

ТАБЛИЧНО ДОПУСТИМЫЕ ПРАВИЛА ВЫВОДА

В. В. РИМАЦКИЙ

Введение

Исследование допустимых правил вывода, которые в 1955 ввёл Лоренцен, на сегодняшний день развивается во многих направлениях. Как правило, особое внимание уделяется допустимым правилам индивидуальных, базовых систем. Например, проблема допустимости в логиках Int , $S4$ и многих других была решена в [1]. Не меньший интерес вызывает проблема описания конечного множества допустимых правил, называемых *базисом допустимых правил*, из которых все остальные будут выводиться как следствия. Естественно, что проблема конечной базируемости по допустимости также решалась в первую очередь для конкретных логик. Например, в [2, 3], а затем как следствие более общих теорем в [1, гл. 4] было показано, что практически все базовые системы ($S4$, Grz , GL , Int , KC) не имеют конечного базиса допустимых правил вывода от конечного числа переменных. В то же время, в [4, 5] было показано, что целые классы достаточно „сильных“ табличных логик имеют конечный базис по допустимости.

В данной статье, с использованием введённой в [6] редукции интуиционистских правил вывода, описывается базис правил вывода, допустимых сразу во всех табличных (финитно аппроксимируемых) логиках, расширяющих одну из логик IPC и Grz . Как следствие получен также достаточно простой семантический критерий допустимости заданного правила вывода

во всех табличных (финитно аппроксимируемых) суперинтуиционистских логиках.

§ 1. Определения, предварительные результаты

Вначале кратко напомним необходимые определения и результаты (подробнее см. [1, 7]).

Фрейм $\mathcal{F} := \langle F, R \rangle$ — это пара, где F — непустое множество, R — бинарное отношение на F . Базисное множество и сам фрейм далее будем обозначать одной и той же буквой. Ниже рассматриваем только логики, расширяющие Int или Grz , поэтому все фреймы считаются рефлексивными и транзитивными, а сгустки — одноэлементными.

Напомним: если $\langle W, R \rangle$ — некоторый фрейм, то множество $C \subseteq W$ называется *сгустком*, если

- 1) для любых $x, y \in C$ выполняется xRy ;
- 2) для любых $x \in C$ и $y \in W$ выполняется $(xRy \ \& \ yRx) \implies y \in C$.

Сгусток называется *собственным*, если $|C| > 1$, и *одноэлементным* в противном случае. Для элемента $a \in F$ через $C(a)$ обозначим сгусток, порождённый элементом a .

Любое множество попарно несравнимых по отношению R сгустков фрейма F называется *антицепью*. Антицепь \mathcal{A} называется *нетривиальной*, если \mathcal{A} состоит по крайней мере из двух различных сгустков. Для любого $c \in F$ положим $c^R = \{x \mid cRx\}$ и $c^{<R} = c^R \setminus C(c)$. Сгусток $\{a\}$ из F называется *ко-накрытием множества* $X \subseteq F$, если $a^R \setminus \{a\} = X^R := \cup \{x^R \mid x \in X\}$. Говорим, что *элемент* a является *ко-накрытием множества* $X \subseteq F$, если сгусток $\{a\}$ образует ко-накрытие. Далее под *ко-накрытием* (без указания множества X) понимаем одноэлементный сгусток, являющийся ко-накрытием.

Глубиной элемента x *модели (фрейма)* F называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего x . Множество всех элементов фрейма F глубины не более n будем обозначать через $S_{\leq n}(F)$, а множество элементов глубины n — через $S_n(F)$.

Правило вывода $\alpha_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \alpha_k(x_1, \dots, x_n)/\beta(x_1, \dots, x_n)$ называют *допустимым* (и пишут $r \in \text{Ad}(\lambda)$) в логике λ , если для любых формул $\delta_1, \dots, \delta_n$ из того, что $\alpha_j(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \lambda$ для всех j , следует $\beta(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \lambda$.

Допустимые правила пропозициональной модальной логики λ имеют алгебраическое описание — им соответствуют квазитожества, истинные на свободной алгебре счётного ранга $\mathfrak{F}_w(\lambda)$ многообразия алгебр $\text{Var}(\lambda)$, соответствующего данной логике, т. е. справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1 [1, 3.5]. *Правило вывода*

$$r = \{\alpha_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \alpha_k(x_1, \dots, x_n)/\beta(x_1, \dots, x_n)\}$$

допустимо в логике λ тогда и только тогда, когда квазитожество

$$r^* = \{\alpha_1(x_1, \dots, x_n) = 1 \& \dots \& \alpha_k(x_1, \dots, x_n) = 1 \implies \beta(x_1, \dots, x_n) = 1\}$$

истинно на свободной алгебре счётного ранга $\mathfrak{F}_w(\lambda)$ из многообразия алгебр $\text{Var}(\lambda)$.

Правило r называется *следствием правил r_1, \dots, r_k в логике λ* , если заключение r выводимо из посылок r с помощью теорем λ , правил r_1, \dots, r_k и постулированных правил вывода λ . Множество $\text{Ad}^*(\lambda)$ допустимых правил логики λ называем *базисом допустимых правил*, если для любого допустимого правила r найдутся правила $r_1, \dots, r_k \in \text{Ad}^*(\lambda)$ такие, что r выводимо из r_1, \dots, r_k в логике λ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2 [1, §§ 3.5, 4.1]. *Правила r_1, \dots, r_k образуют базис допустимых правил вывода логики λ тогда и только тогда, когда r_1^*, \dots, r_k^* образуют базис квазитожеств $\mathfrak{F}_w(\lambda)$.*

Говорим, что правило вывода r *таблично допустимо над логикой λ_0* , если r допустимо в любой табличной логике λ , расширяющей логику λ_0 , этот факт обозначим $r \in \text{TAd}(\lambda_0)$. Множество таблично допустимых правил \mathcal{B} называем *базисом таблично допустимых над логикой λ_0 правил вывода*, если любое таблично допустимое правило r выводимо из \mathcal{B} в произвольной табличной логике λ , расширяющей логику λ_0 , т. е. $\mathcal{B} \vdash_\lambda r$ для всех $r \in \text{TAd}(\lambda_0)$ и всех $\lambda \supseteq \lambda_0$.

В дальнейшем потребуются n -характеристические модели Крипке, с помощью которых будут описаны свободные алгебры конечных рангов из многообразия $\text{Var}(\lambda)$. Схема построения и общие свойства n -характеристической для логики λ модели $C_n(\lambda)$ содержатся в [1, 3.3–3.5]. Напомним, что фрейм $\mathcal{F}_n^+(\lambda)$ свободной алгебры $\mathcal{F}_n(\lambda) \in \text{Var}(\lambda)$ ранга n обладает следующими свойствами: первый слой данного фрейма состоит из всех возможных сгустков мощности не более 2^n , любая нетривиальная антицепь сгустков имеет в $\mathcal{F}_n^+(\lambda)$ ко-накрытие, порождающее λ -фрейм.

Для исследования также потребуется редукция любого интуиционистского правила вывода в более простую форму, называемую в дальнейшем *полуредуцированной*. Определим её, как и в [6], следующим образом. Пусть задано правило вывода $r := \alpha_1, \dots, \alpha_n / \beta$. Опишем, как трансформировать r в полуредуцированную форму. Первое, возьмём правило $r_1 := \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n / \beta$, затем правило

$$r_2 := \frac{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge (\beta \equiv x_0)}{x_0},$$

где x_0 — новая переменная, не входящая в правило r_1 . Очевидно, что правила вывода r , r_1 и r_2 эквивалентны относительно допустимости в любой суперинтуиционистской логике и истинности в любой псевдо-булевой алгебре, а также на любом фрейме, т. е. они эквивалентны в любом семантическом смысле.

Правило r_2 имеет форму α / x_0 ; теперь разложим посылку r_2 , вводя новую переменную, чтобы максимально упростить формулы посылки. Сначала введём правило

$$r_3 := \frac{x, x \equiv \alpha}{x_0},$$

где x — новая переменная, не входящая в r_2 ; очевидно, что r_3 эквивалентно r_2 в любом из рассмотренных выше смыслов.

Назовём переменную x , изолированную в посылке r_3 , *главной переменной посылки* и обозначим её через $mv(r_3)$. Предположим, что уже имеется правило r_4 , эквивалентное r , в форме

$$r_4 := \frac{x, x_1 \equiv \gamma_1, \dots, x_k \equiv \gamma_k}{x_0},$$

где любая переменная x_i не входит в формулу γ_i .

Возьмём первую формулу γ_i из посылки одного из видов

(i) $\gamma_i = \delta_1 \circ \delta_2$, где $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, а δ_1 или δ_2 не являются переменными,

(ii) $\gamma_i = \neg \delta$, где δ не является переменной.

В случае (i) введём правило

$$r_5 := \frac{x, \{x_j \equiv \gamma_j \mid 1 \leq j < i, i < j \leq k\}, y_1 \equiv \delta_1, y_2 \equiv \delta_2, x_i \equiv y_1 \circ y_2}{x_0},$$

где y_1 и y_2 — новые переменные, не входящие в r_4 . Для случая (ii) положим

$$r_5 := \frac{x, x_1 \equiv \gamma_1, \dots, x_{i-1} \equiv \gamma_{i-1}, x_{i+1} \equiv \gamma_{i+1}, \dots, x_k \equiv \gamma_k, y \equiv \delta, x_i \equiv \neg y}{x_0},$$

где y — новая переменная, не входящая в r_4 .

Продолжая описанную процедуру до тех пор, пока среди формул посылки не останется формул видов

(i) $\gamma_i = \delta_1 \circ \delta_2$, где $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, а δ_1 или δ_2 не являются переменными,

(ii) $\gamma_i = \neg \delta$, где δ не является переменной,

получим правило $sr(r)$, которое назовем *полуредуцированной формой* правила r . Опять же главной переменной $mv(sr(r))$ правила $sr(r)$ является переменная x , входящая в посылку $sr(r)$ как формула x . Взаимосвязь исходного правила r и его полуредуцированной формы $sr(r)$ отмечена в следующих леммах.

ЛЕММА 1.3 [6]. *Правила $sr(r)$ и r эквивалентны относительно допустимости в любой суперинтуиционистской логике и семантической истинности в любой псевдобулевой алгебре и фрейме Крипке.*

ЛЕММА 1.4 [6]. *Любое правило r является следствием правила $sr(r)$ в любой суперинтуиционистской логике λ , т. е. $sr(r) \vdash_\lambda r$.*

Пусть $Var(sr(r))$ — множество всех переменных правила $sr(r)$ в полуредуцированной форме. Ниже $Pr(sr(r))$ обозначает множество всех посылок правила $sr(r)$ и $Con(sr(r))$ — заключение этого правила. Рассмотрим множество \mathcal{B} , состоящее из всех правил вывода в полуредуцированной форме, у которых для любых переменных x, x_1, x_2 из $sr(r)$ и произвольного подмножества \mathcal{U} из $2^{Var(sr(r))}$ не выполняется хотя бы одно из условий (i)–(vi), определенных ниже:

- (i) $\forall S \in \mathcal{Y} [x \in S \& x \equiv x_1 \wedge x_2 \in Pr(sr(r)) \implies (x_1 \in S) \& (x_2 \in S)];$
 $\forall S \in \mathcal{Y} [x \equiv x_1 \wedge x_2 \in Pr(sr(r)) \& (x_1 \in S \& x_2 \in S) \implies (x \in S)];$
- (ii) $\forall S \in \mathcal{Y} [x \in S \& x \equiv x_1 \vee x_2 \in Pr(sr(r)) \implies (x_1 \in S) \vee (x_2 \in S)];$
 $\forall S \in \mathcal{Y} [x \equiv x_1 \vee x_2 \in Pr(sr(r)) \& x_i \in S (i = 1 \vee i = 2) \implies (x \in S)];$
- (iii) $\forall S \in \mathcal{Y} [x \in S \& x \equiv (x_1 \rightarrow x_2) \in Pr(sr(r)) \implies$
 $\implies \forall S_1 \in \mathcal{Y} (S \subseteq S_1 \implies (x_1 \in S_1 \implies x_2 \in S_1))];$
 $\forall S \in \mathcal{Y} [x \equiv (x_1 \rightarrow x_2) \in Pr(sr(r)) \implies [(\forall S_1 \in \mathcal{Y} (S \subseteq S_1 \implies$
 $\implies (x_1 \in S_1 \implies x_2 \in S_1))] \implies x \in S];$
- (iv) $\forall S \in \mathcal{Y} [x \in S \& (x \equiv \neg x_1) \in Pr(sr(r)) \implies [\forall S_1 \in \mathcal{Y}$
 $(S \subseteq S_1 \implies x_1 \notin S_1)]];$
 $\forall S \in \mathcal{Y} [x \equiv \neg x_1 \in Pr(sr(r)) \implies [\forall S_1 \in \mathcal{Y} (S \subseteq S_1 \implies$
 $\implies x_1 \notin S_1) \implies (x \in S)]];$
- (v) $\forall k > 1 \forall S_1, \dots, S_k \in \mathcal{Y} \exists S \in \mathcal{Y} S \subseteq S_1 \cap \dots \cap S_k$ и
- (a) $[x \equiv \neg x_1 \in Pr(sr(r)) \& (x \in S_1 \cap \dots \cap S_k)] \implies (x \in S);$
- (b) $[x \equiv (x_1 \rightarrow x_2) \in Pr(sr(r)) \& (x \in S_1 \cap \dots \cap S_k)] \implies$
 $\implies (x \in S) \vee (x_1 \in S \& x_2 \notin S);$
- (vi) $\forall S \in \mathcal{Y} (mv(sr(r)) \in S)$ и $\exists S \in \mathcal{Y} (x_0 \notin S).$

ТЕОРЕМА 1.5 [6]. *Множество \mathcal{B} является базисом всех правил вывода, допустимых в логике Int.*

§ 2. Базисы таблично допустимых правил вывода

Рассмотрим множество TAd(Int) всех таблично допустимых правил вывода над интуиционистской логикой Int. Вполне очевидно, что

ЛЕММА 2.1. *Имеет место $TAd(Int) \subseteq Ad(Int)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть правило вывода r зависит от n переменных, $r \in TAd(Int)$. Если r не допустимо в логике Int, то, по [1, теор. 3.5.8], r опровергается на n -характеристической модели $C_n(Int)$, т. е. $C_n(Int) \models_V \alpha$ для всех $\alpha \in Pr(r)$ и существует $y \in C_n(Int)$ такой, что $y \not\models_V \beta$ при некотором означивании V . Несложно показать, что правило r опровергается на модели $C_n(\lambda(y^R)) \sqsubset C_n(Int)$ при том же означивании V .

Следовательно, в силу упомянутой теоремы правило r не является допустимым в табличной логике $\lambda(y^R)$, значит, не будет таблично допустимым над Int . \square

Определим подмножество $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ как множество тех правил из множества \mathcal{B} , для которых при любых переменных x, x_1, x_2 из $sr(r)$ выполняется условие

(v') для любых $k > 1$ и $S_1, \dots, S_k \in \text{Var}(Pr(sr(r)))$ существует $S \in \text{Var}(Pr(sr(r)))$ такой, что $S \subseteq S_1 \cap \dots \cap S_k$ и

- (a) $[x \equiv \neg x_1 \in Pr(sr(r)) \& (x \in S_1 \cap \dots \cap S_k)] \implies (x \in S)$,
- (b) $[x \equiv (x_1 \rightarrow x_2) \in Pr(sr(r)) \& (x \in S_1 \cap \dots \cap S_k)] \implies$
 $\implies [(x \in S) \vee (x_1 \in S \& x_2 \notin S)]$.

Заметим, что это условие выполняется, напр., для допустимых правил логики Int , посылка которых истинна на $C_n(\text{Int})$ при любых означиваниях. Действительно, пусть $S_i := V(c_i) = \{x_j \mid c_i \models x_j\}$, а элемент c — ко-накрытие минимальных элементов среди $c_1, c_2, \dots, c_k \in C_n(\text{Int})$. Такой c существует по построению n -характеристической модели $C_n(\text{Int})$. В силу стабильности интуиционистского означивания вверх получаем $V(c) := S \subseteq S_1 \cap \dots \cap S_k$. Другим примером таблично допустимого правила может служить правило $p \wedge \neg p/p$. Для модальных логик над логикой Grz одним из примеров таблично допустимого правила является правило $\diamond x \wedge \neg \diamond x/y$, посылка которого не выполнима на всех Grz -фреймах.

Покажем теперь, что множество \mathcal{B}' является базисом множества $\text{TAd}(\text{Int})$. Для доказательства этого результата необходимо показать, что во-первых справедлива

ТЕОРЕМА 2.2. *Имеет место $sr(r) \in \mathcal{B}' \implies sr(r) \in \text{TAd}(\text{Int})$, т. е. каждое правило вывода $sr(r) \in \mathcal{B}'$ допустимо в любой табличной суперинтуиционистской логике λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует табличная логика λ такая, что правило $sr(r)$ принадлежит \mathcal{B}' , но не является допустимым в λ . Следовательно, при некотором означивании V выполняются: $C_n(\lambda) \models_V \alpha$ для любого $\alpha \in Pr(sr(r))$ и существует $a \in C_n(\lambda)$ такой, что $a \not\models_V x_0$, где $n := |\text{Var}(sr(r))|$. По [1, лемма 3.3.12], $C_n(\lambda) \sqsubseteq C_n(\text{Int})$, и по построению

n -характеристической модели имеем $S_1(C_n(\lambda)) = S_1(C_n(\text{Int}))$. Значит, если распространить означивание V с модели $C_n(\lambda)$ на модель $C_n(\text{Int})$ так, чтобы все посылки правила $sr(r)$ остались истины на модели $C_n(\text{Int})$, то по [1, теор. 3.5.8] данное правило не будет допустимо в логике Int .

Распространим означивание V с модели $C_n(\lambda)$ на модель $C_n(\text{Int})$ следующим образом.

1) В силу $S_1(C_n(\lambda)) = S_1(C_n(\text{Int}))$ и того, что $C_n(\lambda) \models_V \alpha$ для любого $\alpha \in Pr(sr(r))$, справедливо $e \models_V \alpha$ для любых $e \in S_1(C_n(\text{Int}))$ и $\alpha \in Pr(sr(r))$.

2) Пусть для любого $e \in S_{\leq m}(C_n(\text{Int}))$ означивание V уже определено так, что оно совпадает с исходным означиванием на $C_n(\lambda)$ и при этом

$$b \models_V \alpha \text{ для любых } b \in S_{\leq m}(C_n(\text{Int}) \cup C_n(\lambda)) \text{ и } \alpha \in Pr(sr(r)); \quad (1)$$

$$\text{для любого } b \in S_{\leq m}(C_n(\text{Int}) \setminus C_n(\lambda)) \text{ существует} \quad (2)$$

$$u \in C_n(\lambda) \text{ такой, что } V(b) = V(u).$$

Рассмотрим элемент $c \in S_{m+1}(C_n(\text{Int}) \setminus C_n(\lambda))$. Если $c^{<R} = b^R$, т. е. из данного элемента непосредственно R -достижим только элемент b глубины m , то на b означивание уже определено и по (1) выполняется $b \models_V \alpha$. Следовательно, можно определить $V(c) := V(b)$. Элемент c является непосредственным R -предшественником элемента b и его дублем (они изоморфны как модели), истинность формул на них совпадает, т. е. $c \models_V \alpha$ для любого $\alpha \in Pr(sr(r))$.

Пусть теперь $c^{<R} = b_1^R \cup \dots \cup b_k^R$, т. е. c является ко-накрытием антицепи b_1, \dots, b_k . Значит, каждый элемент b_i имеет глубину не более чем m , и следовательно, на них означивание V уже определено. По (2) для каждого i существует $u_i \in C_n(\lambda)$ такой, что $V(b_i) = V(u_i)$.

Чтобы применить условие (v') определим $S_i := V(u_i)$, (напомним, что $x \in S := V(a) \iff a \models_V x$). Следовательно, $V(b_i) = S_i$ и по (v') существует S с требуемыми свойствами.

Зафиксируем такое S и определим $V(c) := S$. При этом по построению n -характеристической модели и определению \mathcal{U} существует элемент

$a \in C_n(\lambda)$ такой, что $V(a) = S$, т. е. (2) выполняется при данном означивании на c . Теперь необходимо показать, что при таком определении $V(c)$ выполняется $c \models_V \alpha$ для любого $\alpha \in Pr(sr(r))$.

(i) Для любого $x \in Var(sr(r))$ соотношение $[c \models_V x \iff x \in V(c) = S = V(a) \iff a \models_V x \text{ для } a \in C_n(\lambda)]$ выполняется непосредственно по определению $V(c)$ и (2). Следовательно, если $\alpha = \{x \equiv [x_1 \wedge x_2]\}$ или $\alpha = \{x \equiv [x_1 \vee x_2]\}$, то истинность формулы α на элементах c и a зависит только от истинности входящих в α переменных, которая, как уже было замечено, на c и a совпадает. Если $\alpha \in Pr(sr(r))$, то справедливо $a \models_V \alpha$, и значит, $c \models_V \alpha$.

(ii) Пусть $\alpha = \{x \equiv [x_1 \rightarrow x_2]\} \in Pr(sr(r))$. Предположим, что $c \models_V \models_V x$. Тогда $x \in S = V(c)$. Если $c \leq u$, то $V(c) \subseteq V(u) = V(e)$, $e \in C_n(\lambda)$, по (2) или по выбору V на элементах глубины $m + 1$. Следовательно, $x \in V(u) = V(e)$. По предположению выполняется также $e \models_V \alpha$. Значит, $e \models_V x_1 \rightarrow x_2$. Если $c \models_V x_1$, то $x_1 \in V(u) = V(e)$, и выполняется $u \models_V x_1$, что влечёт $u \models_V x_2$. Таким образом, справедливо $u \models_V x_1 \implies u \models_V x_2$. Итак, $c \models_V x_1 \rightarrow x_2$.

Если $c \models_V x_1 \rightarrow x_2$, то в силу стабильности означивания вверх заключаем $b_i \models_V x_1 \rightarrow x_2$ для любого i . Значит, по (1) справедливо $b_i \models_V x$ для любого i . Отсюда $x \in S_i$ для любого i , что по (v') влечёт

(a) $x \in S = V(c)$, что и требовалось;

или

(b) $x_1 \in S$ и $x_2 \notin S$, это невозможно, поскольку $c \models_V x_1$ и $c \not\models_V x_2$ противоречат $c \models_V x_1 \rightarrow x_2$.

Итак, $c \models_V x$. Следовательно, в этом случае $c \models_V \alpha$.

(iii) Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = [x \equiv \neg x_1] \in Pr(sr(r))$. Пусть $c \models_V x$. Тогда $x \in S = V(c)$. Если $c \leq u$, то $V(c) \subseteq V(u) = V(e)$, $e \in C_n(\lambda)$, по (2) или по выбору V на элементах глубины $m + 1$. Следовательно, $x \in V(u) = V(e)$. Выполняется также $e \models_V \alpha$. Значит, справедливо $e \models_V \neg x_1$, откуда $x_1 \notin V(u)$, т. е. $u \not\models_V x_1$. Таким образом, если $c \leq u$, то $u \not\models_V x_1$. Поскольку u выбран произвольно, выполняется $c \models_V \neg x_1$, что и требовалось.

Пусть теперь $c \models_V \neg x_1$. В силу стабильности означивания вверх $b_i \models_V \neg x_1$ для всех i . Значит, из (1) вытекает $b_i \models_V x$ для всех i . Следовательно, $x \in S_i$ для всех i , что по п. „а“ условия (v') влечёт $x \in V(c) = S$, и значит, $c \models_V x$. Таким образом, рассмотрев все возможные случаи, заключаем, что $c \models_V \alpha$.

Все возможные случаи посылок из $Pr(sr(r))$ уже рассмотрены, и выполняется $c \models_V \alpha$ для любого $\alpha \in Pr(sr(r))$. Таким образом, по индукции правило $sr(r)$ опровергается на модели $C_n(\text{Int})$ при означивании V и, по [1, теор. 3.5.8], не будет допустимым в логике Int . В то же время $sr(r) \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ и, следовательно, по теореме 2.1 оно допустимо в логике Int . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 2.3. *Для любого правила $r \in \text{TAd}(\text{Int})$ выполняется $\mathcal{B}' \vdash r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \in \text{TAd}(\text{Int})$, но $\mathcal{B}' \not\vdash r$, т. е. существует табличная логика λ_0 , расширяющая Int , причём $\mathcal{B}' \not\vdash_{\lambda_0} r$. По лемме 1.4, $\mathcal{B}' \not\vdash_{\lambda_0} sr(r)$. В противном случае из \mathcal{B}' будет выводиться и следствие $sr(r)$, а именно, правило r . По [1, теор. 1.4.11], $\mathcal{B}' \vdash_{\lambda_0} sr(r)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}' \models_{\lambda_0} sr(r)$. Следовательно, существует λ_0 -модель \mathfrak{M} с означиванием V , на которой при данном означивании истинны все постулированные правила логики λ_0 , множество \mathcal{B}' и все посылки правила $sr(r)$. В то же время при данном означивании заключение правила $sr(r)$ ложно.

Пусть $y \in \mathfrak{M}$ — минимальный по глубине элемент, на котором ложно $x_0 = \text{Con}(sr(r))$ при означивании V . Рассмотрим открытую подмодель $\mathcal{F} := \langle y^R, V \rangle$ модели \mathfrak{M} . По свойству открытой подмодели справедливо

$$\text{для любого } \alpha \in Pr(sr(r)) \text{ выполняется } y \models_V \alpha, y \not\models_V x_0. \quad (3)$$

Определим одноэлементную модель $\mathcal{E} := \langle e, \leq, W \rangle$; где e — рефлексивный элемент и $e \models_W p \iff y \models_V p$ для всех p . Покажем, что правило $sr(r)$ опровергается на модели \mathcal{E} при означивании W . Действительно, в силу выбора элемента y и по определению W выполняется $e \not\models_W x_0 = \text{Con}(sr(r))$. Остаётся показать, что все формулы из посылки правила $sr(r)$ истинны на модели \mathcal{E} при означивании W . Для этого докажем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Для любого $\alpha \in Pr(sr(r))$ в силу $y \models_V \alpha$ в модели \mathcal{F} при означивании V выполняется $e \models_W \alpha$ в модели \mathcal{E} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha = (x \equiv x_1 \vee x_2) \in Pr(sr(r))$ или $\alpha = (x \equiv x_1 \wedge x_2) \in Pr(sr(r))$. Истинность данной формулы α в обеих моделях зависит только от истинности входящих в неё переменных, которая совпадает на элементах $y \in \mathcal{F}$ и $e \in \mathcal{E}$ по определению W . Вследствии того, что для каждого $\alpha \in Pr(sr(r))$ выполняется $y \models_V \alpha$, имеем $e \models_W \alpha$.

2) Предположим теперь, что $\alpha = (x \equiv x_1 \rightarrow x_2) \in Pr(sr(r))$. Пусть выполняется $e \models_W x$, что по определению W влечет $y \models_v x$ в модели \mathcal{F} . В силу истинности α на модели \mathcal{F} заключаем $y \models_V x_1 \rightarrow x_2$. Если $e \models_W x_1$, то $y \models_V x_1$. Отсюда $y \models_v x_2$ в модели \mathcal{F} . По определению означивания W получаем $e \models_W x_2$. Таким образом, $e \models_W x_1 \implies e \models_W x_2$. Следовательно, $e \models_W x_1 \rightarrow x_2$ выполняется в модели \mathcal{E} .

Предположим теперь, что выполняется $e \models_W x_1 \rightarrow x_2$ в модели \mathcal{E} . Пусть $e \not\models_W x$, тогда $y \not\models_v x$ в модели \mathcal{F} . В силу истинности α на модели \mathcal{F} заключаем $y \not\models_V x_1 \rightarrow x_2$ в модели \mathcal{F} , что влечёт $y \models_V x_1$, $y \not\models_V x_2$. Отсюда $e \models_W x_1$, $e \not\models_W x_2$, что противоречит исходному предположению. Следовательно, справедливо $e \models_W \alpha$ в модели \mathcal{E} .

3) Пусть теперь $\alpha = (x \equiv \neg x_1) \in Pr(sr(r))$. Если $e \models_W x$, то $y \models_V x$. В силу истинности $\alpha \in Pr(sr(r))$ на модели \mathcal{F} выполняется $y \not\models_V x_1$. Следовательно, $e \not\models_W x_1$, т.е. $e \models_W \neg x_1$, что и требовалось показать.

Пусть $e \models_W \neg x_1$. По определению W , $y \not\models_V x_1$ в модели \mathcal{F} . Если $e \not\models_W x$, то $y \not\models_v x$ в модели \mathcal{F} . Отсюда в силу истинности $\alpha \in Pr(sr(r))$ на модели \mathcal{F} заключаем $y \not\models_V \neg x_1$ в модели \mathcal{F} , последнее противоречит исходному предположению. Таким образом, справедливо $e \models_W \alpha$ в модели \mathcal{E} .

Итак, рассмотрев все возможные случаи посылок, получаем, что для каждого $\alpha \in Pr(sr(r))$ справедливо $e \models_W \alpha$ в модели \mathcal{E} . Утверждение доказано.

Отсюда заключаем, что правило $sr(r)$ опровергается на модели \mathcal{E} при означивании W . Рассмотрим теперь табличную суперинтуиционистскую

логику $\lambda := \lambda(e)$, порождённую элементом e (моделью \mathcal{E}). По построению n -характеристической модели модель $C_n(\lambda(e))$ является прямым объединением одноэлементных сгустков. При означивании W , определенном выше, каждый сгусток модели $C_n(\lambda(e))$ изоморфен модели \mathcal{E} . Следовательно, правило $sr(r)$ опровергается на модели $C_n(\lambda(e))$ при означивании W . По [1, теор. 3.5.8] правило $sr(r)$ не будет допустимым в табличной логике $\lambda := \lambda(e)$ и, следовательно, не будет таблично допустимым над логикой Int ; противоречие с исходным предположением теоремы. Таким образом, для любого правила $r \in \text{TAd}(\text{Int})$ выполняется $\mathcal{B}' \vdash r$. Теорема доказана.

Непосредственным следствием предыдущих теорем является следующая

ТЕОРЕМА 2.5. *Множество \mathcal{B}' является базисом всех таблично допустимых правил над логикой Int .*

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Для любого правила r и одноэлементной модели $\mathcal{E} := \langle e, \leq, W \rangle$, где e — рефлексивный элемент, выполняется*

$$r \in \text{TAd}(\text{Int}) \implies \mathcal{E} \models_W r$$

при любом означивании W .

Обратное утверждение неверно. Так, правило $T/\neg\neg p \rightarrow p$ истинно на одноэлементной модели \mathcal{E} при любом означивании, но не является допустимым в логике Int , и, значит, не является таблично допустимым.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Для любого правила $r \in \text{TAd}(\text{Int})$ и произвольной конечной интуиционистской модели \mathcal{M} выполняется $\mathcal{M} \models r$ при любом означивании.*

Действительно, при доказательстве предыдущей теоремы показано: если правило $r \in \text{TAd}(\text{Int})$ ложно на некоторой конечной модели \mathcal{M} , то оно не будет допустимо в табличной логике $\lambda := \lambda(\mathcal{E})$, что противоречит исходному предположению о табличной допустимости правила.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. *Если правило r истинно при любом означивании на произвольной конечной суперинтуиционистской модели \mathcal{M} , то $r \in \text{TAd}(\text{Int})$.*

Действительно, если правило r не является таблично допустимым над Int , т. е. не является допустимым в некоторой табличной суперинтуиционистской логике λ , то данное правило опровергается на модели $C_n(\lambda)$ при некотором означивании W . В силу табличности логики эта модель является конечной; последнее противоречит истинности правила на всех конечных моделях при произвольном означивании.

Из последних двух следствий вытекает

ТЕОРЕМА 2.9 (семантический критерий табличной допустимости). *Для любого правила r и произвольной конечной интуиционистской модели \mathcal{M} выполняется $\mathcal{M} \models r$ при любом означивании $r \in \text{TAd}(\text{Int})$.*

Заметим: если правило r допустимо в любой финитно аппроксимируемой логике λ , расширяющей заданную логику λ_0 , то в силу финитной аппроксимируемости всех табличных логик над λ_0 правило r принадлежит множеству $\text{TAd}(\lambda_0)$. Обратно, пусть правило r не является допустимым во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих заданную логику λ_0 , т. е. не является допустимым в некоторой финитно аппроксимируемой логике λ , расширяющей заданную логику λ_0 . По [1, теор. 3.5.8] правило r опровергается на n -характеристической модели $C_n(\lambda)$ при некотором означивании V , т. е. существует $y \in C_n(\lambda)$ такой, что $y \not\models_V \text{Con}(r)$, для любых $x \in C_n(\lambda)$ и $\alpha \in Pr(r)$ выполняется $x \models_V \alpha$. Несложно убедиться, что правило r не является допустимым в табличной логике $\lambda(y^R)$, т. е. не является таблично допустимым над логикой λ_0 .

Заметим, что в этих рассуждениях логика λ_0 может быть как модальной, так и суперинтуиционистской. Тем самым, доказана

ТЕОРЕМА 2.10. *Правило r допустимо в любой финитно аппроксимируемой модальной или суперинтуиционистской логике λ , расширяющей заданную логику λ_0 , тогда и только если правило r допустимо в любой табличной модальной или суперинтуиционистской логике λ , расширяющей заданную логику λ_0 .*

Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 2.11. *Множество \mathcal{B}' является базисом всех правил*

вывода, допустимых во всех финитно аппроксимируемых логиках λ , расширяющих логику Int .

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 2.12. *Правило r допустимо во всех табличных модальных или суперинтуиционистских логиках λ , расширяющих заданную логику λ_0 , тогда и только тогда, когда правило r допустимо во всех табличных модальных или суперинтуиционистских логиках λ , порождённых корневым конечным фреймом и расширяющих заданную логику λ_0 .*

Известно, что для любого правила вывода r и произвольной суперинтуиционистской логики λ справедливо $r \in \text{Ad}(\lambda) \iff T(r) \in \text{Ad}(\sigma(\lambda))$, где $\sigma(\lambda)$ — наибольший модальный напарник логики λ , T — перевод Гёделя–МакКинси–Тарского пропозициональных формул в модальные (см. напр., [1, теор. 3.2.2]). Определим множество $T(\mathcal{B}') := \{T(r) \mid r \in \mathcal{B}'\}$. Из полученных ранее теорем вытекает

ТЕОРЕМА 2.13. *Множество $T(\mathcal{B}')$ образует базис правил вывода, допустимых во всех табличных (финитно аппроксимируемых) модальных логиках, расширяющих логику Гжегорчика Grz .*

Пусть $r \in T(\mathcal{B}')$ и $r \notin \text{TAd}(\text{Grz})$, т. е. существует табличная логика λ над Grz , в которой r не является допустимым. По определению множества $T(\mathcal{B}')$ существует правило $r_1 \in \mathcal{B}'$ такое, что $T(r_1) = r$, и, по [1, теор. 3.2.2], r_1 не будет допустимо в некоторой табличной суперинтуиционистской логике λ_1 такой, что $\sigma(\lambda_1)\lambda$. Ранее было доказано, что любое правило $r_1 \in \mathcal{B}'$ является таблично допустимым над логикой $\text{Int} = \sigma(\text{Grz})$; противоречие. Значит, для любого $r \in T(\mathcal{B}')$ выполняется $r \in \text{TAd}(\text{Grz})$.

Пусть теперь $r \in (\text{Grz})$, $T(\mathcal{B}') \not\vdash r$, т. е. существует табличная логика λ над Grz , в которой r не выводимо из множества $T(\mathcal{B}')$. По [1, теор. 1.4.11] существует алгебра $\mathfrak{B} \in \text{Var}(\lambda)$ такая, что $\mathfrak{B} \models T(\mathcal{B}') \cup R_p(\lambda)$ и $\mathfrak{B} \models \alpha_i$, $\alpha_i \in \text{Pr}(r)$, с другой стороны, $\mathfrak{B} \not\models \beta$, $\beta \in \text{Con}(r)$, где $R_p(\lambda)$ — множество постулированных правил логики λ . По [1, лемма 2.7.6] выполняется $G(\mathfrak{B}) \models \alpha_i$, где $\alpha_i \in \text{Pr}(r)$, $G(\mathfrak{B}) \not\models \beta$, где $\beta \in \text{Con}(r)$ и $G(\mathfrak{B}) \in \text{Var}(\lambda_1)$. Опять же по [1, теор. 1.4.11] правило r_1 не будет выводимо из базиса \mathcal{B}'

в табличной логике λ_1 ($\sigma(\lambda_1) = \lambda$). Полученное противоречие завершает доказательство первой части теоремы.

Вторая часть непосредственно следует из теоремы 2.12. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. V. Rybakov, Admissibility of logical inference rules (Stud. Log. Found. Math., **136**), Amsterdam, Elsevier Sci. Publ. B.V., 1997.
2. В. В. Рыбаков, Базисы допустимых правил логик $S4$ и Int , Алгебра и логика, **24**, № 1 (1985), 87–107.
3. В. В. Рыбаков, Базисы допустимых правил модальной системы Grz и интуиционистской логики, Матем. сб., **128**(170), № 3(11) (1985), 321–338.
4. В. В. Римацкий, Базисы допустимых правил вывода табличных модальных логик глубины 2, Алгебра и логика, **35**, № 5 (1996), 612–622.
5. V. V. Rimatskiy, Finite bases of admissible inference rules for modal logics of width 2, Bull. Sect. Log., Univ. Łódź, Dep. Log., **26**, No. 3 (1997), 126–134.
6. V. V. Rybakov, M. Terziler, V. Rimazki, Bases in semi-reduced form for admissible rules of the intuitionistic logic IPC, Math. Log. Q., **46**, No. 2 (2000), 207–218.
7. A. Chagrov, M. Zakharyashev, Modal logics (Oxford Logic Guides, **35**), Oxford, Clarendon Press, 1997.

Поступило 10 мая 2007 г.

Адрес автора:

РИМАЦКИЙ Виталий Валентинович, каф. высш. матем., Красн. ин-т архитект. строит., Сиб. Федер. ун-т, пр. Свободный, 82, г. Красноярск, 660041, РОССИЯ. e-mail: Gemmeny@rambler.ru