A. Yu. Vorob'ev, Homogenization of the Poisson Equation in a Perforated Domain with the Signorini Condition and the Third Boundary Condition on the Cavity Boundaries,
Differ. Uravn., 2004, Volume 40, Number 3, 368–379

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 3, с. 368–379

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ОБ УСРЕДНЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ С УСЛОВИЕМ СИНЬОРИНИ И ТРЕТЬИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НА ГРАНИЦЕ ПОЛОСТЕЙ

© 2004 г. А. Ю. Воробьёв

Изучению задач усреднения в периодически перфорированных областях посвящено много работ и монографий (см., например, [1–4]). В предлагаемой работе изучается задача усреднения вариационного неравенства в периодически перфорированной области, имеющей две полости различного масштаба в ячейке периодичности. На границе одной из этих полостей задано смешанное краевое условие, а на границе другой – условие Синьорини, причем полости со смешанными краевыми условиями имеют так называемый, "критический" размер. Получена предельная вариационная задача и доказана теорема о сходимости решения u_ε исходной задачи к решению усредненной задачи при $\varepsilon \to 0$.

Пусть Ω – ограниченная область в R^n, $n \geq 3$, звездная относительно некоторого шара, с границей $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ (рис. 1). Пусть $Q = \{x \in R^n : \ 0 < x_j < 1, \ j = \overline{1,n}\}$ – единичный куб в R^n; G_1, G_2 – открытые множества в Q, диффеоморфные шару, $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$, $\overline{G_i} \subset Q$, $i = 1, 2$; a_ε – параметр, зависящий от ε. Предположим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{-n} = C_0 = \text{const} > 0. \tag{1}$$

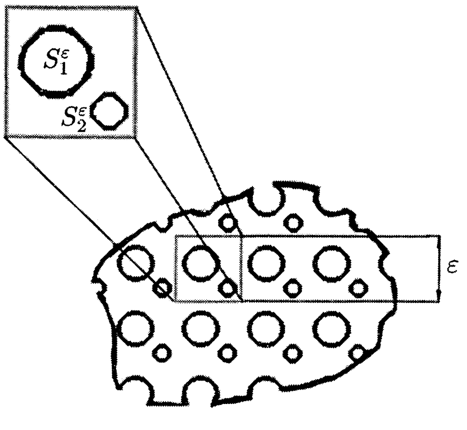

Рис. 1. Область Ω_ε.

Обозначим

$$S_1^\varepsilon = \sum_{z\in Z}(\partial\varepsilon G_1 + z\varepsilon) \cap \Omega, \quad S_2^\varepsilon = \sum_{z\in Z}(\partial a_\varepsilon G_2 + z\varepsilon) \cap \Omega,$$

где Z – множество n-мерных векторов z с целочисленными координатами; $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_1^\varepsilon \cup S_2^\varepsilon)$. Положим $Y_\varepsilon = \varepsilon Q \setminus (\overline{\varepsilon G_1} \cup \overline{a_\varepsilon G_2})$, $\omega_\varepsilon = \sum_{z\in Z}(Y_\varepsilon + z\varepsilon)$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \omega_\varepsilon = (\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} Y_\varepsilon^j) \cap \Omega$, где через Y_ε^j обозначена j-я ячейка вида $Y_\varepsilon + z\varepsilon$, имеющая непустое пересечение с Ω; $N(\varepsilon) = d\varepsilon^{-n}$, $d = \text{const} > 0$.

В области Ω_ε рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered} -\Delta u_\varepsilon = f \ \text{ в } \ \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon \leq 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu^S} \leq 0, \quad u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu^S} = 0 \ \text{ на } \ S_1^\varepsilon \ \text{ п.в.}, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu^M} + bu_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ S_2^\varepsilon \ \text{ п.в.}, \quad u_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_\varepsilon. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $b = \text{const} \geq 0$; $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$; ν^S, ν^M – единичные векторы внешней нормали к S_1^ε и S_2^ε соответственно. Через $H_1(\omega, \gamma)$ обозначим пространство функций $u \in H_1(\omega)$ с нулевым следом на γ. Пусть $K_\varepsilon = \{u \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) : \ u \leq 0 \text{ п.в. на } S_1^\varepsilon\}$.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (2) называется функция $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, удовлетворяющая неравенству

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla(v - u_\varepsilon)\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} u_\varepsilon(v - u_\varepsilon)\,dS_x \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(v - u_\varepsilon)\,dx \tag{3}$$

для произвольной функции $v \in K_\varepsilon$; $\nabla u \nabla v \equiv \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$.

Нахождение обобщенного решения задачи (2) эквивалентно решению задачи на минимум:

$$u_\varepsilon \in K_\varepsilon, \quad I_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v\in K_\varepsilon} I_\varepsilon(v), \quad \text{где} \quad I_\varepsilon(v) \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^2\,dx - 2\int\limits_{\Omega_\varepsilon} fv\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} v^2\,dS_x.$$

Принимая во внимание, что K_ε – замкнутое выпуклое множество, $I_\varepsilon(v)$ – строго выпуклый коэрцитивный функционал на K_ε, приходим к тому, что задача (2) имеет единственное обобщенное решение $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ (см. [5, гл. 2, § 1]).

Положив в определении 1 $v = u_\varepsilon + g$, где g – произвольная функция из K_ε, получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla g\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} u_\varepsilon g\,dS_x \ge \int\limits_{\Omega_\varepsilon} fg\,dx. \tag{4}$$

Полагая в неравенстве (3) $v = 2u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} u_\varepsilon^2\,dS_x \ge \int\limits_{\Omega_\varepsilon} fu_\varepsilon\,dx. \tag{5}$$

И наконец, при $v = 0 \in K_\varepsilon$ неравенство (3) примет вид

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} u_\varepsilon^2\,dS_x \le \int\limits_{\Omega_\varepsilon} fu_\varepsilon\,dx. \tag{6}$$

Из (5), (6) вытекает равенство

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} u_\varepsilon^2\,dS_x = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} fu_\varepsilon\,dx. \tag{7}$$

Заметим, что, вычитая (7) из (4), мы получим определение 1. Итак, мы пришли к эквивалентному определению обобщенного решения задачи (2).

Определение 2. Обобщенным решением задачи (2) называется функция $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, удовлетворяющая соотношениям (4), (7).

Изучим асимптотическое поведение решения задачи (2) при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{gathered} -\Delta w_\varepsilon = f \ \text{ в } \ \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu^S} + w_\varepsilon \Theta(w_\varepsilon) = 0 \ \text{ на } \ S_1^\varepsilon, \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu^M} + bw_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ S_2^\varepsilon, \quad w_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_\varepsilon, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\Theta(\tau)$ – функция Хевисайда, т.е. $\Theta(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ и $\Theta(\tau) = 1$ при $\tau \ge 0$.

Введем обозначения $h^+(x) = \sup(h(x), 0)$, $h^-(x) = \inf(h(x), 0)$, где $h(x) \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$. Заметим, что $h^+(x), h^-(x) \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$, $h(x) = h^+(x) + h^-(x)$, $h^+(x)h^-(x) = 0$, $h(x)h^+(x) = |h^+(x)|^2$.

Обобщенным решением задачи (8) будем называть функцию $w_\varepsilon \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon \nabla \phi\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon \phi\,dS_x + \int\limits_{S_1^\varepsilon} w_\varepsilon^+ \phi\,dS_x = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\phi\,dx \tag{9}$$

для любой функции $\phi \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$.

Полагая в интегральном тождестве (9) $\phi = w_\varepsilon^+$, получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon^+|^2\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} |w_\varepsilon^+|^2\,dS_x + \int\limits_{S_1^\varepsilon} |w_\varepsilon^+|^2\,dS_x = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f w_\varepsilon^+\,dx. \tag{10}$$

Найдем оценки для w_ε^+. Из (10) следует, что $\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon^+|^2\,dx \le \int_{\Omega_\varepsilon} f w_\varepsilon^+\,dx$. Применяя неравенства Коши–Буняковского и Фридрихса (см. [1, теорема 4.5]), приходим к оценкам

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon^+|^2\,dx \le K_1, \quad \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |w_\varepsilon^+|^2\,dx \le K_2. \tag{11}$$

Здесь и далее константы K_i не зависят от ε. Кроме этого, из (10) выводим оценки

$$\int\limits_{S_2^\varepsilon} |w_\varepsilon^+|^2\,dS_x \le K_3, \quad \int\limits_{S_1^\varepsilon} |w_\varepsilon^+|^2\,dS_x \le K_4. \tag{12}$$

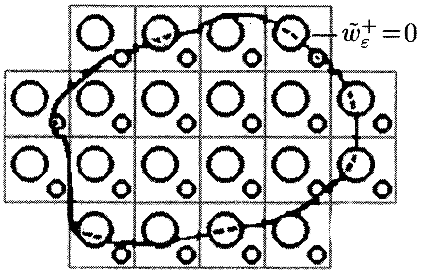

Рис. 2. Продолжение функции w_ε^+.

Покажем, что $\|w_\varepsilon^+\|_{H_1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Продолжим w_ε^+ нулем вне Ω_ε на ячейки, имеющие непустое пересечение с $\partial\Omega$ (рис. 2). Полученную функцию обозначим $\tilde{w}_\varepsilon^+$. Далее продолжим $\tilde{w}_\varepsilon^+$ на $\sum_{z\in Z}(a_\varepsilon G_2 + \varepsilon z) \cap \Omega$ так, чтобы для продолжения, которое мы обозначим $\hat{w}_\varepsilon^+$, выполнялись соотношения $\|\hat{w}_\varepsilon^+\|_{H_1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)} \le \|\tilde{w}_\varepsilon^+\|_{H_1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)}$, $\|\nabla\hat{w}_\varepsilon^+\|_{H_1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)} \le \|\nabla\tilde{w}_\varepsilon^+\|_{H_1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)}$. Такое продолжение существует, согласно результатам из работ [2, 3]. Положим $\tilde{Y}_\varepsilon = \varepsilon Q \backslash \varepsilon G_1$. Обозначим через $\tilde{Y}_\varepsilon^j$ пронумерованную ячейку из множества $\sum_{z\in Z}(\tilde{Y}_\varepsilon + \varepsilon z)$, имеющую непустое пересечение с Ω, $j = \overline{1, N_1(\varepsilon)}$, $N_1(\varepsilon) = K_5\varepsilon^{-n}$.

Для продолженных функций справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |w_\varepsilon^+|^2\,dx = \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{Y_\varepsilon^j} |\tilde{w}_\varepsilon^+|^2\,dx \le K_6 \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\tilde{Y}_\varepsilon^j} |\hat{w}_\varepsilon^+|^2\,dx. \tag{13}$$

Из неравенства (13) и теоремы вложения имеем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |w_\varepsilon^+|^2\,dx \le \varepsilon^n \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon^{-1}\tilde{Y}_\varepsilon^j} |\hat{w}_\varepsilon^+|^2\,dy \le \varepsilon^n \Bigg(\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon^{-1}\tilde{Y}_\varepsilon^j} |\nabla_y \hat{w}_\varepsilon^+|^2\,dy + \int\limits_{\varepsilon^{-1}S_1^\varepsilon} |\hat{w}_\varepsilon^+|^2\,dS_y \Bigg),$$

где $y = \varepsilon^{-1}x$. Переходя обратно к переменным $x = \varepsilon y$ в правой части последнего неравенства и применяя (10), (11), приходим к оценке

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |w_\varepsilon^+|^2\,dx \le K_7\varepsilon^n \Bigg(\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \varepsilon^{-n}\varepsilon^2 \int\limits_{\tilde{Y}_\varepsilon^j} |\nabla\hat{w}_\varepsilon^+|^2\,dx + \varepsilon^{1-n} \int\limits_{S_1^\varepsilon} |\hat{w}_\varepsilon^+|^2\,dS_x \Bigg) =$$

$$= K_7 \Bigg(\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\hat{w}_\varepsilon^+|^2\,dx + \varepsilon \int\limits_{S_1^\varepsilon} |\hat{w}_\varepsilon^+|^2\,dS_x \Bigg) \le K_8\varepsilon.$$

Отсюда и из равенства (10) выводим оценки

$$\|w_\varepsilon^+\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le K_9\sqrt{\varepsilon}, \quad \|\nabla w_\varepsilon^+\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le K_{10}\sqrt{\varepsilon}, \tag{14}$$

из которых следует, что $\|w_\varepsilon^+\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Докажем, что $\|w_\varepsilon^- - u_\varepsilon\|_{H_1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого, полагая $v = w_\varepsilon^- \in K_\varepsilon$ в неравенстве (3) и $\phi = w_\varepsilon^- - u_\varepsilon \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ в интегральном тождестве (9), а затем вычитая из первого из полученных соотношений второе, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u_\varepsilon - w_\varepsilon)\nabla(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon}(u_\varepsilon - w_\varepsilon)(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)\,dS_x + \int\limits_{S_1^\varepsilon} w_\varepsilon^+ u_\varepsilon\,dS_x \ge 0. \tag{15}$$

Заметим, что $\int_{S_1^\varepsilon} w_\varepsilon^+ u_\varepsilon\,dS_x \le 0$, следовательно, из (15) вытекает

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla(w_\varepsilon - u_\varepsilon)\nabla(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon}(w_\varepsilon - u_\varepsilon)(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)\,dS_x \le 0. \tag{16}$$

Учитывая, что $w_\varepsilon = w_\varepsilon^- + w_\varepsilon^+$, из (16) получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)|^2\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon}|w_\varepsilon^- - u_\varepsilon|^2\,dS_x + \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla w_\varepsilon^+\nabla(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon^+(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)\,dS_x \le 0,$$

поэтому

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)|^2\,dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla w_\varepsilon^+\nabla(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon^+(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)\,dS_x \le 0. \tag{17}$$

Из неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\left|\int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon^+(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)\,dS_x\right| = \left|\int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon^+ u_\varepsilon\,dS_x\right| \le \|w_\varepsilon^+\|_{L_2(S_2^\varepsilon)}\|u_\varepsilon\|_{L_2(S_2^\varepsilon)}, \tag{18}$$

$$\left|\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon^+\nabla(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)\,dx\right| \le \|\nabla w_\varepsilon^+\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\|w_\varepsilon^- - u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}. \tag{19}$$

Из соотношения (4) следует ограниченность $\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$, $\|u_\varepsilon\|_{L_2(S_2^\varepsilon)}$. Из оценок (14), равенства (10) и неравенств (17)–(19) выводим оценку

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(w_\varepsilon^- - u_\varepsilon)|^2\,dx \le K_{11}\sqrt{\varepsilon}. \tag{20}$$

В дальнейшем нам понадобятся две леммы, доказанные в [2].

Лемма 1. *Пусть* $g \in H_1(\tilde{Y}_\varepsilon)$ *и* $\langle g\rangle_{\tilde{Y}_\varepsilon} = 0$, *тогда*

$$\|g\|_{L_2(\tilde{Y}_\varepsilon)} \le K_{12}\varepsilon\|\nabla g\|_{L_2(\tilde{Y}_\varepsilon)}. \tag{21}$$

Лемма 2. *Если* $g \in H_1(\tilde{Y}_\varepsilon)$, $n \ge 3$, *то имеет место оценка*

$$\|g\|^2_{L_2(a_\varepsilon\partial G_2)} \le K_{13}\{a_\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{-n}\|g\|^2_{L_2(\tilde{Y}_\varepsilon)} + a_\varepsilon\|\nabla g\|^2_{L_2(\tilde{Y}_\varepsilon)}\}. \tag{22}$$

Положим $\langle u\rangle_\omega = |\omega|^{-1}\int_\omega u\,dx$, где $|\omega|$ – мера Лебега множества ω. Введем 1-периодические по $y=\varepsilon^{-1}x$ функции $N_j^\varepsilon(y)$, $N_j(y)$ как решения краевых задач:

$$\Delta N_j^\varepsilon = 0 \ \text{ в } \ \check{Y}_\varepsilon = Q\setminus(\overline{G_1}\cup\overline{a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_2});$$
$$\frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial\nu^S} = -\nu_j^S \ \text{ на } \ \partial G_1,\quad \frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial\nu^M} = -\nu_j^M \ \text{ на } \ \partial a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_2,\quad \langle N_j^\varepsilon\rangle_{\check{Y}_\varepsilon} = 0 \tag{23}$$

и

$$\Delta N_j = 0 \ \text{ в } \ Q\setminus\overline{G_1},\quad \frac{\partial N_j}{\partial\nu^S} = -\nu_j^S \ \text{ на } \ \partial G_1,\quad \langle N_j\rangle_{Q\setminus\overline{G_1}} = 0. \tag{24}$$

Кроме этого, определим коэффициенты h_{ij}^ε и h_{ij} соответственно формулами

$$h_{ij}^\varepsilon = \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial y_i}\right\rangle_{\check{Y}_\varepsilon} \tag{25}$$

и

$$h_{ij} = \lim_{\varepsilon\to 0} h_{ij}^\varepsilon. \tag{26}$$

Лемма 3. *Пусть* N_j^ε *– решение задачи (23),* N_j *– решение задачи (24). Тогда для* $n\ge 3$ *справедлива оценка*

$$\|N_j^\varepsilon - N_j\|^2_{H_1(\check{Y}_\varepsilon)} \le K_{14}(a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^{n/2}. \tag{27}$$

Доказательство. Функция $N_j^\varepsilon - N_j$ является решением задачи

$$\Delta(N_j^\varepsilon - N_j) = 0 \ \text{ в } \ \check{Y}_\varepsilon,$$
$$\frac{\partial(N_j^\varepsilon - N_j)}{\partial\nu^S} = 0 \ \text{ на } \ \partial G_1,\quad \frac{\partial(N_j^\varepsilon - N_j)}{\partial\nu^M} = -\nu_j^M - \frac{\partial N_j}{\partial\nu^M} \ \text{ на } \ \partial a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_2. \tag{28}$$

Из интегрального тождества для задачи (28) получим, что

$$\int\limits_{\check{Y}_\varepsilon^j} |\nabla_y(N_j^\varepsilon - N_j)|^2\,dy + \int\limits_{\partial(a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_2)} \left(\nu_j^M + \frac{\partial N_j}{\partial\nu^M}\right)(N_j^\varepsilon - N_j)\,dS_y = 0. \tag{29}$$

Оценим второй интеграл:

$$\int\limits_{\partial(a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_2)} |N_j^\varepsilon - N_j|\,dS_y \le K_{15}(a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^{(n-1)/2}\|N_j^\varepsilon - N_j\|_{L_2(\partial a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_2)} \le$$
$$\le K_{16}a_\varepsilon^{(n-1)/2}\varepsilon^{1-n}\|N_j^\varepsilon - N_j\|_{L_2(\partial a_\varepsilon G_2)} \le$$
$$\le K_{17}a_\varepsilon^{(n-1)/2}\varepsilon^{1-n}[a_\varepsilon^{(n-1)/2}\varepsilon^{-n/2}\|N_j^\varepsilon - N_j\|_{L_2(Y_\varepsilon)} + \sqrt{a_\varepsilon}\|\nabla_x(N_j^\varepsilon - N_j)\|_{L_2(Y_\varepsilon)}]. \tag{30}$$

Отсюда следует неравенство

$$\int\limits_{\partial(a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_2)} |N_j^\varepsilon - N_j|\,dS_y \le K_{18}[(a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^{n-1}\|N_j^\varepsilon - N_j\|_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)} + (a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^{n/2}\|\nabla_y(N_j^\varepsilon - N_j)\|_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)}].$$

Положим $\Xi_\varepsilon^j \equiv N_j^\varepsilon - N_j - \langle N_j^\varepsilon - N_j\rangle_{\check{Y}_\varepsilon}$. Заметим, что $\langle\Xi_\varepsilon^j\rangle_{\check{Y}_\varepsilon} = 0$. Следовательно, можно использовать лемму 1, согласно которой $\|\Xi_\varepsilon^j\|_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)} \le K_{19}\|\nabla(N_j^\varepsilon - N_j)\|_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)}$, откуда получим

$$\|N_j^\varepsilon - N_j\|_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)} \le \|\Xi_\varepsilon^j\|_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)} + |\langle N_j^\varepsilon - N_j\rangle_{\check{Y}_\varepsilon}| \le$$

$$\leq K_{20}[\,\|\nabla(N_j^\varepsilon - N_j)\|_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)} + (a_\varepsilon\varepsilon^{-1})|\langle N_j\rangle_{a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_2}|\,]. \tag{31}$$

Очевидно, что $|\langle N_j\rangle_{a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_2}| \leq K_{21}$, поэтому приходим к оценке

$$\|N_j^\varepsilon - N_j\|_{L_1(a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_2)} \leq$$

$$\leq K_{22}[(a_\varepsilon\varepsilon^{-1})\|\nabla_y(N_j^\varepsilon - N_j)\|_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)} + (a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^{2n-1} + (a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^{n/2}\|\nabla_y(N_j^\varepsilon - N_j)\|_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)}] \leq$$

$$\leq K_{23}[(a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^{n/2} + (a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^{n/2}\|\nabla_y(N_j^\varepsilon - N_j)\|^2_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)}]. \tag{32}$$

Из (29) и оценки (32) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 4. *Справедливо представление*

$$h_{ij} = \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial N_j}{\partial y_i} \right\rangle_{Q\setminus G_1}. \tag{33}$$

Доказательство. Оценим разность $|h_{ij}^\varepsilon - h_{ij}|$. В соответствии с определениями (25), (26) имеем

$$|h_{ij}^\varepsilon - h_{ij}| \leq K_{24}\frac{|Q\setminus G_1| - |\check{Y}_\varepsilon|}{|Q\setminus G_1||\check{Y}_\varepsilon|}\left[\int\limits_{\check{Y}_\varepsilon^j}\left(\delta_{ij} + \frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial y_i}\right)dy - \int\limits_{Q\setminus G_1}\left(\delta_{ij} + \frac{\partial N_j}{\partial y_i}\right)dy\right] =$$

$$= K_{25}\frac{|Q\setminus G_1| - |\check{Y}_\varepsilon|}{|Q\setminus G_1||\check{Y}_\varepsilon|}\left[\int\limits_{\check{Y}_\varepsilon^j}\left(\frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial y_i} - \frac{\partial N_j}{\partial y_i}\right)dy + \int\limits_{a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_1}\left(\delta_{ij} + \frac{\partial N_j}{\partial y_i}\right)dy\right] \leq$$

$$\leq K_{26}(\|\nabla_y(N_j^\varepsilon - N_j)\|_{L_2(\check{Y}_\varepsilon)} + |a_\varepsilon\varepsilon^{-1}G_1|).$$

Из этого соотношения и леммы 3 получим оценку $|h_{ij}^\varepsilon - h_{ij}| \leq K_{27}(a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^{n/4}$, что и завершает доказательство. Лемма доказана.

Рассмотрим вспомогательную задачу на ячейке

$$\begin{gathered}\Delta\theta_\varepsilon = \mu_\varepsilon \ \text{ в } \ Y_\varepsilon,\\ \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\nu^M} = -b \ \text{ на } \ \partial a_\varepsilon G_2, \quad \frac{\partial\theta_\varepsilon}{\partial\nu^S} = 0 \ \text{ на } \ \partial\varepsilon G_1, \quad \langle\theta_\varepsilon\rangle_{Y_\varepsilon} = 0 \ \text{ в } \ Y_\varepsilon,\end{gathered} \tag{34}$$

где

$$\mu_\varepsilon = -\frac{ba_\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{-n}|\partial G_2|}{1 - |G_1| - (a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^n|G_2|} \tag{35}$$

определяется из условия разрешимости этой задачи. Положим $K_0 = \{v \in H_1(\Omega),\ v \leq 0$ п.в. в $\Omega\}$ и обозначим $L(w_0) \equiv \sum_{i,j=1}^n h_{ij}\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x_i\partial x_j} + \hat{C}w_0 + f$, где $\hat{C} = -bC_0|\partial G_2|/(1 - |G_1|)$. Определим функцию $w_0 \in K_0$ как решение задачи

$$L(w_0) \geq 0, \quad w_0 \leq 0, \quad w_0L(w_0) = 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{36}$$

Определение 3. Обобщенным решением задачи (36) называется функция $w_0 \in K_0$, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega h_{ij}\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\frac{\partial(\varphi - w_0)}{\partial x_j}\,dx - \hat{C}\int\limits_\Omega w_0(\varphi - w_0)\,dx \geq \int\limits_\Omega f(\varphi - w_0)\,dx \tag{37}$$

для произвольной $\varphi \in K_0$.

В дальнейшем нам потребуется некоторая гладкость решения w_0. Воспользуемся теоремой 3.2 из [6, п. 4].

Теорема 1. *Пусть коэффициенты оператора*

$$Au \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

принадлежат $C^\alpha(\overline{\Omega})$; *оператор* A *равномерно эллиптический в* Ω, $c(x) \geq 0$; $\partial\Omega$ *класса* $C^{2+\alpha}$, $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $g \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$; $g \geq \varphi$ *на* $\partial\Omega$, *где* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. *Тогда существует решение* u *вариационного неравенства*

$$Au - f \geq 0, \quad u \geq \varphi, \quad (Au - f)(u - \varphi) = 0 \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \quad u = g \quad \textit{на} \quad \partial\Omega$$

и $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *для любого* $1 \leq p < \infty$.

Таким образом, в условиях задачи (37) получим, что $w_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ для любого $1 \leq p < \infty$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla U_\varepsilon \nabla \psi \, dx, \quad U_\varepsilon = w_0 + \theta_\varepsilon w_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} N_j^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial w_0}{\partial x_j}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla U_\varepsilon \nabla \psi \, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_0 \nabla \psi \, dx + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla\left(\psi \frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right) \nabla_y N_j^\varepsilon \, dx - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \psi \nabla\left(\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right) \nabla_y N_j^\varepsilon \, dx +$$

$$+ \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} N_j^\varepsilon \nabla \psi \nabla\left(\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right) dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} w_0 \nabla \theta_\varepsilon \nabla \psi \, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \theta_\varepsilon \nabla w_0 \nabla \psi \, dx. \tag{38}$$

Рассмотрим

$$I_1 \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_0 \nabla \psi \, dx + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla\left(\psi \frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right) \nabla_y N_j^\varepsilon \, dx.$$

Из интегрального тождества для задачи (23) имеем

$$\int\limits_{\check{Y}_\varepsilon^j} \nabla N_j^\varepsilon \nabla \varphi \, dy = -\int\limits_{\partial G_1} \nu_j^S \varphi \, dS_y - \int\limits_{\partial a_\varepsilon \varepsilon^{-1} G_2} \nu_j^M \varphi \, dS_y. \tag{39}$$

Переходя в (39) к переменным $x = \varepsilon y$, суммируя по всем ячейкам Y_ε^j и подставляя $\varphi = \psi \dfrac{\partial w_0}{\partial x_j}$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla\left(\psi \frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right) \nabla_y N_j^\varepsilon \, dx = -\int\limits_{S_1^\varepsilon} \psi \frac{\partial w_0}{\partial \nu^S} \, dS_x - \int\limits_{S_2^\varepsilon} \psi \frac{\partial w_0}{\partial \nu^M} \, dS_x. \tag{40}$$

Теперь заметим, что

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_0 \nabla \psi \, dx = -\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \delta_{ij} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i \partial x_j} \psi \, dx + \int\limits_{S_1^\varepsilon} \psi \frac{\partial w_0}{\partial \nu^S} \, dS_x + \int\limits_{S_2^\varepsilon} \psi \frac{\partial w_0}{\partial \nu^M} \, dS_x. \tag{41}$$

Учитывая (40) и (41), запишем I_1 в виде

$$I_1 = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \delta_{ij} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i \partial x_j} \psi \, dx, \tag{42}$$

где по повторяющимся индексам идет суммирование от 1 до n. Следовательно, из (42) выводим, что

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla U_\varepsilon \nabla \psi \, dx = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial y_i}\right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i \partial x_j} \psi \, dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega_\varepsilon} N_j^\varepsilon \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \psi \nabla \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon} w_0 \nabla \theta_\varepsilon \nabla \psi \, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \theta_\varepsilon \nabla w_0 \nabla \psi \, dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial y_i}\right) - h_{ij}^\varepsilon\right] \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i \partial x_j} \psi \, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (h_{ij} - h_{ij}^\varepsilon) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i \partial x_j} \psi \, dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega_\varepsilon} h_{ij} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i \partial x_j} \psi \, dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega_\varepsilon} N_j^\varepsilon \nabla \psi \nabla \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right) dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \theta_\varepsilon \nabla w_0 \nabla \psi \, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} w_0 \nabla \theta_\varepsilon \nabla \psi \, dx. \tag{43}$$

Из интегрального тождества (9) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon^- \nabla \psi \, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \psi \, dx - b \int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon \psi \, dS_x - \int\limits_{S_1^\varepsilon} w_\varepsilon^+ \psi \, dS_x - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon^+ \nabla \psi \, dx. \tag{44}$$

Вычитая из (43) равенство (44), получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla (U_\varepsilon - w_\varepsilon^-) \nabla \psi \, dx = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} L(w_0) \psi \, dx + \hat{C} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} w_0 \psi \, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla \theta_\varepsilon \nabla (\psi w_0) \, dx - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \psi \nabla \theta_\varepsilon \nabla w_0 \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \theta_\varepsilon \nabla \psi \nabla w_0 \, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (h_{ij} - h_{ij}^\varepsilon) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i \partial x_j} \psi \, dx - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial y_i}\right) - h_{ij}^\varepsilon\right] \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i \partial x_j} \psi \, dx +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{\Omega_\varepsilon} N_j^\varepsilon \nabla \psi \nabla \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right) dx + b \int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon \psi \, dS_x + \int\limits_{S_1^\varepsilon} w_\varepsilon^+ \psi \, dS_x + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon^+ \nabla \psi \, dx. \tag{45}$$

Интегральное тождество для задачи (34) имеет вид

$$\int\limits_{Y_\varepsilon} \nabla \theta_\varepsilon \nabla \hat{\psi} \, dx = -\mu_\varepsilon \int\limits_{Y_\varepsilon} \hat{\psi} \, dx - b \int\limits_{\partial a_\varepsilon G_2} \hat{\psi} \, dS_x, \tag{46}$$

где константа μ_ε определяется соотношением (35), $\hat{\psi} \in H_1(Y_\varepsilon)$. Заметим, что $\hat{C} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon$. Из (45), (46) выводим равенство

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla (U_\varepsilon - w_\varepsilon^-) \nabla \psi \, dx = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} L(w_0) \psi \, dx + (\hat{C} - \mu_\varepsilon) \int\limits_{\Omega_\varepsilon} w_0 \psi \, dx - b \int\limits_{S_2^\varepsilon} w_0 \psi \, dS_x - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \psi \nabla \theta_\varepsilon \nabla w_0 \, dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\theta_\varepsilon\nabla\psi\nabla w_0\,dx+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}(h_{ij}-h_{ij}^\varepsilon)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i\partial x_j}\psi\,dx-\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left[\left(\delta_{ij}+\frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial y_i}\right)-h_{ij}^\varepsilon\right]\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i\partial x_j}\psi\,dx+$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega_\varepsilon}N_j^\varepsilon\nabla\psi\nabla\left(\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right)dx+b\int\limits_{S_2^\varepsilon}w_\varepsilon\psi\,dS_x+\int\limits_{S_1^\varepsilon}w_\varepsilon^+\psi\,dS_x+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla w_\varepsilon^+\nabla\psi\,dx. \tag{47}$$

Полагая в (47) $\psi=U_\varepsilon-w_\varepsilon^-$ и учитывая, что w_0 – решение задачи (36), получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla(U_\varepsilon-w_\varepsilon^-)|^2\,dx=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}L(w_0)w_\varepsilon^-\,dx+b\int\limits_{S_2^\varepsilon}(w_\varepsilon^--w_0)(w_0-w_\varepsilon^-)\,dS_x+R_\varepsilon^1+R_\varepsilon^2+R_\varepsilon^3+R_\varepsilon^4,$$

где

$$R_\varepsilon^1=(\hat C-\mu_\varepsilon)\int\limits_{\Omega_\varepsilon}w_0(U_\varepsilon-w_\varepsilon^-)\,dx+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}(h_{ij}-h_{ij}^\varepsilon)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i\partial x_j}(U_\varepsilon-w_\varepsilon^-)\,dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left[\left(\delta_{ij}+\frac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial y_i}\right)-h_{ij}^\varepsilon\right]\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i\partial x_j}(U_\varepsilon-w_\varepsilon^-)\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega_\varepsilon}N_j^\varepsilon\nabla(U_\varepsilon-w_\varepsilon^-)\nabla\left(\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right)dx,$$

$$R_\varepsilon^2=b\int\limits_{S_2^\varepsilon}w_\varepsilon^+(U_\varepsilon-w_\varepsilon^-)\,dS_x+\int\limits_{S_1^\varepsilon}w_\varepsilon^+(U_\varepsilon-w_\varepsilon^-)\,dS_x+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla w_\varepsilon^+\nabla(U_\varepsilon-w_\varepsilon^-)\,dx,$$

$$R_\varepsilon^3=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\theta_\varepsilon\nabla w_0\nabla(U_\varepsilon-w_\varepsilon^-)\,dx-\int\limits_{\Omega_\varepsilon}(U_\varepsilon-w_\varepsilon^-)\nabla\theta_\varepsilon\nabla w_0\,dx,$$

$$R_\varepsilon^4=-\int\limits_{\Omega_\varepsilon}L(w_0)\left(w_0\theta_\varepsilon+\varepsilon N_j^\varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right)dx+b\int\limits_{S_2^\varepsilon}w_\varepsilon^-\left(w_0\theta_\varepsilon+\varepsilon N_j^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right)dS_x.$$

Далее, воспользуемся теоремой вложения: если $\psi\in W_p^1(\Omega)$, $1\le p<\infty$, и $n<p$, то $\psi\in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\alpha=1-n/p$. Отсюда следует, что $w_0\in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\nabla w_0\in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\alpha=1-n/p$, и справедливы оценки

$$\|w_0\|_{L_2(S_1^\varepsilon)}\le K_{28},\quad \|\nabla w_0\|_{L_2(S_1^\varepsilon)}\le K_{29}, \tag{48}$$

$$\|w_0\|_{L_2(S_2^\varepsilon)}\le K_{30},\quad \|\nabla w_0\|_{L_2(S_2^\varepsilon)}\le K_{31}. \tag{49}$$

Из принадлежности $w_0\in W_p^2(\Omega_\varepsilon)$ вытекает, что

$$\|w_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\le K_{32},\quad \|\nabla w_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\le K_{33},\quad \left\|\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_i x_j}\right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\le K_{34}. \tag{50}$$

Равенство (10) и оценки (14) приводят к соотношениям

$$\int\limits_{S_2^\varepsilon}|w_\varepsilon^+|^2\,dS_x\le K_{35}\sqrt{\varepsilon},\quad \int\limits_{S_1^\varepsilon}|w_\varepsilon^+|^2\,dS_x\le K_{36}\sqrt{\varepsilon}. \tag{51}$$

Покажем ограниченность $\|\nabla U_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$:

$$\|\nabla U_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\le\|\nabla w_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}+\|\nabla\theta_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\|w_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}+\|\theta_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\|\nabla w_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}+$$

$$+\varepsilon\sum_{j=1}^n\left(\|\nabla N_j^\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\|\nabla w_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}+\|N_j^\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\left\|\nabla\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\right). \tag{52}$$

В силу того что θ_ε является решением задачи (36), для нее справедливы оценки (см. [2])

$$\|\nabla\theta_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le K_{37} a_\varepsilon^{n/2}, \quad \|\theta_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le K_{38}\varepsilon a_\varepsilon^{n/2}, \tag{53}$$

$$\|\theta_\varepsilon\|_{L_2(S_2^\varepsilon)} \le K_{39}\varepsilon^{-n/2} a_\varepsilon^{(n+1)/2}. \tag{54}$$

Оценим члены с N_j^ε :

$$\|N_j^\varepsilon\|^2_{H_1(\check{Y}_\varepsilon)} \le \|N_j^\varepsilon - N_j\|^2_{H_1(\check{Y}_\varepsilon)} + \|N_j\|^2_{H_1(\check{Y}_\varepsilon)} \le K_{40}(1 + a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^{n/2} \le K_{41}.$$

Здесь мы воспользовались леммой 3 и тем, что N_j не зависит от ε. Далее суммируем по ячейкам

$$\|N_j^\varepsilon\|^2_{H_1(\Omega_\varepsilon)} \le \varepsilon^n K_{42}\|N_j^\varepsilon\|^2_{H_1(\check{Y}_\varepsilon)}\varepsilon^{-n} \le K_{43}. \tag{55}$$

Применяя оценки (50), (53), (55) к (52), получаем

$$\|\nabla U_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le K_{44}. \tag{56}$$

Теперь рассмотрим неравенство

$$\|\nabla U_\varepsilon\|_{L_2(S_2^\varepsilon)} \le \|w_0\|_{L_2(S_2^\varepsilon)} + \|\theta_\varepsilon\|_{L_2(S_2^\varepsilon)}\|w_0\|_{L_2(S_2^\varepsilon)} + \varepsilon\sum_{j=1}^n \|N_j^\varepsilon\|_{L_2(S_2^\varepsilon)}\left\|\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right\|_{L_2(S_2^\varepsilon)}. \tag{57}$$

Из (30) следует, что $\|N_j^\varepsilon\|_{L_2(\partial a_\varepsilon G_2)} \le K_{45}(a_\varepsilon^{(n-1)/2\varepsilon^{-n/2}}\|N_j^\varepsilon - N_j\|_{L_2(Y_\varepsilon)} + \sqrt{a_\varepsilon}\|\nabla(N_j^\varepsilon - N_j)\|_{L_2(Y_\varepsilon)}) +$ $+ \|N_j\|_{L_2(\partial a_\varepsilon G_2)}$, откуда

$$\varepsilon\|N_j^\varepsilon\|_{L_2(S_2^\varepsilon)} \le K_{46}\varepsilon\|N_j^\varepsilon\|_{L_2(\partial\varepsilon G_2)}\varepsilon^{-n} \le K_{47}\varepsilon^{1-n}(\|N_j^\varepsilon - N_j\|_{H_1(Y_\varepsilon)} + a_\varepsilon^{n-1}\|N_j\|_{L_2(\partial G_2)}) \le$$

$$\le K_{48}\varepsilon(\|N_j^\varepsilon - N_j\|_{H_1(\check{Y}_\varepsilon)} + a_\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{-n}\|N_j\|_{L_2(\partial G_2)}) \le K_{49}\varepsilon(1 + a_\varepsilon^{1/4}). \tag{58}$$

Из (49), (54), (58) выводим, что

$$\|U_\varepsilon\|_{L_2(S_2^\varepsilon)} \le K_{50}. \tag{59}$$

Оценим норму

$$\|U_\varepsilon\|_{L_2(S_1^\varepsilon)} \le \|w_0\|_{L_2(S_1^\varepsilon)} + \|\theta_\varepsilon\|_{L_2(S_1^\varepsilon)}\|w_0\|_{L_2(S_1^\varepsilon)} + \varepsilon\sum_{j=1}^n \|N_j^\varepsilon\|_{L_2(S_1^\varepsilon)}\left\|\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\right\|_{L_2(S_1^\varepsilon)} \tag{60}$$

Имеет место теорема вложения $W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\partial\Omega)$. Рассмотрим

$$\int\limits_{\partial\varepsilon G_1} \theta_\varepsilon^2\, dS_x \le \varepsilon^{n-1}\int\limits_{\partial G_1}\hat\theta_\varepsilon^2(y)\, dS_y \le K_{51}\varepsilon^{n-1}\left(\int\limits_{\check{Y}_\varepsilon^j}\hat\theta_\varepsilon^2(y)\, dy + \int\limits_{\check{Y}_\varepsilon^j}|\nabla\hat\theta_\varepsilon(y)|^2\, dy\right) =$$

$$= K_{51}\varepsilon^{n-1}\left(\varepsilon^{-n}\int\limits_{Y_\varepsilon^j}\theta_\varepsilon^2\, dx + \varepsilon^{2-n}\int\limits_{Y_\varepsilon^j}|\nabla\theta_\varepsilon|^2\, dx\right).$$

Воспользуемся оценками (53) и получим $\int_{\partial\varepsilon G_1}\theta_\varepsilon^2\, dS_x \le K_{52}\varepsilon a_\varepsilon^n$. Просуммируем по ячейкам

$$\|\theta_\varepsilon\|^2_{L_2(S_1^\varepsilon)} \le K_{53}a_\varepsilon^n\varepsilon^{1-n}. \tag{61}$$

Теперь оценим член с N_j^ε:

$$\int\limits_{\partial\varepsilon G_1} |N_j^\varepsilon|^2\,dS_x \le \|N_j^\varepsilon - N_j\|^2_{L_2(\partial\varepsilon G_1)} + \|N_j\|^2_{L_2(\partial\varepsilon G_1)} \le K_{54}\varepsilon^{n-1}(\|N_j^\varepsilon - N_j\|^2_{H_1(\check{Y}_\varepsilon)} + \|N_j\|^2_{H_1(\check{Y}_\varepsilon)}).$$

Применив лемму 3, видим, что верна оценка $\int_{\partial\varepsilon G_1} |N_j^\varepsilon|^2\,dS_x \le K_{55}(\varepsilon^{n-1}a_\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{n-1})$. Отсюда после суммирования по всем ячейкам придем к неравенству

$$\varepsilon^2\|N_j^\varepsilon\|^2_{L_2(S_1^\varepsilon)} \le K_{56}\varepsilon(a_\varepsilon^{1/2} + 1). \tag{62}$$

Из (48), (61), (62) следует оценка

$$\|U_\varepsilon\|_{L_2(S_1^\varepsilon)} \le K_{57}. \tag{63}$$

Полагая в интегральном тождестве (9) $\phi = w_\varepsilon^-$, получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon^-|^2\,dx + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} |w_\varepsilon^-|^2\,dS_x = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f w_\varepsilon^-\,dx. \tag{64}$$

Найдем оценки для w_ε^-. Из (64) следует, что $\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon^-|^2\,dx \le \int_{\Omega_\varepsilon} f w_\varepsilon^-\,dx$.

Применяя неравенства Коши–Буняковского и Фридрихса (см. [1, теорема 4.5]), приходим к оценкам

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon^-|^2\,dx \le K_{58}, \qquad \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |w_\varepsilon^-|^2\,dx \le K_{59}. \tag{65}$$

В силу определения w_0 как решения задачи (36) имеем $L(w_0) \le 0$ п.в. в Ω_ε. Кроме того, $b\int_{S_2^\varepsilon}(w_\varepsilon^- - w_0)(w_0 - w_\varepsilon^-)\,dS_x = -b\int_{S_2^\varepsilon}(w_\varepsilon^- - w_0)^2\,dS_x$, поэтому

$$\|\nabla(U_\varepsilon - w_\varepsilon^-)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le \sum_{k=1}^{4} R_\varepsilon^k. \tag{66}$$

Заметим, что $\left\langle\left(\delta_{ij} + \dfrac{\partial N_j^\varepsilon}{\partial y_i}\right) - h_{ij}^\varepsilon\right\rangle_{\check{Y}_\varepsilon} = 0$. Следовательно, воспользовавшись леммой 1.6 [1], а также леммой 4 и соотношениями (46), (55), (56), (65), получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon^1 = 0. \tag{67}$$

Заметим, что $w_\varepsilon^+ w_\varepsilon^- = 0$, поэтому

$$R_\varepsilon^2 = b\int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon^+ U_\varepsilon\,dS_x + \int\limits_{S_1^\varepsilon} w_\varepsilon^+ U_\varepsilon\,dS_x + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon^+ \nabla U_\varepsilon\,dx.$$

Таким образом, применив неравенство Коши–Буняковского и оценки (14) и (51), получим $|R_\varepsilon^2| \le K_{60}\sqrt{\varepsilon}(\|\nabla U_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \|U_\varepsilon\|_{L_2(S_2^\varepsilon)} + \|U_\varepsilon\|_{L_2(S_1^\varepsilon)})$.

Из (56), (59), (63) выводим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon^2 = 0. \tag{68}$$

Применив неравенство Коши–Буняковского к остальным слагаемым, входящим в R_ε^3, получим

$$|R_\varepsilon^3| \le K_{61}(\|\theta_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\|\nabla w_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\|\nabla(U_\varepsilon - w_\varepsilon^-)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} +$$

$$+ \|(U_\varepsilon - w_\varepsilon^-)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla\theta_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \|\nabla w_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}).$$

Теперь с учетом оценок (50), (53), (56), (65) получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon^3 = 0. \tag{69}$$

Согласно (36) имеем $w_0 L(w_0) = 0$ п.в. в Ω. Поэтому R_ε^4 имеет вид

$$R_\varepsilon^4 = -\varepsilon\biggl(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} L(w_0) N_j^\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial x_j}\,dx - b\int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon^- N_j^\varepsilon\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\,dS_x\biggr) + b\int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon^- w_0 \theta_\varepsilon\,dS_x. \tag{70}$$

Поскольку выражение, стоящее в скобках, ограничено в силу (50), (55), (65), имеет место оценка

$$\biggl|-\varepsilon\biggl(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} L(w_0) N_j^\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial x_j}\,dx - b\int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon^- N_j^\varepsilon\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\,dS_x\biggr)\biggr| \le K_{62}\varepsilon. \tag{71}$$

Для оценки последнего интеграла применим неравенство Коши–Буняковского и оценки (49), (54), (65)

$$\biggl|b\int\limits_{S_2^\varepsilon} w_\varepsilon^- w_0\theta_\varepsilon\,dS_x\biggr| \le K_{63}\varepsilon^{-n/2} a_\varepsilon^{(n+1)/2}. \tag{72}$$

Из (70) с учетом (71), (72) получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon^4 = 0. \tag{73}$$

Учитывая соотношения (67), (68) и (69), (73), видим, что справедлива

Теорема 2. *Пусть u_ε – обобщенное решение задачи (2) в перфорированной области Ω_ε, $w_0 \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, является решением задачи (36) и θ_ε – решение задачи (34), N_j определяются как решения задачи (24). Тогда*

$$\biggl\| u_\varepsilon - w_0 + \theta_\varepsilon w_0 + \varepsilon\sum_{j=1}^n N_j\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\biggr\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Автор выражает глубокую благодарность Т.А. Шапошниковой за внимание к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М., 1990.
2. *Oleinik O.A., Shaposhnikova T.A.* // Rend. Mat. Acc. Lincei. Ser. 9. 1995. V. 6. P. 133–142.
3. *Oleinik O.A., Shaposhnikova T.A.* // Rend. Mat. Acc. Lincei. Ser. 9. 1996. V. 7. P. 129–146.
4. *Иосифьян Г.А.* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2001. Т. 21. С. 240–298.
5. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., 1979.
6. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М., 1990.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
25.04.2003 г.