А. С. Аткарская, Изоморфизмы стабильных линейных групп над ассоциативными кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2014, номер 4, 28–32

УДК 512.643

# ИЗОМОРФИЗМЫ СТАБИЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД АССОЦИАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ $\frac{1}{2}$

**А. С. Аткарская**[1]

Рассматриваются стабильные линейные группы над произвольными ассоциативными кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$. Описывается действие изоморфизма между стабильными группами на элементарной подгруппе.

*Ключевые слова:* стабильная линейная группа, ассоциативное кольцо, изоморфизм.

Stable linear groups over arbitrary assosiative rings with $\frac{1}{2}$ are considered. The action of an isomorphism between these groups on the elementary stable subgroup is described.

*Key words:* stable linear group, assosiative ring, isomorphism.

**1. Введение.** Изучение автоморфизмов линейных групп началось с работы О. Шрайера и Б.Л. Вандер-Вардена [1], в которой были описаны автоморфизмы группы $\mathrm{PSL}_n$, $n \geqslant 3$, над произвольным полем. Затем Ж. А. Э. Дьёдонне [2] и Ч. Э. Риккартом [3] были описаны автоморфизмы группы $\mathrm{GL}_n$, $n \geqslant 3$, над телом при помощи введенного ими метода инволюций, используемого в дальнейшем многими авторами для исследования изоморфизмов классических групп. С помощью метода инволюций Янь Щицзянем [4] были описаны автоморфизмы группы $\mathrm{E}_n(R)$, $n \geqslant 3$, где $R$ — область целостности характеристики $\neq 2$.

В 1983 г. А. В. Михалевым и И. З. Голубчиком [5] было дано описание изоморфизмов полных линейных групп $\mathrm{GL}_n(R)$ в случае, когда ассоциативное кольцо $R$ содержит обратимый элемент 2 (также с использованием метода инволюций). Другим способом этот результат был доказан Е. И. Зельмановым в работе [6]. Затем И. З. Голубчиком [7] данное описание было продолжено на случай линейных групп над ассоциативными кольцами без $\frac{1}{2}$.

Представляет интерес изучение изоморфизмов не только классических линейных групп, но и групп автоморфизмов свободных модулей бесконечного ранга. В работе [8] Е. И. Буниной дано описание изоморфизмов групп автоморфизмов свободных модулей над ассоциативными кольцами с $\frac{1}{2}$. В настоящей работе описаны изоморфизмы стабильных линейных групп над произвольными ассоциативными кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$.

**2. Основные определения.** Пусть $R$ — произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Основные определения взяты из книги [9].

Обозначим через $\mathrm{Mat}\,(R)$ матрицы со счетным числом строк и столбцов, такие, что в каждом столбце содержится лишь конечное число ненулевых элементов (кольцо эндоморфизмов свободного модуля $V = \bigoplus R$ счетного ранга при фиксации базиса).

Назовем $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ подкольцо в кольце $\mathrm{Mat}\,(R)$, состоящее из матриц со счетным числом строк и столбцов, у которых вне главной диагонали есть лишь конечное число ненулевых элементов, а также существует такой номер $n$, что для любого $i \geqslant n$ элементы матрицы $r_{ii} = a$, $a \in R$.

Пусть $A \in \mathrm{GL}_n(R)$. Мы отождествим $A$ с элементом из $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ по следующему правилу: матрицу $A$ запишем в левый верхний угол, начиная с позиции $(n, n)$ на диагонали запишем 1, а на всех остальных местах запишем 0. Сохраним обозначение $\mathrm{GL}_n(R)$ для получившихся подмножеств $\mathrm{Mat}_\infty(R)$.

Подгруппу $\mathrm{GL}_n(R)$, порожденную матрицами $1+re_{ij}, i \neq j, r \in R$, будем обозначать $\mathrm{E}_n(R)$ и называть *подгруппой элементарных матриц*. Аналогично группам $\mathrm{GL}_n(R)$ в $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ можно вложить подгруппы элементарных матриц $\mathrm{E}_n(R)$.

**Определение.** Введем группу $\mathrm{GL}\,(R) = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{GL}_n(R)$ $(\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_\infty(R))$. Назовем ее *стабильной линейной группой*. Также введем группу $\mathrm{E}\,(R) = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{E}_n(R)$ $(\mathrm{E}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_\infty(R))$. Назовем ее *стабильной элементарной группой*.

Назовем $\mathrm{FMat}\,(R)$ подкольцо кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$, состоящее из матриц, имеющих конечное число ненулевых элементов.

Подмножество $\{e_{ij}\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, кольца $\mathrm{Mat}\,(R)$ называется *системой матричных единиц*, если $e_{ij}e_{st} = \delta_{js}e_{it}$ ($\delta_{js}$ — символ Кронекера). Матрицы $1 - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}$ будем называть *матрицами перестановок* и обозначать $s_{ij}$.

Пусть $I$ — идеал кольца $R$; $E(R, I)$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}\,(R)$, порожденная матрицами $1 + \lambda e_{ij}$, где $\lambda \in I$, $i \neq j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{GL}\,(R, I)$ — ядро канонического гомоморфизма $\varphi_I : \mathrm{GL}\,(R) \to \mathrm{GL}\,(R/I)$. Пусть, кроме того, $[A, B] \equiv A^{-1}B^{-1}AB$.

[1] *Аткарская Агата Сергеевна* — асп. каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: atkarskaya.agatha@gmail.com.

Если $D \subseteq \mathrm{Mat}\,(R)$, то через $\langle D\rangle$ будем обозначать кольцо, полученное путем сложения, умножения и взятия обратных элементов (в случае их существования).

Основным результатом настоящей работы является следующая

**Теорема 1.** *Пусть $R$ и $S$ — ассоциативные кольца с $\frac{1}{2}$, $\varphi : \mathrm{GL}\,(R) \to \mathrm{GL}\,(S)$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты $h$ и $e$ колец $\mathrm{Mat}\,(R)$ и $\mathrm{Mat}\,(S)$ соответственно, кольцевой изоморфизм $\theta_1 : h\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to e\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle$ и кольцевой антиизоморфизм $\theta_2 : (1-h)\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to (1-e)\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle$, такие, что*

$$\varphi(A) = \theta_1(hA) + \theta_2((1-h)A^{-1})$$

*для всех $A \in \mathrm{E}\,(R)$.*

**3. Вспомогательные утверждения. Лемма 1.** *Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с $\frac{1}{2}$, $M$ и $N$ — нормальные подгруппы в $\mathrm{GL}\,(R)$, такие, что $M \cap N = \{1\}$ и $MN = \mathrm{GL}\,(R)$. Тогда найдутся идеалы $I, J \lhd R$, такие, что $R = I \oplus J$ и $M = \mathrm{GL}\,(R, I), N = \mathrm{GL}\,(R, J)$.*

Утверждение леммы легко может быть получено из следующей теоремы.

**Теорема 2** [9, с. 43]. *Пусть $H$ — подгруппа $\mathrm{GL}\,(R)$, нормализуемая $\mathrm{E}\,(R)$. Тогда существует однозначно определенный идеал $I \lhd R$, такой, что $\mathrm{E}\,(R, I) \subseteq H \subseteq \mathrm{GL}\,(R, I)$. Более того, всякая подгруппа, удовлетворяющая данному условию, является нормальной в $\mathrm{GL}\,(R)$.*

**Предложение 1.** *Пусть $R$, $S$ — ассоциативные кольца с $\frac{1}{2}$, $\varphi : \mathrm{GL}\,(R) \to \mathrm{GL}\,(S)$ — изоморфизм групп, $\{e_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ — стандартная система матричных единиц. Тогда существует такая полная система матричных единиц $\{f_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ кольца $\mathrm{Mat}\,(S)$, что $\varphi(1-2e_{ii}) = 1-2f_{ii}$.*

**Доказательство.** Положим $\varphi(1-2e_{ii}) = 1-2f_{ii}$, а $1-2e = \varphi^{-1}(1-2f_{11}f_{22})$. Так как $1-2f_{ii}$ коммутирует с $1-2f_{11}f_{22}$, то $1-2e$ коммутирует с $1-2e_{ii}$, следовательно, $1-2e$ является диагональной матрицей. Также легко видеть, что $[1-2e, s_{ij}] = 1, i, j \geqslant 3$, и $1-2e$ коммутирует со всеми диагональными матрицами из $\mathrm{GL}\,(R)$.

Если $a$ обладает свойством $a(1-2e_{11})a^{-1} = 1-2e_{22}, a(1-2e_{22})a^{-1} = 1-2e_{11}$, то $a(1-2e)a^{-1} = \varphi^{-1}(\varphi(a)(1-2f_{11}f_{22})\varphi(a)^{-1}) = \varphi^{-1}(1-2f_{11}f_{22}) = 1-2e$. Следовательно, $[1-2e, s_{12}] = 1$.

Воспользовавшись полученными соотношениями и определением группы $\mathrm{GL}\,(R)$, мы приходим к соотношению

$$1-2e = \mathrm{diag}\,[\varepsilon, \varepsilon, 1, 1, \dots], \varepsilon^2 = 1. \tag{1}$$

Положим $\varepsilon = 1-2e_1$. Тогда $e_1^2 = e_1$ и элемент $e_1$ коммутирует со всеми обратимыми элементами кольца $R$. Значит, $e_1$ — центральный идемпотент.

Положим $M = \varphi(\mathrm{GL}\,(R, e_1R)), N = \varphi(\mathrm{GL}\,(R, (1-e_1)R))$. Так как $\mathrm{GL}\,(R) = \mathrm{GL}\,(R, e_1R)\mathrm{GL}\,(R, (1-e_1)R)$, то по лемме 1 найдутся такие $I, J \lhd S$, что $S = I \oplus J, M = \mathrm{GL}\,(S, I), N = \mathrm{GL}\,(S, J)$. Тогда мы можем положить $\mathrm{Mat}\,(I) = (1-q)\mathrm{Mat}\,(S), \mathrm{Mat}\,(J) = q\mathrm{Mat}\,(S)$, где $q$ — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}\,(S)$.

Положим $1-2f_{11}f_{22} = a+b$, где $a \in \mathrm{Mat}\,(I), b \in \mathrm{Mat}\,(J)$. Тогда с помощью (1) получаем, что $a(1-2f_{11})(1-2f_{22})$ — центральный элемент $\mathrm{Mat}\,(I)$, а $b$ — центральный элемент $\mathrm{Mat}\,(J)$. Также $(1-2f_{11}f_{22})^2 = 1$, следовательно, $a^2 = b^2 = 1$. То есть $a(1-2f_{11})(1-2f_{22})$ и $b$ являются инволюциями колец $\mathrm{Mat}\,(I)$ и $\mathrm{Mat}\,(J)$ соответственно. Это в свою очередь означает, что

$$b = q - 2q_1, \quad a(1-2f_{11})(1-2f_{22}) = 1-q-2q_2,$$

где $q_1$ и $q_2$ — центральные идемпотенты в соответствующих кольцах.

Покажем, что $q_1 = 0$, а $q_2 = 1-q$. Имеем

$$1-2f_{11}f_{22} = a+b = (1-q-2q_2)(1-2f_{11})(1-2f_{22}) + (q-2q_1). \tag{2}$$

Умножив равенство (2) на $q_1$ и проведя несложные преобразования, получаем $q_1 = q_1f_{11}$. Аналогично выводим $q_1 = q_1f_{22}$. Отсюда следует, что $q_1(1-2f_{11})(1-2f_{22}) = q_1$, значит,

$$q_1\varphi(1-2e_{11}-2e_{22}) = q_1. \tag{3}$$

Нормальная подгруппа группы $\mathrm{GL}\,(R)$, порожденная матрицей $1-2e_{11}-2e_{22}$, содержит подгруппу $\mathrm{E}\,(R)$. Учитывая равенство (3), получаем, что $\varphi(\mathrm{E}\,(R)) \subseteq \mathrm{GL}\,(S, (1-q_1)S))$. По лемме 1 имеем $\varphi^{-1}(\mathrm{GL}\,(S, q_1S)) = \mathrm{GL}\,(R, I_1), I_1 \lhd R$, а с учетом предыдущего включения $\varphi^{-1}(\mathrm{GL}\,(S, q_1S)) \cap \mathrm{E}\,(R) = \{1\}$. Следовательно, $I_1 = 0$ и $q_1S = 0$, значит, $q_1 = 0$.

Умножив равенство (2) на $q_3 = 1-q_1-q_2$, аналогично получаем $q_3\varphi^{-1}(1-2e_{11}-2e_{22}) = q_3$. А это в свою очередь влечет (так же, как раньше) $q_3 = 0$, т.е. $q_2 = 1-q$.

Итак, мы имеем, учитывая (2), что $1-2f_{11}f_{22} = a+b = -(1-q)(1-2f_{22})(1-2f_{22}) + q$. Матрицы $1-2f_{11}f_{22}$ и $(1-2f_{22})(1-2f_{22})$ являются элементами стабильной группы $\mathrm{GL}\,(S)$, значит, $2q-1 = 1$, откуда

$q = 1$. То есть видим, что $f_{11}f_{22} = 0$. Сопрягая последнее равенство образами соответствующих матриц $s_{ij}$, получаем $f_{ii}f_{jj} = 0$ для $i \neq j$. Следовательно, $\{f_{ii} \mid i \geqslant 1\}$ — система сопряженных между собой ортогональных идемпотентов. Тогда ее можно дополнить до системы матричных единиц $\{f_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ кольца $\mathrm{Mat}\,(S)$. Предложение доказано.

Отметим два свойства построенной системы матричных единиц.

**Свойство 1.** *Для любого элемента $A \in \mathrm{GL}\,(S)$ найдется $n$ (зависящее от $A$), такое, что $A$ коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k} f_{ii}$ и $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k} e_{ii}$ при всех $k \geqslant n$.*

Доказательство следует из равенства

$$\varphi(\mathrm{diag}\,[-1, -1, \ldots, -1, 1, \ldots]) = \varphi\left(\prod_{i=1}^{k}(1 - 2e_{ii})\right) = \prod_{i=1}^{k}(1 - 2f_{ii}) = 1 - 2\left(\sum_{i=1}^{k} f_{ii}\right)$$

($-1$ повторяется на диагонали матрицы ровно $k$ раз).

**Свойство 2.** *Для любого элемента $A \in \mathrm{GL}\,(S)$ найдется $n$ (зависящее от $A$), такое, что $A$ коммутирует со всеми $f_{ii}$ и $\varphi^{-1}(A)e_{ii} = e_{ii}\varphi^{-1}(A) = e_{ii}$ при $i \geqslant n$.*

Легко доказывается следующая

**Лемма 2.** *Пусть $\{f_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ — система матричных единиц из предложения 1. Тогда если $A \in \mathrm{GL}\,(S)$ коммутирует со всеми $f_{ij}$, то $A = 1$.*

**Лемма 3.** *Пусть $\{f_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ — система матричных единиц из предложения 1. Пусть $S_1 = f_{11}\mathrm{Mat}_{\infty}(S)f_{11} = f_{11}\mathrm{Mat}\,(S)f_{11}$. Если $a$ — центральный элемент кольца $S$, то можно определить отображение $\alpha : \langle \mathrm{E}\,(S), a \cdot 1\rangle \to \mathrm{Mat}\,(S_1)$ со следующими свойствами:*

1) *$\alpha$ — инъективный кольцевой гомоморфизм*;

2) *$\alpha(\langle \mathrm{E}\,(S)\rangle) = \langle \mathrm{E}\,(S_1)\rangle$, $\alpha(\mathrm{GL}\,(S)) = \mathrm{GL}\,(S_1)$, $\alpha(\mathrm{FMat}\,(S)) = \mathrm{FMat}\,(S_1)$*;

3) *если $e'$ — центральный идемпотент кольца $S_1$, то найдется $e$ — центральный идемпотент кольца $S$, такой, что $\alpha(e\langle \mathrm{E}\,(S)\rangle) = e'\langle \mathrm{E}\,(S_1)\rangle$ (элемент $e$ выступает в качестве центрального элемента $a$ при определении отображения $\alpha$).*

**Доказательство.** Так как $a \in Z(S)$, то $a \cdot 1$ коммутирует со всеми $f_{ii}, i \geqslant 1$. Следовательно, по свойству 2 системы $\{f_{ij}\}$ для любого $A \in \langle \mathrm{E}\,(S), a \cdot 1\rangle$ существует $n_1$, такое, что $A$ коммутирует со всеми $f_{ii}$ при $i \geqslant n_1$. В силу свойства 1 системы $\{f_{ij}\}$ для любого $A \in \langle \mathrm{E}\,(S), a \cdot 1\rangle$ существует $n_2$, такое, что $A$ коммутирует со всеми $\sum\limits_{i=1}^{k} f_{ii}$ при $k \geqslant n_2$. Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольный элемент из $\langle \mathrm{E}\,(S), a \cdot 1\rangle$. Определим отображение $\alpha$ по правилу $\alpha(A) = (f_{1i}Af_{j1})$. В силу доказанного выше получаем, что $(f_{1i}Af_{j1}) \in \mathrm{Mat}\,(S_1)$, и построенное отображение $\alpha$ является гомоморфизмом колец.

Остальные пункты леммы несложно доказываются с использованием определения отображения $\alpha$ и отмеченных выше свойств системы матричных единиц $\{f_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$.

Далее под матричной записью элементов из $\langle \mathrm{E}\,(S)\rangle$ мы будем подразумевать запись их образов при отображении $\alpha$. Ясно, что элемент, соответствующий матрице, в которой все элементы равны нулю, кроме элемента $a_{ij}$ из $f_{11}\mathrm{Mat}\,(S)f_{11}$, стоящего на месте $(i, j)$, равен $f_{i1}a_{ij}f_{1j}$. Для сокращения записи мы будем обозначать такой элемент через $a_{ij}f_{ij}$.

**4. Доказательство основной теоремы.** *Пункт 1.* Пусть $\{f_{ij}\}$ — система матричных единиц из предложения 1. Пусть $\{e'_{ii}\}$ — такая система матричных единиц $\{e'_{ij}\}$ кольца $\mathrm{Mat}\,(R)$, что $e_{ii} = e'_{ii}$ для $i \geqslant 3$. Покажем, что

$$\varphi(1 - 2e'_{ii}) = 1 + x,\ x \in (f_{11} + f_{22})\mathrm{Mat}\,(S)(f_{11} + f_{22}),\ i = 1, 2.$$

Несложно проверить, что для системы матричных единиц $\{e'_{ij}\}$ выполнено предложение 1. По предложению 1 имеем $\varphi(1 - 2e'_{ii}) = 1 - 2f'_{ii}$, причем $f'_{ii} = f_{ii}$ при $i \geqslant 3$. Элементы $\varphi(1 - 2e'_{ii})$, $i = 1, 2$, коммутируют с $f_{jj}$, $j \geqslant 3$, тогда $\alpha(\varphi(1 - 2e'_{ii}))$, $i = 1, 2$, коммутируют с $\alpha(f_{jj}), j \geqslant 3$. Отсюда следует, что $\alpha(\varphi(1 - 2e'_{ii}))$, $i = 1, 2$, коммутируют с $\alpha(f_{11} + f_{22})$, но тогда $\varphi(1 - 2e'_{ii})$, $i = 1, 2$, также коммутируют с $f = f_{11} + f_{22}$. Значит, $\varphi(1 - 2e'_{ii}) = 1 + e_i + d_i, e_i \in f\mathrm{Mat}\,(S)f, d_i \in (1 - f)\mathrm{Mat}\,(S)(1 - f)$. В силу этого получаем, что $d_i, i = 1, 2$, коммутирует со всеми $f_{jj}$ при $j \geqslant 3$. Следовательно, $d_i = \mathrm{diag}\,[0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots]$.

С другой стороны, $(\varphi(1 - 2e'_{ii}) - 1)(\varphi(1 - 2e_{jj}) - 1) = 2f'_{ii}2f'_{jj} = 0$. Значит, $d_if_{jj} = f_{jj}d_i = 0$ для всех $j \geqslant 3$, $i = 1, 2$. Но тогда, воспользовавшись полученным диагональным видом элемента $d_i$, получаем, что $d_i = 0$. Пункт 1 доказан.

*Пункт 2.* Покажем, что в предложении 1 матричные единицы $f_{ij}$ можно выбрать так, что

$$\varphi(s_{ij}) = 1 - f_{ii} - f_{jj} + f_{ij} + f_{ji}.$$

Рассмотрим систему матричных единиц $e'_{11} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22} - e_{12} - e_{21}), e'_{22} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22} + e_{12} + e_{21}), e'_{ii} = e_{ii}, i \geqslant 3$. Тогда в силу п. 1 имеем

$$\varphi(1 - 2e'_{11}) = \varphi(s_{12}) = 1 = f_{11} - f_{22} + a_{11}f_{11} + a_{22}f_{22} + a_{12}f_{12} + a_{21}f_{21}. \tag{4}$$

Так как $s_{12}(1 - 2e_{11}) = (1 - 2e_{22})s_{12}$, то $\varphi(s_{12})(1 - 2f_{11}) = (1 - 2f_{22})\varphi(s_{12})$, следовательно, $a_{11} = a_{22} = 0$. А поскольку $s_{12}^2 = 1$, то $a_{21} = a_{12}^{-1}$. Сопрягая равенство (4) образами матриц $s_{1i}$ и $s_{2j}$, мы можем получить аналогичное представление для всех матриц $\varphi(s_{ij})$. В частности, при $j = i + 1$ имеем $\varphi(s_{i,i+1}) = 1 - f_{ii} - f_{i+1,i+1} + a_i f_{i,i+1} + a_i^{-1} f_{i+1,i}$.

Положим $C = \mathrm{diag}\,[c_1, c_2, \dots]$, где $c_1 = 1, c_{i+1} = a_1^{-1} \dots a_i^{-1}$, $f'_{ij} = \alpha^{-1}(C\alpha(f_{ij})C^{-1})$. Тогда легко видеть, что $f'_{i,i+1} = a_i f_{i,i+1}, f'_{ii} = f_{ii}$. Следовательно, $\varphi(s_{i,i+1}) = 1 - f'_{ii} - f'_{i+1,i+1} + f'_{i,i+1} + f'_{i+1,i}$, откуда $\varphi(s_{ij}) = 1 - f'_{ii} - f'_{jj} + f'_{ij} + f'_{ji}$, так как любую транспозицию можно представить в виде произведения транспозиций вида $(i, i+1)$. Пункт 2 доказан.

Далее всюду в качестве матричных единиц $\{f_{ij}\}$ мы будем рассматривать матричные единицы, полученные в п. 2.

*Пункт 3.* Докажем, что

$$\varphi(1 + re_{ij}) = 1 + b_r f_{12} + c_r f_{21}. \tag{5}$$

Положим $e'_{ij} = (1 + \frac{1}{2}re_{12})e_{ij}(1 - \frac{1}{2}re_{12})$, тогда $\{e'_{ij}\}$ — система матричных единиц, такая, что $e_{ii} = e'_{ii}$ при $i \geqslant 3$. Значит, в силу п. 1 мы получаем, что $\varphi(1 - 2e'_{11}) = \varphi(1 - 2e_{11} + re_{12}) = 1 + x, x \in (f_{11} + f_{22})\mathrm{Mat}\,(S)(f_{11} + f_{22})$. Следовательно,

$$\varphi(1 + re_{12}) = \varphi((1 - 2e'_{11})(1 - 2e_{11})) = (1 + x)(1 - 2f_{11}) = 1 - f_{11} - f_{22} + a_r f_{11} + b_r f_{12} + c_r f_{21} + d_r f_{22}.$$

Так как $s_{23}(1 + re_{12})s_{23} = 1 + re_{13}$, то $\varphi(1 + re_{13}) = 1 = f_{11} - f_{33} + a_r f_{11} + b_r f_{13} + c_r f_{31} + d_r f_{33}$. Аналогично поскольку $s_{12}(1 + re_{13})s_{12} = 1 + re_{23}$, то $\varphi(1 + re_{23}) = 1 - f_{22} - f_{33} + a_r f_{22} + b_r f_{23} + c_r f_{32} + d_r f_{33}$. Далее имеем $(1+re_{12})(1+se_{13}) = (1+se_{13})(1+re_{12})$, следовательно, $\begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 \\ c_r & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s & 0 & b_s \\ 0 & 1 & 0 \\ c_s & 0 & d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_s & 0 & b_s \\ 0 & 1 & 0 \\ c_s & 0 & d_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 \\ c_r & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Приравнивая элементы на соответствующих местах, мы видим, что

$$b_r = a_s b_r, c_r = c_r a_s, c_r b_s = 0 \text{ для всех } r, s \in R. \tag{6}$$

Аналогично из $(1 + re_{13})(1 + se_{23}) = (1 + se_{23})(1 + re_{13})$ получаем

$$b_r = b_r d_s, c_r = d_s c_r, b_s c_r = 0 \text{ для всех } r, s \in R. \tag{7}$$

Имеем $(1 + re_{12})^{-1} = 1 - re_{12} = (1 - 2e_{11})(1 + re_{12})(1 - 2e_{11})$, значит, $\varphi(1 - re_{12}) = 1 - f_{11} - f_{22} + a_r f_{11} - b_r f_{12} - c_r f_{21} + d_r f_{22}$. Из соотношений $(1 + re_{12})(1 - re_{12}) = 1$, (6) и (7) следует, что $a_r^2 = d_r^2 = 1$.

Имеем равенство $1 + re_{13} = [1 + re_{12}, 1 + e_{23}]$, откуда, применив отображение $\varphi$, выводим $a_r = 1 - b_r a_1 c_r, d_r = 1 - c_1 d_r b_1$. Учитывая соотношения (6), (7), получаем $1 = a_r^2 = a_r - b_r a_1 c_r a_r = a_r - b_r a_1 c_r$. Следовательно, $a_r = 1 + b_r a_1 c_r$ и $a_r = 1$. Аналогично получаем равенство $d_r = 1$. Пункт 3 доказан.

*Пункт 4.* Покажем, что $b_1^2 = b_1$ и $b_r = b_1 b_r = b_r b_1$.

Выполнено равенство $1 + e_{13} = [1 + e_{12}, 1 + e_{23}]$. Применим к нему отображение $\varphi$ и получим, что $b_1^2 = b_1, c_1^2 = -c_1$.

Подставив в соотношение $\varphi(1 + re_{13}) = [\varphi(1 + re_{12}), \varphi(1 + e_{23})]$ элементы $a_r = a_1 = 1, d_r = d_1 = 1$, получим $b_r = b_r b_1$. Аналогично из равенства $1 + re_{13} = [1 + e_{12}, 1 + re_{23}]$ выводим $b_r = b_1 b_r$. Пункт 4 доказан.

Рассмотрим элемент $e' = \mathrm{diag}\,[b_1, b_1, \dots]$ и элементы $e_k = \mathrm{diag}\,[b_1, \dots, b_1, 0, \dots]$, где $b_1$ повторяется на диагонали $k$ раз. Тогда элемент $1 - 2e_k$ содержится в $\mathrm{GL}\,(S_1), S_1 = f_{11}\mathrm{Mat}\,(S)f_{11}$. В силу перестановочности с элементом $1 - 2e_{ii}$ и с соответствующими $s_{tj}$ элемент $\varphi^{-1} \circ \alpha^{-1}(1 - 2e_k)$ имеет вид $\mathrm{diag}\,[\alpha_k, \dots, \alpha_k, 1, \dots]$, где $\alpha_k$ повторяется на диагонали $k$ раз. Из полученного описания элементов $\varphi(1 + re_{12})$ следует, что $\varphi^{-1} \circ \alpha^{-1}(1 - 2e_k)$ коммутирует с матрицей $1 + re_{12}$ для всех $r \in R$ при $k \geqslant 2$. Значит, $\alpha_k \in Z(R)$, а из этого в свою очередь получаем, что $e'$ — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}\,(S_1)$.

Имеем $\mathrm{Mat}\,(S_1) = e'\mathrm{Mat}\,(S_1) \oplus (1 - e')\mathrm{Mat}\,(S_1)$. Определим отображения $\theta_3 : R \to b_1 f_{11}\mathrm{Mat}\,(S)f_{11}b_1$ и $\theta_4 : R \to (1 - b_1)f_{11}\mathrm{Mat}\,(S)f_{11}(1 - b_1)$ по правилу $\theta_3(r) = b_r, \theta_4(r) = -c_r$. Легко видеть, что $\theta_3$ — гомоморфизм колец, а $\theta_4$ — антигомоморфизм колец, причем в силу равенства (5)

$$\varphi(1 + re_{ij}) = 1 + \theta_3(r)f_{ij} - \theta_4(r)f_{ji}. \tag{8}$$

Определим $\theta_1 : \langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to e'\langle \mathrm{GL}\,(S_1)\rangle$ и $\theta_2 : \langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to (1-e')\langle \mathrm{GL}\,(S_1)\rangle$ по правилу

$$(\theta_1(A))_{ij} = \theta_3(a_{ij}),\ (\theta_2(A))_{ij} = \theta_4(a_{ji}).$$

Тогда $\theta_1$ — гомоморфизм колец, $\theta_2$ — антигомоморфизм колец. Также, согласно (8), имеем $\alpha(\varphi(A)) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1})$ для всех $A \in \mathrm{E}\,(R)$.

В силу леммы 2 найдется $e$ — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}\,(S)$, такой, что $\alpha(e\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle) = e'\langle \mathrm{GL}\,(S_1)\rangle$. Отсюда следует, что $\alpha((1-e)\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle) = (1-e')\langle \mathrm{GL}\,(S_1)\rangle$. Тогда отображения $\alpha^{-1}\circ\theta_1 : \langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to e\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle, \alpha^{-1}\circ\theta_2 : \langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to (1-e)\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle$ также будут являться кольцевыми гомоморфизмом и антигомоморфизмом соответственно. Эти отображения мы также будем называть $\theta_1$ и $\theta_2$ соответственно. Тогда будет выполнено равенство $\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1})$ для всех $A \in \mathrm{E}\,(R)$.

Пусть $I, J$ — идеалы в $S$, такие, что $\mathrm{Mat}\,(I) = e\mathrm{Mat}\,(S)$, $\mathrm{Mat}\,(J) = (1-e)\mathrm{Mat}\,(S)$. Тогда $I \oplus J = S$. Положим $M_1 = \varphi^{-1}(\mathrm{GL}\,(S, I)), N_1 = \varphi^{-1}(\mathrm{GL}\,(S, J)$. По лемме 1 получаем $M_1 = \mathrm{GL}\,(R, hR), N_1 = \mathrm{GL}\,(R, (1-h)R)$, где $h$ — центральный идемпотент кольца $R$.

Согласно (8), $h\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \subseteq \ker\theta_2, (1-h)\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \subseteq \ker\theta_1$, а в силу того, что $\varphi$ — изоморфизм, получаем $\ker\theta_1 \cap \ker\theta_2 = \{0\}$. Следовательно, $\ker\theta_1 = (1-h)\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle$, $\ker\theta_2 = h\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle$, т.е. $\theta_1 : h\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to e\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle$, $\theta_2 : (1-h)\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to (1-e)\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle$ — инъективные отображения. Проводя аналогичные рассуждения для отображения $\varphi^{-1}$, получаем, что $\theta_1, \theta_2$ сюръективны, т.е. являются изоморфизмом и антиизоморфизмом колец соответственно. Теорема доказана.

Полученные при описании изоморфизма стабильных групп кольцевые изоморфизм и антиизоморфизм могут быть сами описаны при помощи основного результата работы [10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Schreier O., van der Waerden B.L.* Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1928. **6**. 303–322.
2. *Dieudonne J.* On the automorphisms of the classical groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1951. **2**. 1–195.
3. *Rickart C.E.* Isomorphic group of linear transformations, I // Amer. J. Math. 1950. **72**. 451–464.
4. *Shi-jian Yan.* Linear groups over a ring // Chinese Math. 1965. **7**, N 2. 163–179.
5. *Голубчик И.З., Михалев А.В.* Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1983. № 3. 61–72.
6. *Зельманов Е.И.* Изоморфизмы линейных групп над ассоциативным кольцом // Сиб. матем. журн. 1985. **26**, № 4. 49–67.
7. *Голубчик И.З.* Линейные группы над ассоциативными кольцами: Докт. дис. Уфа, 1997.
8. *Бунина Е.И.* Автоморфизмы и элементарная эквивалентность групп Шевалле и других производных структур: Докт. дис. М., 2010.
9. *Hahn A.J., O'Meara O.T.* The Classical Groups and K-theory. Berlin; N.Y.: Springer-Verlag, 1989.
10. *Abrams G.* Infinite matrix types which determine Morita equivalence // Arch. Math. 1986. **46**, N 1. 33–37.


Поступила в редакцию
25.03.2013

---

УДК 517.98

# АДДИТИВНОСТЬ ГОМОЛОГИЧЕСКИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ДЛЯ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

**С. Б. Табалдыев**[1]

Доказано, что если $A = C(\Omega)$, где $\Omega$ — бесконечный метризуемый компакт, у которого производное множество некоторого конечного порядка пусто, то для любой унитальной банаховой алгебры $B$ глобальные размерности и биразмерности банаховых алгебр $A \widehat{\otimes} B$ и $B$ связаны равенствами $\mathrm{dg}\, A \widehat{\otimes} B = 2 + \mathrm{dg}\, B$ и $\mathrm{db}\, A \widehat{\otimes} B = 2 + \mathrm{db}\, B$. Тем самым получено частичное расширение одного результата Ю. В. Селиванова.

[1] *Табалдыев Сейтек Болотбекович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. высшей математики ФН-1 МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: seytek@gmail.com.