательство. Поскольку модуль W_{λ_r} неприводим, то $W_{\lambda_r} = V^0_{\lambda_r} = V_{\lambda_r}$. Из лемм 6 и 7 следует, что ограничение $V_{\lambda_r}|S$ вполне приводимо и $\mathrm{Irr}(V_{\lambda_r}|S) = \mathrm{Irr}(V^0_{\lambda_r}|S^0)$. Для вполне приводимых ограничений представлений выражение $a \in \mathrm{Irr}(V_{\lambda_r}|S)$ равносильно $a+1 \in \mathrm{J}_{V_{\lambda_r}}(z)$. Отсюда получаем искомое. $\square$

Лемма 10. *Пусть* $\Gamma = A_r(K)$, $r \ge 3$, U *– неразложимый* Γ*-модуль с* p*-ограниченным старшим весом* $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$, $a_2 a_3 \ne 0$ *и* $\omega \ne a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$ *с* $a_2 + a_3 + 1 = p$. *Положим* $\lambda = \omega - \alpha_2 - \alpha_3$

и $\mu = \omega - \alpha_2 - 2\alpha_3$, Тогда существуют ненулевые векторы $v \in U^{\lambda}$ и $w \in U^{\mu}$, примитивные относительно $\Gamma(1,2)$.

Доказательство. При $p = 0$ это утверждение очевидно. Пусть $p > 0$. Положим $\Pi = \Gamma(2,3)$, $\omega' = \omega|\Pi = a_2\omega_1 + a_3\omega_2$, $\lambda' = \lambda|\Pi$ и $\mu' = \mu|\Pi$. По лемме 1, неразложимый Π-модуль V со старшим весом ω' является прямым слагаемым в ограничении $U|\Pi$. Согласно [10, лемма 3.1] $V = W_{\omega'}$ либо $V = W_{\omega'}/V_{\nu}$, где $\nu = \omega' - (a_2 + a_3 + 2 - p)(\alpha_1 + \alpha_2)$ и $V_{\nu} = W_{\nu}$. Последний случай возможен при $a_2 + 1, a_3 + 1 < p < a_2 + a_3 + 2$.

Если $V = W_{\omega'}$, то очевидно существуют ненулевые векторы $v \in V_{\omega'}^{\lambda'}$ и $w \in V_{\omega'}^{\mu'}$, примитивные относительно $\Gamma(2)$. Эти векторы будут примитивны также относительно $\Gamma(1,2)$, поскольку при их построении мы действовали в рамках группы Π. Предположим теперь, что $V = W_{\omega'}/V_{\nu}$. Веса λ' и $\mu' < \nu$ тогда и только тогда, когда $a_2 + a_3 + 1 = p$. Отсюда следует, что при $a_2 + a_3 + 1 \neq p$ векторы v и $w \notin V_{\nu}$ и справедливо утверждение леммы.

Пусть $a_2 + a_3 + 1 = p$. Тогда существует $l > 3$, для которого $a_l \neq 0$. Тогда, рассматривая модуль, порожденный вектором $X_{-3} \ldots X_{-l}v^{+}$ и группой $\Gamma(1,2,3)$, и используя рассуждения из предыдущего абзаца, мы получаем искомое. □

3. Большие блоки Жордана

Доказательство теоремы 1. Пусть группа G, унипотентный элемент u, представление ϕ такие, как в утверждении теоремы, и $s(\omega) \leq p$.

1. Пусть $H = A_2(K)$. Для группы $G = A_n(K)$ теорема доказана в [11, предложение 6]. Предположим, что $G = B_n(K)$, $C_n(K)$ либо $D_n(K)$. Мы можем считать, что $j = i + 1 \leq n - 1$, так как если $G = D_n(K)$ и $i = n - 2$, $j = n$, то можно перейти к дуальному представлению.

а) Зафиксируем целое число r, такое, что

$$(s(\omega) - 1)/2 \leq r \leq \min(m_1 + m_2 + \ldots + m_n, (p-1)/2).$$

Положим $H = G(i, i+1)$. Будем строить векторы v_r веса $\mu_r = \omega - k_1\omega_1 - \ldots - k_n\omega_n$, удовлетворяющие условиям следствия 2 при $\Pi = H$, для которых $\mu_r|H = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ и $a_1 + a_2 = r$.

Обозначим

$$v_{m_i + m_{i+1}} = v^{+}.$$

Если существует $k < i$, для которого $m_k > 0$, то для любого такого k и $0 < d \leq m_k$ положим

$$v_r = X_{-(i-1),d+m_{k+1}+\ldots+m_{i-1}} \ldots X_{-(k+1),d+m_{k+1}} X_{-k,d} v^+,$$

где $r = d + m_{k+1} + \ldots + m_{i-1} < p/2$. Отметим, что таким образом индекс r пробегает отрезок от $m_i + m_{i+1}$ до $\min(m_1 + m_2 + \ldots + m_{i+1}, (p-1)/2)$. Применяя лемму 1, получаем, что $v_r \neq 0$ для всех таких r.

Обозначим

$$v = v_{m_1+m_2+\ldots+m_{i+1}}.$$

Предположим, что существует индекс $k > i+1$, такой, что $m_k > 0$ и $k \leq n-1$ при $G = C_n(K)$ или $D_n(K)$. Зафиксируем $0 < d \leq m_k$. Положим

$$v_r = X_{-(i+2),m_{i+2}+\ldots+m_{k-1}+d} \ldots X_{-(k-1),m_{k-1}+d} X_{-k,d} v,$$

где $r = m_1 + \ldots + m_{k-1} + d < p/2$. Применяя лемму 1 к группе $G(i, \ldots, n)$, получаем, что $v_r \neq 0$ при таких значениях r. Таким образом при $G = B_n(K)$ мы построили векторы v_r для

$$m_i + m_{i+1} \leq r \leq \min(m_1 + \ldots + m_n, (p-1)/2),$$

а при $G = C_n(K)$ или $D_n(K)$ мы построили v_r для

$$m_i + m_{i+1} \leq r \leq \min(m_1 + \ldots + m_{n-1}, (p-1)/2).$$

Пусть $G = C_n(K)$ и $m_n > 0$. Для $0 < d \leq m_n$ и $m_1 + \ldots + m_{n-1} + d < p/2$ положим

$$v_{m_1+\ldots+m_{n-1}+d} = X_{-(i+2),m_{i+2}+\ldots+m_{n-1}+d} \ldots X_{-(n-1),m_{n-1}+d} X_{-n,d} v.$$

Поскольку $m_1 + \ldots + m_{n-1} + d < p/2$, то из свойств представлений группы $SL_2(K)$ (лемма 5) следует, что вектор $v_{m_1+\ldots+m_{n-1}+d}$ не равен 0.

Теперь рассмотрим случай $m_n > 0$ для $G = D_n(K)$. Если $i + 1 = n - 1$, то для $0 < d \leq m_n$ и $m_1 + \ldots + m_{n-1} + d < p/2$ положим

$$v_{m_1+\ldots+m_{n-1}+d} = X_{-n,d} v.$$

Этот вектор ненулевой согласно лемме 1. Если же $i+1 \leq n-2$, то для $0 < d \leq m_n$ и $m_1 + \ldots + m_{n-1} + d < p/2$ положим

$$v_{m_1+\ldots+m_{n-1}+d} = X_{-(i+2),m_{i+2}+\ldots+m_{n-1}+d} \ldots X_{-(n-2),m_{n-2}+m_{n-1}+d} X_{-(n-1),m_{n-1}} X_{-n,d} v.$$

В этом случае, применяя лемму 1 к группам G и $G(1,\ldots,n-1)$, получаем, что $v_r \neq 0$.

Таким образом, мы построили ненулевые векторы v_r при

$$m_i + m_{i+1} \leq r \leq \min(m_1 + m_2 + \ldots + m_n, (p-1)/2).$$

Их веса μ_r при таких r удовлетворяют условиям следствий 1 и 2 (поскольку при их построении из веса ω не вычитаются корни α_i и α_{i+1}). Значит,

$$\{k \in \mathbb{N} \mid s(\omega) \leq k \leq \min(2m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_n + 1, p), k \equiv 1 \pmod 2\} \subset \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}).$$

б) Теперь пусть $m_1 + m_2 + \ldots + m_n < (p-1)/2$. Поскольку все подгруппы типа A_2 сопряжены, мы можем считать, что $H = G(1,2)$. Обозначим через P подгруппу $G(1,\ldots,n-1)$. Зафиксируем целое число r, такое, что

$$m_1 + \ldots + m_n < r \leq \min(m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_{n-1} + m_n, (p-1)/2)$$

для $G = B_n(K)$,

$$m_1 + \ldots + m_n < r \leq \min(m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_n, (p-1)/2)$$

для $G = C_n(K)$ и

$$m_1 + \ldots + m_n < r \leq \min(m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_{n-2} + m_{n-1} + m_n, (p-1)/2)$$

для $G = D_n(K)$. Очевидно, что в данном случае существует число k, $2 \leq k \leq n$, для которого $m_k > 0$. Если $G = B_n(K)$, то для таких k и для $0 < d \leq m_k$ положим

$$w_r = X_{-n,m_n+2m_{n-1}+\ldots+2m_{k+1}+2d} X_{-(n-1),m_{n-1}+\ldots+m_{k+1}+d} \ldots X_{-(k+1),m_{k+1}+d} X_{-k,d} v^+,$$

где $r = m_1 + \ldots + m_{k-1} + m_k + d + 2m_{k+1} + \ldots + 2m_{n-1} + m_n < p/2$. По лемме 1 для группы G вектор $w_r \neq 0$ и примитивен относительно $G(1, \ldots, n-1)$. Обозначим его вес $\nu_r = c_1\omega_1 + \ldots + c_n\omega_n$. Имеем

$$\begin{aligned}\nu_r|P = m_1\omega_1 + \ldots + m_{k-2}\omega_{k-2} \\ + (d + m_{k-1})\omega_{k-1} + (m_k - d + m_{k+1})\omega_k + m_{k+2}\omega_{k+1} + \\ + \ldots + m_{n-1}\omega_{n-2} + (d + m_{k+1} + \ldots + m_n)\omega_{n-1}.\end{aligned}$$

Если $G = C_n(K)$, то для индексов k, таких, что $m_k \neq 0$, и для $0 < d \leq m_k$ положим

$$\begin{aligned}w_r = X_{-n, m_n + m_{n-1} + \ldots + m_{k+1} + d} X_{-(n-1), m_{n-1} + \ldots + m_{k+1} + d} \\ \ldots X_{-(k+1), m_{k+1} + d} X_{-k, d} v^+,\end{aligned}$$

где $r = m_1 + \ldots + m_{k-1} + d + m_k + 2m_{k+1} + \ldots + 2m_n < p/2$. По лемме 1 для группы G вектор $w_r \neq 0$ и примитивен относительно подгруппы $G(1, \ldots, n-1)$. Обозначим его вес через $\nu_r = c_1\omega_1 + \ldots + c_n\omega_n$. Тогда

$$\begin{aligned}\nu_r|P = m_1\omega_1 + \ldots + m_{k-2}\omega_{k-2} + (d + m_{k-1})\omega_{k-1} \\ + (m_k - d + m_{k+1})\omega_k + m_{k+2}\omega_{k+1} \\ + \ldots + m_{n-1}\omega_{n-2} + (d + m_{k+1} + \ldots + m_{n-1} + 2m_n)\omega_{n-1}.\end{aligned}$$

Для $G = D_n(K)$ положим

$$\begin{aligned}w_r = X_{-n, m_n + m_{n-2} + \ldots + m_{k+1} + d} X_{-(n-2), m_{n-2} + \ldots + m_{k+1} + d} \\ \ldots X_{-(k+1), m_{k+1} + d} X_{-k, d} v^+,\end{aligned}$$

где $r = m_1 + \ldots + m_{k-1} + m_k + d + 2m_{k+1} + \ldots + 2m_{n-2} + m_{n-1} + m_n < p/2$. Согласно лемме 1 для группы G вектор $w_r \neq 0$. Обозначим через $\nu_r = c_1\omega_1 + \ldots + c_{n-1}\omega_{n-1} + c_n\omega_n$ его вес. Имеем

$$\begin{aligned}\nu_r|P = m_1\omega_1 + \ldots + m_{k-2}\omega_{k-2} + (d + m_{k-1})\omega_{k-1} \\ + (m_k - d + m_{k+1})\omega_k + m_{k+2}\omega_{k+1} \\ + \ldots + m_{n-1}\omega_{n-2} + (d + m_{k+1} + \ldots + m_{n-2} + m_n)\omega_{n-1}.\end{aligned}$$

Теперь для всех трех групп положим

$$v_r = X_{-3, c_3 + \ldots + c_{n-1}} \ldots X_{-(n-1), c_{n-1}} w_r.$$

Очевидно, что

$$\mu_r = \nu_r - (c_3 + \ldots + c_{n-1})\alpha_3 - \ldots - c_{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Применяя лемму 1 к группе P, получаем, что $v_r \neq 0$.

Таким образом, мы получили веса μ_r, удовлетворяющие условиям следствия 1. При

$$m_1 + \ldots + m_n < r \leq \min(m_1 + m_2 + 2m_3 + \ldots + 2m_{n-1} + m_n, (p-1)/2)$$

для $G = B_n(K)$,

$$m_1 + \ldots + m_n < r \leq \min(m_1 + m_2 + 2m_3 + \ldots + 2m_n, (p-1)/2)$$

для $G = C_n(K)$ и

$$m_1 + \ldots + m_n < r \leq \min(m_1 + m_2 + 2m_3 + \ldots + 2m_{n-2} + m_{n-1} + m_n, (p-1)/2)$$

для $G = D_n(K)$. Очевидно также, что $\mu_r|H$ являются максимальными весами соответствующих H-модулей U_r (поскольку при их построении мы не вычитали из ω корни α_1 и α_2).

Пусть теперь

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + 2m_3 + \ldots + 2m_{n-1} + m_n &< r \\ &\leq \min(m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_{n-1} + m_n, (p-1)/2) \end{aligned}$$

для $G = B_n(K)$,

$$m_1 + m_2 + 2m_3 + \ldots + 2m_n < r \leq \min(m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_n, (p-1)/2)$$

для $G = C_n(K)$ и

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + 2m_3 + \ldots + 2m_{n-2} + m_{n-1} + m_n &< r \\ &\leq \min(m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_{n-2} + m_{n-1} + m_n, (p-1)/2) \end{aligned}$$

для $G = D_n(K)$. Нам нужно доказать, что для весов μ_r с такими индексами и неотрицательных целых чисел a_1 и a_2, не равных одновременно 0,

$$\mu_r + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \notin \mathfrak{X}(V_\omega).$$

Поскольку при построении веса μ_r из ω_r не вычитался корень α_1, то эта формула справедлива при $a_1 > 0$. Предположим теперь, что $a_1 = 0$. Тогда, согласно лемме 2

$$\sigma_{n-1} \ldots \sigma_3(\lambda_r) = \nu_r + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} \in \mathfrak{X}(V_\omega).$$

Но такие веса не принадлежат $\mathfrak{X}(V^\omega)$. Значит, μ_r удовлетворяют условиям следствия 2. Применяя его, получаем все искомые факторы.

2. Пусть $G = B_n(K)$ и $H = B_2(K)$. Зафиксируем целое число r, такое, что $m(\omega) - 1 \le r \le \min(4m_1 + 6m_2 + \ldots + 6m_{n-1} + 3m_n, p-1)$ и $r \equiv s(\omega) - 1 \pmod 2$. Положим $H = G(n-1, n)$. Будем строить векторы v_r веса $\mu_r = \omega - k_1\omega_1 - \ldots - k_n\omega_n$, удовлетворяющие условиям следствия 2 или 3 при $\Pi = H$, для которых $\mu_r|H = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ и $4a_1 + 3a_2 = r$.

а) Обозначим

$$v_{4m_{n-1}+3m_n} = v^+.$$

Если $\omega = m_n\omega_n$, то очевидно, что все доказано. В противном случае существует $k < n$, для которого $m_k > 0$. Для любого такого $k < n-1$ и $0 < d \le m_k$ положим

$$v_r = X_{-(n-2),d+m_{k+1}+\ldots+m_{n-2}} \ldots X_{-(k+1),d+m_{k+1}} X_{-k,d} v^+,$$

где $r = 4d + 4m_{k+1} + \ldots + 4m_{n-1} + 3m_n < p - 1$. Применяя лемму 1, получаем, что $v_r \ne 0$ для всех таких r. Тогда

$$\mu_r|H = (d + m_{k+1} + \ldots + m_{n-1})\omega_1 + m_n\omega_2.$$

Таким образом, мы построили ненулевые векторы v_r при

$$4m_{n-1} + 3m_n \le r \le \min(4m_1 + 4m_2 + \ldots + 4m_{n-1} + 3m_n, p-1),$$

$r \equiv 3m_n \pmod 4$. Поскольку $2(d + m_{k+1} + \ldots + m_{n-1}) + m_n + 3 \le p$, то по [10, теорема 3.1] модули $W_{\mu_r|H}$ неприводимы. Веса μ_r векторов v_r удовлетворяют условиям следствия 1 и следствия 3 (поскольку при их построении из ω не вычитаются корни α_{n-1} и α_n). Из [9] следует, что

$$4d + 4m_{k+1} + \ldots + 4m_{n-1} + 3m_n + 1 \quad \text{и} \quad 4d + 4m_{k+1} + \ldots + 4m_{n-1} + 3m_n - 1 \in \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}).$$

Если $4d + 4m_{k+1} + \ldots + 4m_{n-1} + 3m_n = p - 3$ для некоторого d, то из леммы 3 получаем, что $p - 1 \in \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u})$. Значит,

$$\{k \in \mathbb{N} \mid s(\omega) \le k \le \min(4m_1 + \ldots + 4m_{n-1} + 3m_n + 1, p), k \equiv 3m_n + 1 \pmod 2\} \subset \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}).$$

б) Пусть $4m_1 + 4m_2 + \ldots + 4m_{n-1} + 3m_n < p - 1$. Зафиксируем $r \equiv 3m_n \pmod 2$, такое, что

$$4m_1 + 4m_2 + \ldots + 4m_{n-1} + 3m_n < r \le \min(4m_1 + \ldots + 4m_{n-2} + 6m_{n-1} + 3m_n, p - 1).$$

В этом случае очевидно, что $m_{n-1} > 0$. Пусть $0 < d \le m_{n-1}$. Положим

$$w_r = X_{-1, m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+d} \ldots X_{-(n-2), m_{n-2}+d} X_{-(n-1), d} v^+,$$

где $r = 4m_1 + \ldots + 4m_{n-1} + 2d + 3m_n$. По лемме 1 для группы G вектор $w_r \ne 0$. Обозначим его вес через ν_r. Положим $P = G(2, \ldots, n)$. Тогда

$$\nu_r|P = m_1\omega_1 + \ldots + m_{n-3}\omega_{n-3} + (m_{n-2} + m_{n-1} - d)\omega_{n-2} + (m_n + 2d)\omega_{n-1}.$$

Положим

$$v_r = X_{-(n-2), m_1+\ldots+m_{n-3}} \ldots X_{-3, m_1+m_2} X_{-2, m_1} w_r.$$

Применяя лемму 1 к группе P, получаем, что $v_r \ne 0$. Вес этого вектора равен

$$\mu_r = \omega - (m_1 + \ldots + m_{n-2} + d)(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2}) - d\alpha_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\mu_r|H = (m_1 + \ldots + m_{n-1} - d)\omega_1 + (m_n + 2d)\omega_2.$$

Таким образом, при

$$4m_1 + 4m_2 + \ldots + 4m_{n-1} + 3m_n < r \le \min(4m_1 + \ldots + 4m_{n-2} + 6m_{n-1} + 3m_n, p - 1),$$

$r \equiv 3m_n \pmod 2$, мы получили веса μ_r, удовлетворяющие условиям следствия 1. Нужно доказать, что $\mu_r|H$ являются максимальными весами соответствующих H-модулей U_r, то есть, что для весов μ_r с такими индексами и неотрицательных целых чисел a_1 и a_2, не равных одновременно 0, имеем

$$\mu_r + a_2\alpha_{n-1} + a_1\alpha_n \notin \mathfrak{X}(V_\omega).$$

Поскольку при построении веса μ_r из ω_r не вычитался корень α_n, то эта формула справедлива при $a_1 > 0$. Предположим теперь, что $a_1 = 0$. Тогда, согласно лемме 2,

$$\nu_r + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_2 \in \mathfrak{X}(V_\omega).$$

Получаем противоречие. Значит, веса μ_r удовлетворяют условиям следствия 2. Применяя его, получаем искомые факторы.

в) Пусть $4m_1 + \ldots + 4m_{n-2} + 6m_{n-1} + 3m_n < p - 1$. Положим

$$P_1 = G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1} + \alpha_n) \cong B_{n-1}(K).$$

Рассмотрим неразложимый модуль M, порожденный вектором v^+ и подгруппой P_1. Тогда $V_\omega|P_1 = M \oplus V$ для некоторого P_1-модуля V. Вес

$$\omega|P_1 = m_1\omega_1 + \ldots + m_{n-2}\omega_{n-2} + (2m_{n-1} + m_n)\omega_{n-1}$$

является старшим весом модуля M. Используя пункт 2б) доказательства, получаем ненулевые векторы v_r для

$$\begin{aligned} &4m_1 + \ldots + 4m_{n-2} + 6m_{n-1} + 3m_n < r \\ &\qquad \le \min(4m_1 + \ldots + 4m_{n-3} + 6m_{n-2} + 6m_{n-1} + 3m_n, p - 1), \end{aligned}$$

$r \equiv 3m_n \pmod 2$, удовлетворяющие условиям следствия 2, откуда следует, что

$$\begin{aligned} &\{k \in \mathbb{N} \mid 4m_1 + \ldots + 4m_{n-2} + 6m_{n-1} + 3m_n + 1 \le k \\ &\quad \le \min(4m_1 + \ldots + 4m_{n-3} + 6m_{n-2} + 6m_{n-1} + 3m_n + 1, p), k \\ &\qquad\qquad \equiv 3m_n + 1 \pmod 2\} \subset \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}). \end{aligned}$$

Рассуждая далее по индукции, находим блоки размерностей, больших $4m_1 + \ldots + 4m_{n-3} + 6m_{n-2} + 6m_{n-1} + 3m_n + 1$. Теорема доказана. □

Следствие 4. *В условиях теоремы* 1 *предположим, что* $m_i = m_j = 0$. *Тогда*

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k \le m(\omega), k \equiv m(\omega) \pmod 2\} \subset \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}),$$

т.е. у элемента $\phi(\mathtt{u})$ *есть все априори возможные размерности блоков Жордана одной четности.*

4. Малые блоки Жордана

Доказательство теоремы 2. Из [11, предложение 6] следует, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid s(\omega) \le k \le m(\omega), k \equiv m(\omega) \pmod 2\} \subset \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}).$$

Если $s(\omega) = 1$, то все доказано. При $s(\omega) > 1$ нужно найти блоки Жордана малых размерностей.

Предположим сначала, что $G = A_n(K)$, $n \ge 5$. Зафиксируем i и j из определения. Мы можем считать, что $j = i+1 < n$ (в противном случае мы переходим к дуальному модулю). Положим $H = H(i, i+1)$.

1) Пусть сначала m_i и $m_{i+1} \ne 0$ и оба четные, либо m_i четно, а m_{i+1} нечетно. Тогда, из минимальности $s(\omega)$ следует, что $m_{i+2} \ne 0$. Положим $v_1 = v^+$ и $v_2 = X_{-(i+2)}v^+$. Тогда веса $\mu_1 = \omega$, $\mu_2 = \omega - \omega_{i+2}$ удовлетворяют условиям следствия 3 при $\Pi = H$. Поскольку $\mu_1|H = m_i\omega_1 + m_{i+1}\omega_2$, $\mu_2|H = m_i\omega_1 + (m_{i+1}+1)\omega_2$ и $m_i + m_{i+1} + 3 \le p$, то из [10, лемма 3.1 (i)] следует, что модули W_{μ_1} и W_{μ_2} неприводимы. Согласно следствию 3 и теореме 3

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k \le 2m_1 + 2m_2 + 3, k \equiv 1 \pmod 2\} \subset \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}).$$

2) Предположим, что m_i и $m_{i+1} \ne 0$, m_i нечетно и m_{i+1} четно. Если $i > 1$, то рассуждаем, как в предыдущем случае, только вместо индекса $i+2$ возьмем $i-1$. Пусть $i = 1$. Отметим, что случай $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3$ с $m_2 + m_3 + 1 = p$ невозможен, так как тогда $s(\omega) = 1$ и $i = 3$. По лемме 10 существует примитивный относительно H вектор $v \in V_\omega^{\omega-\alpha_2-2\alpha_3}$. Пусть $\mu_1 = \omega|H = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ и $V = KHv$ – неразложимый модуль со старшим весом

$$\mu_2 = (\omega - \alpha_2 - 2\alpha_3)|H = (m_1+1)\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Согласно теореме Смита [14] H-модуль V_{μ_1} является прямым слагаемым в ограничении $V_\omega|H$. Используя лемму 4, теорему 3 и [10, лемма 3.1 (i)] получаем искомое.

3) Предположим, что m_i, $m_{i+1} \ne 0$, m_i и m_{i+1} оба нечетны. Если $i > 1$, то из минимальности $s(\omega)$ следует, что m_{i-1} и $m_{i+2} \ne 0$. Положим $v_1 = v^+$ и $v_2 = X_{-(i-1)}X_{-(i+2)}v^+$. Тогда веса $\mu_1 = \omega$ и $\mu_2 = \omega - \alpha_{i-1} - \alpha_{i+2}$ удовлетворяют условиям следствия 3 при $\Pi = H$. Поскольку $\mu_1|H = m_i\omega_1 + m_{i+1}\omega_2$, $\mu_2|H = (m_i+1)\omega_1 + (m_{i+1}+1)\omega_2$

и $m_i + m_{i+1} + 4 \le p$, то из [10, лемма 3.1 (i)] следует, что модули W_{μ_1} и W_{μ_2} неприводимы. Согласно следствию 3 и теореме 3

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k \le 2m_1 + 2m_2 + 4, k \equiv 1 \pmod 2\} \subset \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}).$$

4) Пусть $m_{i-1} \neq 0$, $m_i \neq 0$, $m_{i+1} = 0$. Положим $v_1 = v^+$ и $v_2 = X_{-(i-1)}v^+$. Тогда $\mu_1 = \omega$, $\mu_2 = \omega - \omega_{i-1}$ удовлетворяют условиям следствия 3 при $\Pi = H$. Поскольку $\mu_1|H = m_i\omega_1$, $\mu_2|H = (m_i+1)\omega_1$ и $m_i + m_{i+1} + 3 \le p$, то из [10, лемма 3.1 (i)] следует, что модули W_{μ_1} и W_{μ_2} неприводимы. Согласно следствию 3 и теореме 3

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k \le 2m_1 + 2m_2 + 3, k \equiv 1 \pmod 2\} \subset \mathtt{J}_\phi(\mathtt{u}).$$

5) Пусть $m_i = 0$, $m_{i+1} \neq 0$ и $m_{i+2} \neq 0$. Этот случай доказывается аналогично предыдущему, только $v_2 = X_{-(i+2)}v^+$.

6) Предположим, наконец, что $m_i \neq 0$, $m_{i-1} = m_{i+1} = 0$. Случай $\omega = m_i\omega_i$ невозможен, так как тогда $s(\omega) = 1$. Следовательно, существует $k \neq i$, для которого $m_k \neq 0$. Если $k < i$, то рассуждаем, как в случае 4), полагая $v_2 = X_{-(i-1)} \dots X_{-k}v^+$. Случай $k > i+1$ симметричен к случаю $k < i$ и доказывается аналогично.

Следовательно, для $G = A_n(K)$ теорема доказана.

Теперь пусть $G = B_n(K)$, $C_n(K)$ или $D_n(K)$, $n \ge 6$. В случае $G = D_n(K)$ мы можем считать, что пара $(i,j) \neq (n-2,n)$. Положим $\Pi = G(1,\dots,n-1)$ и $\omega' = \omega|\Pi$. Согласно теореме Смита [14] Π-модуль $V_{\omega'}$ является прямым слагаемым в ограничении $V_\omega|\Pi$. Используя лемму 4 и применяя уже доказанную часть теоремы для $V_{\omega'}$, получаем все искомые блоки Жордана малых размерностей.

Отметим, что при доказательстве теоремы мы воспользовались условием $s(\omega)+2 \le p$ только, когда коэффициенты m_i и m_{i+1} оба нечетные. В остальных случаях достаточно было, чтобы $s(\omega)+1 \le p$. $\square$

Литература

1. Н. Бурбаки, Группы и алгебры Ли, гл.VII–VIII. М., Мир (1978).
2. М. В. Величко, *О поведении корневых элементов в модулярных представлениях симплектических групп.* — Тр. ИМ НАН Беларуси **14**, No. 2 (2006), 28–34.
3. Д. П. Желобенко, *Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений.* — УМН **17**, No. 1 (1962), 27–120.
4. А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко, *Блочная структура унипотентных элементов из естественно вложенных подгрупп типа A_3 в специальных модулярных представлениях групп типа A_n.* — Доклады НАН Беларуси **51**, No. 6 (2007), 25–29.

5. А. А. Премет, *Веса инфинитезимально неприводимых представлений над полем простой характеристики.* — Матем. сборник **133**, No. 2 (1987), 167–183.
6. Р. Стейнберг, Лекции о группах Шевалле. М., Мир (1975).
7. И. Д. Супруненко, *Минимальные полиномы элементов порядка p в неприводимых представлениях групп Шевалле над полями характеристики p.* — Проблемы алгебры и логики. Труды Ин-та математики СО РАН. Новосибирск **30** (1996), 126–163.
8. J. C. Jantzen, Representations of Algebraic Groups, Second Edition. AMS, Providence, (2003).
9. A. A. Osinovskaya, Nilpotent elements in irreducible representations of simple Lie algebras of small rank. Minsk (1999), 31 p. (Preprint/ Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Belarus; No. 5(554)).
10. A. A. Osinovskaya, *Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1-subgroups.* — Commun. Algebra **31** (2003), 2357–2379.
11. A. A. Osinovskaya, I. D. Suprunenko, *On the Jordan block structure of images of some unipotent elements in modular irreducible representations of the classical algebraic groups.* — J. Algebra **273** (2004), 586–600.
12. A. A. Osinovskaya, *On the restrictions of modular irreducible representations of algebraic groups of type A_n to naturally embedded subgroups of type A_2.* — J. Group Theory **8** (2005), 43–92.
13. A. A. Osinovskaya, *The restrictions of representations of algebraic groups of types B_n and D_n to subgroups of type A_2.* — J. Algebra Applic. **4** (2005), 467–479.
14. S. Smith, *Irreducible modules and parabolic subgroups.* — J. Algebra **75** (1982), 286–289.
15. I. D. Suprunenko, *On Jordan blocks of elements of order p in irreducible representations of classical groups with p-large highest weights.* — J. Algebra **273** (1997), 589–627.
16. P. H. Tiep, A. E. Zalesskii, *Mod p reducibility of unramified representations of finite groups of Lie type.* — Proc. London Math. Soc. **84** (2002), 439–472.
17. M. V. Velichko, *On the behaviour of root elements in irreducible representations of simple algebraic groups.* — Тр. ИМ НАН Беларуси **13**, No. 2 (2005), 116–121.

Osinovskaya A. A. Regular unipotent elements from naturally embedded subgroups of rank 2 in modular representations of classical groups.

We study images of regular unipotent elements from naturally embedded subgroups of type A_2 and B_2 in irreducible modular representations of classical groups. For the images of such elements and representations with locally small highest weights one encounters Jordan block of all sizes of the same parity.

Институт математики НАН Беларуси Поступило 20 марта 2008 г.

E-mail: anna@ im.bas-net.by