Функциональный анализ и его приложения,
т. 11. вып. 4, 1977, 88—89.

УДК 513.836

ОПЕРАЦИИ МАССИ В СУПЕРАЛГЕБРАХ ЛИ И ДЕФОРМАЦИИ КОМПЛЕКСНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ АЛГЕБР

В. С. Ретах

Наша цель — определить высшие операции в супералгебре (градуированной алгебре) Ли когомологий комплексно-аналитической алгебры A со значениями в A и связать их с препятствиями к продолжению деформаций и со строением версального семейства алгебры A. Эти операции аналогичны классическим операциям Масси [6] в ассоциативных алгебрах.

Деформации комплексно-аналитических алгебр служат модельным примером. Наши конструкции и результаты переносятся на другие классы алгебр и на комплексно-аналитические пространства.

Связь препятствий к продолжению деформаций с классическими операциями Масси отмечена А. Дуади [3]. Его конструкция несет меньшую информацию и не переносится на комплексно-аналитические алгебры.

1. Под дифференциальной супералгеброй понимается комплекс $L = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ с операцией $[\,,\,]$ такой, что

$$[x, y] + (-1)^{|xy|}[y, x] = 0,\ (-1)^{|xz|}[x, [y, z]] + (-1)^{|yx|}[y, [z, x]] + (-1)^{|zy|}[z, [x, y]] = 0],$$

и дифференциалом d степени $+1$ таким, что $d([x, y]) = [dx, y] + (-1)^{|x|}[x, dy]$ ($|x| = \deg x$).

Введем в построенной по L супералгебре когомологий $H(L)$ высшие операции. Эти n-местные операции частично определены и однозначны по модулю $n-1$-местных. Достаточно определить их на однородных элементах.

Пусть $y_i \in H(L)$, а x_i $(i = 1, 2, 3)$ — их представители в L. Положим $\langle y_1, y_2\rangle$ равным элементу с представителем $[\bar{x}_1, x_2]$, где $\bar{x} = (-1)^{|x|+1}\cdot x$.

Пусть $[y_1, y_2] = [y_1, y_3] = [y_2, y_3] = 0$, т. е. $[\bar{x}_1, x_2] = dx_{12}$, $[\bar{x}_1, x_3] = dx_{13}$, $[\bar{x}_2, x_3] = dx_{23}$. Под значением $\langle y_1, y_2, y_3\rangle$ понимается элемент из $H(L)$, отвечающий циклу $[\bar{x}_{12}, x_3] + [\bar{x}_1, x_{23}] + (-1)^{(|x_2|+1)(|x_3|+1)}[\bar{x}_{13}, x_2]$. Он определен неоднозначно и зависит от выбора x_{ij}.

Определим n-местные операции. Пусть M — упорядоченный набор однородных элементов из L, а P и Q — непересекающиеся упорядоченные наборы элементов из M. Через $\varepsilon(P, Q)$ обозначим сумму чисел вида $(|x| + 1)(|y| + 1)$ таких, что $x \in P$, $y \in Q$ и y предшествует x в M.

Пару P, Q назовем *правильной*, если младший элемент P предшествует младшему элементу Q и $P \cup Q = M$.

Определение. Скажем, что операция Масси $\langle y_1, \ldots, y\rangle_n$ определена для элементов $y_i \in H(L)$, если для $m < n$ и для любого набора $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$ существуют элементы $x_{i_1\ldots i_m}$ такие, что x_i — представитель y и для любого упорядоченного набора $I = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ имеем $dx_{i_1\ldots i_m} = \Sigma(-1)^{\varepsilon(J,K)}[\bar{x}_{j_1\ldots j_s}, x_{k_1\ldots k_t}]$, причем сумма берется по всем правильным парам наборов $J = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$, $K = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_t})$. Набор $(x_{i_1\ldots i_m})$ назовем *определяющей системой* $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$.

Предложение. *Элемент* $\tilde{x}_{1\ldots n} = \Sigma(-1)^{\varepsilon(J,K)}[\bar{x}_{j_1\ldots j_s}, x_{k_1\ldots k_t}]$, *где сумма берется по всем правильным разбиениям набора* $(x_1, \ldots, x_n)$, *является циклом. Если* (z_i) — *другие представители* (y_i), *то можно дополнить их до определяющей системы* $(z_{i_1\ldots i_m})$ *такой, что* $\tilde{z}_{1\ldots n}$ *гомологичен* $\tilde{x}_{1\ldots n}$.

Назовем класс в $H(L)$, отвечающий $\tilde{x}_{1\ldots n}$, т. е. системе $(x_{i_1\ldots i_m})$, значением операции $\langle y_1, \ldots y_n\rangle$. Через $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ обозначим множество классов, построенных по всем определяющим системам.

Рассмотрим *однородные* операции Масси. Пусть $y_{k_{s+1}} = \ldots = y_{k_{s+1}}$ $(0 = k_0 < k_1 < \ldots < k_{p+1} = n)$. Определяющую систему $(x_{i_1\ldots i_m})$ назовем *однородной*, если $x_{i_1\ldots i_m} = x_{j_1\ldots j_m}$ для $k_s + 1 < i_t, j_t < k_{s+1}$, где $1 \leqslant t \leqslant m$, $0 \leqslant s \leqslant p$. Через «$y_1, \ldots, y_n$» обозначим подмножество элементов из $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, построенных по однородным определяющим системам.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» «функциональный анализ и его приложения», 1977

2. Супералгебры Ли когомологий аналитической алгебры определены в [1] аналогично когомологиям коммутативной алгебры (см. [4], [5]). Приведем определение в удобной для нас форме.

T-разольвента аналитической алгебры A состоит из эпиморфизма $R_0 \to A$, где R_0 — регулярная алгебра, свободной коммутативной градуированной R_0-алгебры $R = \sum_{-\infty}^{0} R_k$, порожденной системой образующих с отрицательными степенями, и дифференциала s в R_0 — модуле R степени 1, являющегося дифференцированием и такого, что $H^n(R) = 0$ при $n < 0$, $H^0(R) \cong A$.

Рассмотрим градуированное векторное пространство $D(R) = \Sigma\, \mathrm{Der}^k(R)$, в котором $\mathrm{Der}^k(R)$ образован эндоморфизмами R степени k, удовлетворяющими соотношению $u(ab) = u(a)\,b + (-1)^{k|a|}\,au(b)$.

Операция коммутирования превращает $D(R)$ в дифференциальную супералгебру Ли с дифференциалом $[\cdot, s]$. Супералгебру Ли ее когомологий обозначим через $T^*(A)$. Операции Масси в $T^*(A)$, как однородные, так и неоднородные, не зависят от выбора T-резольвенты.

3. Определение деформаций аналитической алгебры дано в [1] и [2]. Положим $\delta_n = C\{t\} / (t^{n+1})$. Существует каноническое биективное соответствие между классами эквивалентных деформаций A над δ_1 и $T^1(A)$ и между дифференцированиями A и элементами $T^0(A)$.

Теорема 1. *Деформация A над δ_1, отвечающая элементу $h \in T^1(A)$, продолжается до деформации A над δ_n, если и только если $\langle \underbrace{h, \ldots, h}_{n} \rangle$ или эквивалентно «$\underbrace{h, \ldots, h}_{n}$» определена (тогда ее значения лежат в $T^2(A)$) и содержит нуль.*

Отметим, что n-местная операция $\langle h, \ldots, h \rangle$ или «$h, \ldots, h$» определена, если и только если соответствующая n — 1-местная операция от h содержит нуль. Для $n > 2$ n-местная операция «$h, \ldots, h$», где $h \in T^1(A)$, содержит нуль, если ее пересечение с $[h, T^1(A)]$ непусто.

Теорема 2. *Пусть деформация A над δ_1, отвечающая $h \in T^1(A)$, продолжается до деформации $\delta_n \to \tilde{A}$. Дифференцирование A, отвечающее $f \in T^0(A)$, продолжается до дифференцирования деформации A над δ_n, если и только если $\langle f, \underbrace{h, \ldots, h}_{n} \rangle$ или эквивалентно «$f, \underbrace{h, \ldots h}_{n}$» определена (тогда ее значения лежат в $T^1(A)$) и содержит нуль.*

Если B — аналитическая алгебра с максимальным идеалом m, то классы эквивалентных деформаций A над B/m^2 отождествляются с $T^1(A) \otimes m/m^2$. Скобка в $D(R)$ и умножение $m^p/m^{p+1} \otimes m^q/m^{q+1} \to m^{p+q}/m^{(p+q+1)}$, порожденное умножением в B, определяют умножение в бикомплексе $\mathrm{Der}^k(R) \otimes m^p / m^{p+1}$, дифференциал в котором порожден дифференциалом в $D(R)$. В бикомплексе $T^k(A) \otimes m^p/m^{p+1}$ можно определить операции Масси по схеме п. 1. Для этих операций справедливы формулировки теорем 1 и 2 с заменой δ_s и $T^r(A)$ на B/m^{s+1} и $T^r(A) \otimes m^r/m^{r+1}$ соответственно ($r > 0$). Отсюда вытекает

Теорема 3. *Если $T^1(A)$ конечномерно, то (однородные) операции Масси в $T^*(A)$ определяют алгоритм построения формального версального семейства и его максимального подсемейства, на которое продолжается любое дифференцирование A.*

В заключение автор приносит благодарность Л. Л. Аврамову и В. П. Паламодову за полезные контакты.

ЦНИИПромзданий Госстроя СССР

Поступило в редакцию
5 мая 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Паламодов В. П., УМН XXXI, вып. 3 (1976), 129—194. 2. Шлезингер М., Математика 15: 4 (1971), 115—129. 3. Douady A., Sem. H. Cartan, 1960/61, exp. 4. 4. André M., Lecture Notes in Math. 32, 1967. 5. Quillen D., Proc. Symp. Pure Math. 17 (1971), 65—87. 6. May P., J. Algebra 12 (1969), 533—568.