



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

K. M. Èminyan, Additive problems in positive integers with binary expansions of a special type,
Chebyshevskii Sb., 2011, Volume 12, Issue 1, 178–185

<https://www.mathnet.ru/eng/cheb69>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

April 20, 2025, 23:20:49



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Посвящается 65-ой годовщине со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина

Том 12 Выпуск 1 (2011)

УДК 511

АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ В НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ С ДВОИЧНЫМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

К. М. Эминян (г. Москва)
E-mail: eminyan@mail.ru

*Посвящаю памяти незабвенного
Сергея Михайловича Воронина*

1 Введение

Пусть $n = e_0 + e_1 2 + \dots + e_k 2^k$ – представление натурального числа n в виде двоичной системе счисление ($e_j = 0, 1$). Пусть \mathbb{N}_0 – множество натуральных чисел, чьи двоичные разложения имеют четное число 1, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$. Пусть

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in \mathbb{N}_0; \\ -1, & \text{если } n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

В 1968 году А.О. Гельфонд [1] доказал, что числа классов \mathbb{N}_0 и \mathbb{N}_1 регулярно распределены в арифметических прогрессиях. Более того, А.О. Гельфонд получил для любого вещественного α оценку

$$\sum_{n \leq X} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} \ll X^\lambda,$$

где $\lambda = \frac{\ln 3}{\ln 4} = 0,79\dots$

Эту оценку мы в дальнейшем будем называть оценкой Гельфонда.

В 1991 году автор решил задачу, поставленную перед ним С.М. Ворониным, и получил [2] асимптотическую формулу для суммы

$$\sum_{n \leq x, n \in \mathbb{N}_0} \tau(n).$$

В 1996 году автор доказал следующую теорему. Пусть $F_{j,k}(X)$ — число решений уравнений $n - m = 1$ в натуральных числах $n \leq X$, $n \in \mathbb{N}_j$, $m \in \mathbb{N}_k$, $j, k = 0, 1$.

Тогда справедливы асимптотические формулы

$$F_{0,0}(X) = \frac{X}{6} + O(\log X), \quad F_{1,1}(X) = \frac{X}{6} + O(\log X),$$

$$F_{0,1}(X) = \frac{X}{3} + O(\log X), \quad F_{1,0}(X) = \frac{X}{3} + O(\log X).$$

Отсюда следует, что главные члены определяются значениями j и k .

В настоящей статье рассматриваются две задачи, в которых указанный эффект отсутствует.

Сформулируем основные теоремы статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть h — целое число такое, что $0 \leq h \leq 2$. Пусть $I_{j,k}(X, h)$ — число решений уравнения $n - 3t = h$ в натуральных числах $n \leq X$, $n \in \mathbb{N}_j$, $t \in \mathbb{N}_k$, где j, k — произвольные целые числа из отрезка $[0, 1]$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$I_{j,k}(X, h) = \frac{X}{4} + O(X^\lambda), \quad \lambda = 0, 79 \dots$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть l — целое число такое, что $0 \leq l \leq 4$. Пусть $J_{j,k}(X)$ — число решений уравнения $n - 5t = l$ в натуральных числах $n \leq X$, $n \in \mathbb{N}_j$, $t \in \mathbb{N}_k$, где j, k — произвольные целые числа из отрезка $[0, 1]$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$J_{j,k}(X) = \frac{X}{4} + O(X^\lambda), \quad \lambda = 0, 79 \dots$$

Определим суммы

$$S_3(X, h) = \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) \varepsilon(3n + h), \quad S_5(X, l) = \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) \varepsilon(5n + l),$$

где h и l — неотрицательные целые числа.

Доказательства теорем 1 и 2 основаны соответственно на леммах 1 и 2 (см. ниже), а также на оценке Гельфонда.

2 Леммы

ЛЕММА 1. Пусть h — целое число такое, что $0 \leq h \leq 2$. Тогда справедлива оценка

$$S_3(X, h) = O(\sqrt{X}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группируя слагаемые, отвечающие четным и нечетным n соответственно и пользуясь очевидными равенствами $\varepsilon(2n) = \varepsilon(n)$, $\varepsilon(2n+1) = -\varepsilon(n)$, приходим к следующим соотношениям

$$S_3(X, 0) = S_3\left(\frac{X}{2}, 0\right) + S_3\left(\frac{X}{2}, 1\right) + O(1), \quad (1)$$

$$S_3(X, 1) = -S_3\left(\frac{X}{2}, 0\right) - S_3\left(\frac{X}{2}, 2\right) + O(1), \quad (2)$$

$$S_3(X, 2) = S_3\left(\frac{X}{2}, 1\right) + S_3\left(\frac{X}{2}, 2\right) + O(1), \quad (3)$$

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_0 S_3(X, 0) + \beta_0 S_3(X, 1) + \gamma_0 S_3(X, 2),$$

где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ — константы, которые будут выбраны позже.

Пользуясь (1) – (3), имеем

$$\begin{aligned} \alpha_0 S_3(X, 0) + \beta_0 S_3(X, 1) + \gamma_0 S_3(X, 2) &= \\ &= \alpha_0 \left(S_3\left(\frac{X}{2}, 0\right) + S_3\left(\frac{X}{2}, 1\right) \right) + \beta_0 \left(-S_3\left(\frac{X}{2}, 0\right) - S_3\left(\frac{X}{2}, 2\right) \right) + \\ &+ \gamma_0 \left(S_3\left(\frac{X}{2}, 1\right) + S_3\left(\frac{X}{2}, 2\right) \right) + O(|\alpha_0|) + O(|\beta_0|) + O(|\gamma_0|) = \\ &= \alpha_1 S_3\left(\frac{X}{2}, 0\right) + \beta_1 S_3\left(\frac{X}{2}, 1\right) + \gamma_1 S_3\left(\frac{X}{2}, 2\right) + \\ &+ O(|\alpha_0|) + O(|\beta_0|) + O(|\gamma_0|), \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_0 - \beta_0, \\ \beta_1 = \alpha_0 + \gamma_0, \\ \gamma_1 = \gamma_0 - \beta_0. \end{cases}$$

Повторяя это рассуждение, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \alpha_0 S_3(X, 0) + \beta_0 S_3(X, 1) + \gamma_0 S_3(X, 2) &= \alpha_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 0\right) + \beta_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 1\right) + \\ &+ \gamma_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 2\right) + O(|\alpha_0| + \dots + |\alpha_{j-1}|) + \\ &+ O(|\beta_0| + \dots + |\beta_{j-1}|) + O(|\gamma_0| + \dots + |\gamma_{j-1}|), \end{aligned}$$

в котором последовательности $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} \alpha_{j+1} = \alpha_j - \beta_j, \\ \beta_{j+1} = \alpha_j + \gamma_j, \\ \gamma_{j+1} = \gamma_j - \beta_j, \end{cases} \quad (4)$$

для любого $j, 0 \leq j \leq \log_2 X - 10$.

Запишем равенства (4) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_{j+1} \\ \beta_{j+1} \\ \gamma_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{pmatrix} = A^j \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix},$$

где $1 \leq j \leq \log_2 X - 10$.

Вычислим A^j . Для этого найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A и получим равенство $A = CVC^{-1}$, где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{7}}{2} & \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}, \lambda_3 = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$

Из этого равенства следует, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{pmatrix} = CV^jC^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{2}$, имеем неравенства

$$|\alpha_j| = O(2^{j/2}), |\beta_j| = O(2^{j/2}), |\gamma_j| = O(2^{j/2}),$$

где постоянные в знаках O — абсолютные.

Выберем J наименьшим натуральным числом таким, что

$$2^J < \frac{1}{10}X.$$

Пусть, например,

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

тогда

$$S_3(X, 0) = \alpha_J S_3\left(\frac{X}{2^J}, 0\right) + \beta_J S_3\left(\frac{X}{2^J}, 1\right) + \gamma_J S_3\left(\frac{X}{2^J}, 2\right) + O(\sqrt{2}^J).$$

Теперь, оценивая суммы

$$S_3\left(\frac{X}{2^J}, 0\right), S_3\left(\frac{X}{2^J}, 1\right), S_3\left(\frac{X}{2^J}, 2\right)$$

тривиально и пользуясь тем, что

$$|\alpha_J| + |\beta_J| + |\gamma_J| = O(\sqrt{2}^J) = O(\sqrt{X}),$$

получим оценку

$$S_3(X, 0) = O(\sqrt{X}).$$

Аналогично получаем, что

$$S_3(X, 1) = O(\sqrt{X}), S_3(X, 2) = O(\sqrt{X}).$$

□

ЛЕММА 2. Пусть l — целое число такое, что $0 \leq l \leq 4$. Тогда справедлива оценка

$$S_5(X, l) = O(X^\mu),$$

где $\mu = 0,605\dots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_0 S_3(X, 0) + \beta_0 S_3(X, 1) + \gamma_0 S_3(X, 2) + \delta_0 S_3(X, 3) + \varepsilon_0 S_3(X, 4),$$

где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \varepsilon_0$ — постоянные, которые будут выбраны позже.

Подобно тому, как это сделано в доказательстве леммы 1, получаем, что

$$\begin{aligned} & \alpha_0 S_3(X, 0) + \beta_0 S_3(X, 1) + \gamma_0 S_3(X, 2) + \delta_0 S_3(X, 3) + \\ & + \varepsilon_0 S_3(X, 4) = \alpha_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 0\right) + \beta_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 1\right) + \gamma_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 2\right) + \\ & + \delta_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 3\right) + \varepsilon_j S_3\left(\frac{X}{2^j}, 4\right) + \\ & + O\left(\sum_{k=0}^{j-1} (|\alpha_k| + |\beta_k| + |\gamma_k| + |\delta_k| + |\varepsilon_k|)\right), \quad (5) \end{aligned}$$

где $1 \leq j \leq \log_2 X - 10$; последовательности $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \varepsilon_j$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \alpha_{j+1} = \alpha_j - \beta_j, \\ \beta_{j+1} = \gamma_j - \delta_j, \\ \gamma_{j+1} = \alpha_j + \varepsilon_j, \\ \delta_{j+1} = \gamma_j - \beta_j, \\ \varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j - \delta_j, \end{cases}$$

$1 \leq j \leq \log_2 X - 10$.

Запишем их в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{j+1} \\ \beta_{j+1} \\ \gamma_{j+1} \\ \delta_{j+1} \\ \varepsilon_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \\ \delta_j \\ \varepsilon_j \end{pmatrix}.$$

Компьютерные вычисления показывают, что собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 &= -\frac{(27 + 3\sqrt{78})^{2/3} + 3}{3(27 + 3\sqrt{78})^{1/3}}, \\ \lambda_4 &= -\frac{-(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{2/3} - 3 + \sqrt{3}(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{2/3}i - 3\sqrt{3}i}{6(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{1/3}}, \\ \lambda_5 &= \frac{(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{2/3} + 3 + \sqrt{3}(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{2/3}i - 3\sqrt{3}i}{6(27 + 3\sqrt{3}\sqrt{26})^{1/3}}. \end{aligned}$$

Заметим, что с точностью до пропорциональности существует лишь один собственный вектор, отвечающий собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Воспользуемся известной теоремой о том, что существует базис, в котором A имеет нормальную жорданову форму (см., например, [4]).

В нашем случае существует матрица C : $A = CBC^{-1}$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \\ \delta_j \\ \varepsilon_j \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}^j C^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы C , C^{-1} не зависят от j . Поэтому, если в столбце

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

положить один из элементов равные 1, а остальные нулю, то в столбце

$$CB^jC^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

все элементы оцениваются как $O(j + |\lambda_3|^j + |\lambda_4|^j + |\lambda_5|^j)$.

Так как $|\lambda_3| = 1.521379707\dots$, $|\lambda_4| = |\lambda_5| < |\lambda_3|$ то $|\alpha_j|$, $|\beta_j|$, $|\gamma_j|$, $|\delta_j|$, $|\varepsilon_j| = O(|\lambda_3|^j)$.

Полагая в равенстве (5) $j = J = [\log_2 X] - 10$, получаем, что для любого $0 \leq k \leq 4$ справедливы неравенства

$$|S_5(X, l)| = O(X^\mu),$$

где $\mu = \frac{\ln |\lambda_3|}{\ln 2} = 0.605\dots$

□

3 Доказательства теорем 1 и 2

Докажем теорему 1. Для любого целого h , $0 \leq h \leq 2$, и для любых j , $k = 0, 1$ имеем

$$\begin{aligned} I_{j,k}(X, h) &= \sum_{n \leq X} \left(\frac{1 + (-1)^j \varepsilon(n)}{2} \right) \left(\frac{1 + (-1)^k \varepsilon(3n + h)}{2} \right) = \\ &= \frac{X}{4} + \frac{(-1)^j}{4} \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) + \frac{(-1)^k}{4} \sum_{n \leq X} \varepsilon(3n + h) + \frac{(-1)^{j+k}}{4} S_3(X, h) + O(1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{X}{4} + \frac{(-1)^j}{4} \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) + \frac{(-1)^k}{4} \sum_{c=1}^3 e^{-\frac{2\pi ich}{3}} \sum_{n \leq 3X+h} \varepsilon(n) e^{\frac{2\pi icn}{3}} + \\
&\quad + \frac{(-1)^{j+k}}{4} S_3(X, h) + O(1).
\end{aligned}$$

Теперь теорема 1 сразу следует из очевидного равенства

$$\sum_{n \leq X} \varepsilon(n) = O(1),$$

неравенства Гельфонда и леммы 1. Любопытно отметить, что, поскольку оценка Гельфонда при $\alpha = 1/3$ неулучшаема, оценка остаточного члена в теореме 1 неулучшаема.

Доказательство теоремы 2 по существу совпадает с доказательством теоремы 1. Единственное различие — использование леммы 2 вместо леммы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gelfond A.O., «Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données». *Acta Arith.*, 13 (1968), 259–265.
- [2] Эминян К.М., «О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 55:3 (1991), 680–686.
- [3] Эминян К.М., «Об одной бинарной задаче», *Мат. заметки.*, 60:4 (1996), 634–637.
- [4] Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.

Финансовый Университет при Правительстве РФ.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана.

Поступило 15.08.2011