L. Yu. Kolotilina, On bounding inverses to Nekrasov matrices in the infinity norm, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2013, Volume 419, 111–120

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 419, 2013 г.

**Л. Ю. Колотилина**

# ОЦЕНКИ БЕСКОНЕЧНОЙ НОРМЫ ОБРАТНЫХ К МАТРИЦАМ НЕКРАСОВА

## §1. Введение

В недавней работе Л. Цветкович и др. [5] были предложены две верхние оценки для бесконечной нормы $\|\cdot\|_\infty$ обратной к матрице Некрасова $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Эти оценки приводятся ниже в теореме 2.1.

В настоящей работе устанавливается новая верхняя оценка для бесконечной нормы обратной к матрице Некрасова, улучшающая одновременно обе оценки из статьи [5]. Заметим при этом, что новая оценка формулируется в терминах тех же величин, что и предшествующие ей оценки. При выводе предлагаемой оценки мы опирались на подход, использованный в [5], но с одним ключевым отличием.

В работе применяются следующие обозначения:
- $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$, где $n \in \mathbb{N}$.
- Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ через

$$r_i'(A) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1,\dots,n,$$

обозначаются ее усеченные абсолютные строчные суммы.
- $A = D - L - U$ – это стандартное расщепление матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ на ее диагональную $(D)$, строго нижнюю треугольную $(-L)$ и строго верхнюю треугольную $(-U)$ части.
- Для $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ через $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j,\\ -|a_{ij}|, & i \neq j,\end{cases}$$

обозначается ее $Z$-матрица сравнения.
- $e = [1,\dots,1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор.
- $I_n$ – единичная матрица порядка $n$.

*Ключевые слова*: матрица Некрасова, обратная матрица, бесконечная норма, верхняя оценка, оценка Вараха.

Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется матрицей Некрасова, если выполняются строгие неравенства

$$|a_{ii}| > h_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.1}$$

где величины $h_i(A)$ определены следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} h_1(A) &= r_1'(A), \\ h_i(A) &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} h_j(A) + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

В дальнейшем, мы будем обозначать класс матриц Некрасова символом $N$.

Напомним, что невырожденность матриц Некрасова была установлена Гудковым в работе [1]. Как указано в статье [4], в действительности, невырожденность матриц Некрасова вытекает уже из результатов Островского [7], который отдает честь открытия условий (1.1) Некрасову [2].

Заметим, что, как следует из определения, все диагональные элементы матриц Некрасова отличны от нуля.

В матричных терминах, как хорошо известно и почти очевидно, вектор $h(A) = (h_i(A))$ можно представить в виде

$$h(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e = |D|[I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e, \tag{1.2$'$}$$

так что условия (1.1) равносильны неравенству

$$|D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e < |D|e,$$

или, что равносильно, неравенству

$$(|D| - |L|)^{-1}|U|e = [I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e < e. \tag{1.3}$$

Таким образом, (1.1) – это, в действительности, условие строгого диагонального преобладания в $Z$-матрице

$$(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U|,$$

получаемой из матрицы сравнения $\mathcal{M}(A)$ ее умножением слева (левым переобуславливанием) на нижнюю треугольную матрицу $(|D|-|L|)^{-1}$.

Напомним, что характеризация матриц Некрасова в терминах неравенства (1.3) принадлежит Роберу [8], также показавшему, что класс

$N$ содержит класс матриц, обладающих строгим диагональным преобладанием, который будет обозначаться через $SDD$, а также, что сам класс $N$ содержится в классе невырожденных $H$-матриц.

Также уместно упомянуть, что если $A$ – матрица Некрасова, то для любой невырожденной диагональной матрицы $\Delta$ матрица $\Delta A$ также является матрицей Некрасова, т.е. класс $N$ замкнут относительно умножения слева на невырожденные диагональные матрицы.

## §2. Результаты

В работе [5] были установлены следующие оценки.

**Теорема 2.1.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – матрица Некрасова порядка $n \geqslant 2$. Тогда справедливы следующие верхние оценки:*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{\max\limits_{i\in\langle n\rangle}\{z_i(A)/|a_{ii}|\}}{1 - \max\limits_{i\in\langle n\rangle}\{h_i(A)/|a_{ii}|\}} \tag{2.1}$$

*и*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{\max\limits_{i\in\langle n\rangle}\{z_i(A)\}}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}| - h_i(A)\}}. \tag{2.2}$$

Здесь и далее, величины $z_i(A)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$z_1(A) = 1, \quad z_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} z_j(A) + 1, \quad i = 2, \dots, n. \tag{2.3}$$

Заметим, что, как легко видеть, в матричных терминах вектор $z(A) = (z_i(A))$ имеет вид

$$z(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1} e. \tag{2.3'}$$

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

**Теорема 2.2.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – матрица Некрасова порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}. \tag{2.4}$$

**Доказательство.** Поскольку матрица $A \in N$ является невырожденной $H$-матрицей, то, по теореме Островского (см. [6] или, напр., [3, Lemma 8.15]), мы имеем

$$|A^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(A)^{-1},$$

откуда следует, что

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty.$$

Итак, нам достаточно доказать, что

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}. \tag{2.5}$$

Чтобы установить (2.5), представим матрицу сравнения $\mathcal{M}(A)$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A) &= (|D| - |L|) - |U| \\ &= (|D| - |L|)[I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U|] \\ &= (|D| - |L|)\triangle \cdot \triangle^{-1} C, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\triangle = \operatorname{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$C = I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U| = (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A).$$

Из (2.6) следует, что

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \|[(|D| - |L|)\Delta]^{-1}\|_\infty \cdot \|C^{-1}\Delta\|_\infty. \tag{2.7}$$

Теперь определим диагональную матрицу $\Delta$ из условия

$$(|D| - |L|)\Delta e = e. \tag{2.8}$$

Тогда, очевидно,

$$\|[(|D| - |L|)\Delta]^{-1}\|_\infty = 1,$$

и из (2.7) мы выводим

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \|C^{-1}\Delta\|_\infty. \tag{2.9}$$

Как было отмечено во введении, тот факт, что $A$ – матрица Некрасова, в точности означает, что $C$ – $M$-матрица со строгим диагональным преобладанием. Отсюда вытекает, что $\Delta^{-1}C$ также является $M$-матрицей со строгим диагональным преобладанием. Поэтому, применяя классическую оценку Вараха [9]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}| - r_i'(A)\}},$$

справедливую для матриц со строгим диагональным преобладанием, к матрице $\Delta^{-1}C$, мы получаем

$$\|C^{-1}\Delta\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{(\Delta^{-1}Ce)_i} = \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\delta_i}{(Ce)_i}$$
$$= \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\delta_i}{1 - \frac{h_i(A)}{|a_{ii}|}} = \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\delta_i |a_{ii}|}{|a_{ii}| - h_i(A)}. \quad (2.10)$$

Остается заметить, что с учетом $(2,3')$ и (2.8) мы имеем

$$\delta_i |a_{ii}| = z_i(A), \quad i = 1, \ldots, n. \quad (2.11)$$

Сопоставляя соотношения (2.9) и (2.10) и учитывая (2.11), мы приходим к оценке (2.5). Теорема доказана. □

**Замечание.** Если в доказательстве теоремы 2.2 положить $\Delta = I_n$ или $\Delta = D$, то мы придем к оценкам (2.1) и (2.2) теоремы 2.1.

Следующая теорема утверждает, что оценка (2.4), по крайней мере, не хуже, чем оценки (2.1) и (2.2), и описывает случаи, в которых новая оценка совпадает с каждой из ранее предложенных оценок.

**Теорема 2.3.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрица Некрасова. Тогда*

$$\max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leqslant \frac{\max\limits_{i\in\langle n\rangle}\{z_i(A)/|a_{ii}|\}}{1 - \max\limits_{i\in\langle n\rangle}\{h_i(A)/|a_{ii}|\}} \quad (2.12)$$

*и*

$$\max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leqslant \frac{\max\limits_{i\in\langle n\rangle}\{z_i(A)\}}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}| - h_i(A)\}}. \quad (2.13)$$

*Кроме того, равенство в соотношении* (2.12) *имеет место тогда и только тогда, когда при некотором $k \in \langle n\rangle$ выполнены условия*

$$\max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}|} = \frac{z_k(A)}{|a_{kk}|} \quad (2.14)$$

*и*

$$\max_{i\in\langle n\rangle}\frac{h_i(A)}{|a_{ii}|}=\frac{h_k(A)}{|a_{kk}|}. \tag{2.15}$$

*Аналогично, равенство в* (2.13) *имеет место тогда и только тогда, когда при некотором* $k\in\langle n\rangle$ *выполнены условия*

$$\max_{i\in\langle n\rangle} z_i(A)=z_k(A) \tag{2.16}$$

*и*

$$\min_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}|-h_i(A)\}=|a_{kk}|-h_k(A). \tag{2.17}$$

**Доказательство.** Неравенство (2.13) очевидно. Неравенство (2.12) также становится очевидным, если воспользоваться соотношением

$$\max_{i\in\langle n\rangle}\frac{z_i(A)}{|a_{ii}|-h_i(A)}=\max_{i\in\langle n\rangle}\frac{z_i(A)/|a_{ii}|}{1-h_i(A)/|a_{ii}|}.$$

Рассмотрим случай равенства в (2.13). Пусть для матрицы $A\in N$ мы имеем

$$\max_{i\in\langle n\rangle}\frac{z_i(A)}{|a_{ii}|-h_i(A)}=\frac{\max\limits_{i\in\langle n\rangle} z_i(A)}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}|-h_i(A)\}}. \tag{2.18}$$

Будем считать, что

$$\max_{i\in\langle n\rangle}\frac{z_i(A)}{|a_{ii}|-h_i(A)}=\frac{z_k(A)}{|a_{kk}|-h_k(A)},\quad k\in\langle n\rangle. \tag{2.19}$$

Поскольку $|a_{kk}|-h_k(A)\geqslant\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\big\{|a_{ii}|-h_i(A)\big\}$, то из (2.18) и (2.19) следует, что

$$z_k(A)\geqslant\max_{i\in\langle n\rangle} z_i(A),$$

откуда и вытекает (2.16).

С другой стороны, поскольку

$$\frac{\max\limits_{i\in\langle n\rangle} z_i(A)}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}|-h_i(A)\}}\geqslant\frac{z_k(A)}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}|-h_i(A)\}},$$

то из соотношений (2.18) и (2.19) следует, что

$$\min_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}|-h_i(A)\}\geqslant|a_{kk}|-h_k(A),$$

и необходимость условия (2.17) установлена.

Обратно, если при некотором $k \in \langle n \rangle$ выполнены условия (2.16) и (2.17), то мы имеем

$$\frac{\max\limits_{i\in\langle n\rangle} z_i(A)}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}| - h_i(A)\}} = \frac{z_k(A)}{|a_{kk}| - h_k(A)}$$

$$\leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leqslant \frac{\max\limits_{i\in\langle n\rangle} z_i(A)}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}| - h_i(A)\}},$$

и (2.13) является равенством.

Случай, когда оценка (2.4) совпадает с оценкой (2.1), т.е. (2.12) является равенством, рассматривается аналогично. При этом вместо (2.18) нужно рассмотреть соотношение

$$\frac{\max\limits_{i\in\langle n\rangle}\{z_i(A)/|a_{ii}|\}}{1 - \max\limits_{i\in\langle n\rangle}\{h_i(A)/|a_{ii}|\}} = \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\{z_i(A)/|a_{ii}|\}}{1 - h_i(A)/|a_{ii}|}. \qquad \square$$

Заметим, что в работе [5] на численных примерах было продемонстрировано, что для матриц со строгим диагональным преобладанием обе оценки (2.1) и (2.2) не обязательно являются более точными, чем классическая верхняя оценка Вараха для бесконечной нормы обратной

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}| - r_i'(A)\}},$$

применимая только к $SDD$-матрицам, которую мы использовали при доказательстве теоремы 2.2.

В этой связи мы приводим следующую теорему, устанавливающую, что для $SDD$-матрицы $A$ новая оценка (2.4) всегда не хуже, чем оценка Вараха.

**Теорема 2.4.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрица со строгим диагональным преобладанием. Тогда*

$$\max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leqslant \frac{1}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}| - r_i'(A)\}}, \tag{2.20}$$

*причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\min_{i\in\langle n\rangle}\{\mathcal{M}(A)e\}_i = \min_{i\in\langle n\rangle} \frac{|a_{ii}| - h_i(A)}{z_i(A)}.$$

**Доказательство.** Введем обозначение $d = |D|e$. Тогда, в силу (1.2′) и (2.3′), мы имеем

$$\begin{aligned} d - h(A) &= |D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)e \\ &\geqslant \min_{i\in\langle n\rangle}(\mathcal{M}(A)e)_i |D|(|D| - |L|)^{-1}e = \min_{i\in\langle n\rangle}(\mathcal{M}(A)e)_i z(A). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь мы воспользовались теми фактами, что вектор $\mathcal{M}(A)e$ положителен, поскольку $A$ есть $SDD$-матрица, и что матрица $|D|(|D|-|L|)^{-1}$ неотрицательна.

Итак, в силу (2.21) мы имеем

$$\frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leqslant \frac{1}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}(\mathcal{M}(A)e)_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

что и доказывает неравенство (2.20).

Утверждение, касающееся случая равенства, очевидно. □

В завершение данной работы приведем результаты для численных примеров, рассмотренных в статье [5], дополнив их данными, полученными с помощью оценки теоремы 2.2.

Пусть

$$A_1 = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -0.2 & 2 \\ 7 & 88 & 2 & -3 \\ 2 & 0.5 & 13 & -2 \\ 0.5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -0.2 & 3.3 \\ 7 & 13 & 2 & -3 \\ -1.3 & 6.7 & 13 & -2 \\ 0.5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 21 & -9.1 & -4.2 & -2.1 \\ -0.7 & 9.1 & -4.2 & -2.1 \\ -0.7 & -0.7 & 4.9 & -2.1 \\ -0.7 & -0.7 & -0.7 & 2.8 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0.2 & 2 \\ 1 & 21 & 1 & -3 \\ 2 & 0.5 & 6.4 & -2 \\ 0.5 & -1 & 1 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -1 & 11 & -8 \\ -7 & -3 & 10 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 8 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -9 & 16 & -5 & -5 \\ -6 & -4 & 15 & -3 \\ -4.9 & -0.9 & -0.9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Точные значения $\|A_i^{-1}\|_\infty$, $i = 1, \dots, 6$, и их верхние оценки представлены в таблице 1. Подчеркнем, что все данные, за исключением оценок (2.4), указанных в последнем столбце, заимствованы из работы [5].

| Матрица | Класс | $\|A^{-1}\|_\infty$ | Оценка Вараха | (2.1) | (2.2) | (2.4) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $SDD$ | 0.1921 | 0.6667 | 0.3805 | 0.5263 | 0.2632 |
| $A_2$ | $SDD$ | 0.2390 | 1 | 0.8848 | 0.6885 | 0.5365 |
| $A_3$ | $SDD$ | 0.8759 | 1.4286 | 1.8076 | 0.9676 | 0.9676 |
| $A_4$ | $SDD$ | 0.2707 | 0.5556 | 0.6200 | 0.7937 | 0.5556 |
| $A_5$ | $N$ | 1.1519 | - | 1.4909 | 2.4848 | 1.4138 |
| $A_6$ | $N$ | 0.4474 | - | 1.1557 | 0.5702 | 0.4928 |

Заметим, что, в соответствии с теоремами 2.3 и 2.4, новая оценка (2.4) либо превосходит как обе оценки (2.1) и (2.2) (для случая $N$-матриц), так и оценку Вараха (для $SDD$-матриц), либо, в худшем случае, совпадает с ними (для $SDD$-матрицы $A_3$ оценка (2.4) совпадает с оценкой (2.2), а для $SDD$-матрицы $A_4$ оценка (2.4) совпадает с оценкой Вараха).

## Литература


1. В. В. Гудков, *Об одном признаке неособенности матриц.* — Латвийский математический ежегодник, Рига (1966), 385–390.
2. Р. Мемке, П. А. Некрасовъ, *Решенiе линейной системы уравненiй посредствомъ последовательныхъ приближенiй.* — Матем. сб. **16** (1892), 437–459.
3. O. Axelsson, *Iterative Solution Methods.* Cambridge University Press, 1996.
4. D. W. Bailey, D. E. Crabtree, *Bounds on determinants.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 303–309.
5. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T. Li. *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
6. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
7. A. Ostrowski, *Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen.* — Comment. Math. Helv. **30** (1956), 175–210.
8. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
9. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.



Kolotilina L. Yu. On bounding inverses to Nekrasov matrices in the infinity norm.

A new upper bound on the infinity norm of the inverse to a Nekrasov matrix, improving two recent bounds by L. Cvetković et al. [L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, and Y.-T. Li, Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices, *Appl. Math. Comput.*, **219**, 5020–5024 (2013)], is obtained. Also it is shown that for a strictly diagonally dominant matrix, the bound suggested improves the classical Varah upper bound.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: lilikona@mail.ru

Поступило 11 февраля 2013 г.