N. M. Bogolyubov, A. G. Izergin, Lattice completely integrable regularization of the sine-Gordon model for small coupling constants,
TMF, 1984, Volume 59, Number 2, 183–199

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 59, № 2
май, 1984

РЕШЕТОЧНАЯ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МОДЕЛИ СИНУС-ГОРДОН ДЛЯ НЕБОЛЬШИХ КОНСТАНТ СВЯЗИ

Боголюбов Н. М., Изергин А. Г.

Исследуются структура вакуумного состояния и спектр одночастичных возбуждений в квантовой решеточной модели синус-Гордон, которая является регуляризованной версией соответствующей квантово-полевой модели. Рассмотрена область констант связи $0<\gamma<\pi/2$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая модель синус-Гордон (СГ) давно привлекает внимание специалистов. Прежде всего она интересна как существенно нелинейная модель релятивистской теории поля. Уравнение движения классической модели СГ гамильтоново, гамильтониан H и скобки Пуассона даются формулами

$$H=\int dx[(\pi^2/2)+((\partial_x u)^2/2)+(m^2/8\gamma)(1-\cos\sqrt{8\gamma}u)], \tag{1}$$

$$\{\pi(x,t),u(y,t)\}=\delta(x-y),\quad \pi(x,t)=\partial_t u(x,t).$$

Мы используем обычную константу связи γ, область изменения которой в квантовом случае есть $0<\gamma<\pi$. В этой работе, однако, модель СГ рассматривается лишь для $0<\gamma<\pi/2$.

После решения классической модели с помощью метода обратной задачи рассеяния [1] были получены квазиклассические результаты в рамках «квантовой теории солитонов» [2, 3]. Было также показано, что квантовая модель СГ эквивалентна массивной модели Тирринга (ММТ) [4]. С созданием квантового метода обратной задачи (КМОЗ) [5] открылась возможность получить для модели СГ точные ответы и в квантовом случае [6].

При решении релятивистских моделей квантовой теории поля возникает, как известно, проблема ультрафиолетовых расходимостей. Соответствующую регуляризацию можно провести, поместив модель на пространственную решетку (в нашем случае одномерную). При этом естественно потребовать, чтобы в решеточной модели сохранялось свойство интегрируемости непрерывной модели. Обычно модель СГ (и эквивалентную ей модель ММТ) регуляризуют в этом духе с помощью XYZ-модели [7]. Отметим, однако, что при этом квантовое пространство в узле решетки — пространство спина $1/2$ — имеет две степени свободы и существенно отличается от локального пространства исходной модели. Поэтому сведение гамильтониана модели СГ к гамильтониану XYZ-модели представляется весьма искусственным.

Наиболее естественно проводить решеточную регуляризацию модели СГ в терминах исходных бозонных полей, требуя, чтобы решеточная модель сохраняла свойство полной интегрируемости. Эта задача была решена в работах [8, 9], отправной точкой для которых послужила работа [6]. В этих работах была построена решеточная модель СГ (модель РСГ) — модель взаимодействующих канонических бозе-полей на одномерной пространственной решетке. Эта модель в квазиклассическом пределе переходит во вполне интегрируемую классическую решеточную модель с той же структурой переменных действие — угол, что и у непрерывной классической модели СГ [8, 10]. Более того непрерывный предел (постоянная решетки $\Delta\to 0$) классической модели РСГ — это именно непрерывная модель СГ (1), которая собственно и служит исходным определением квантовой модели. Таким образом, регуляризация модели СГ с помощью модели РСГ является наиболее прямой и естественной. Переход к квантово-полевой непрерывной модели осуществляется в пределе $\Delta\to 0$, при этом необходимо произвести перенормировку массы, перейдя от голой массы m к физической m_r по формуле

$$m_r \sim m(m\Delta)^{\gamma/(\pi-\gamma)}. \tag{2}$$

Таким образом, $-\ln \Delta$ играет роль ультрафиолетового обрезания. Отметим, что для $\pi/3<\gamma<2\pi/3$, где спектр модели особенно прост, эта программа была осуществлена в [11].

Цель настоящей работы — провести последовательное квантование модели СГ в рамках КМОЗ для $0<\gamma<\pi/2$. Использование модели РСГ позволяет при этом строго рассмотреть проблему ультрафиолетовых расходимостей. План дальнейшего изложения следующий. В разделе 2 приводятся необходимые исходные величины модели РСГ. В разделе 3 выводятся системы уравнений для энергий и зарядов одночастичных возбуждений над физическим вакуумом в модели РСГ, аналогичные тем, которые получены для XXZ-модели в [12]. В разделе 4 строится физический вакуум модели РСГ и проведен анализ спектра одночастичных возбуждений. В разделе 5 осуществляется переход к квантово-полевой модели СГ. После перенормировки массы (2) ответы для спектра воспроизводят все известные результаты для модели СГ [2, 3, 6] и модели ММТ [7, 13, 14], подтверждая эквивалентность этих моделей в области констант связи $\gamma<\pi/2$. При этом для малых γ справедлива квазиклассическая теория возмущений, а в окрестности точки $\gamma=\pi/2$ (соответствующей свободным фермионам ММТ) — теория возмущений ММТ.

2. КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ РСГ

Подробное описание модели РСГ дано в работе [9], здесь мы приведем лишь необходимые в дальнейшем сведения. Рассмотрим одномерную пространственную решетку с четным числом узлов M и шагом Δ; длина решетки $L=M\Delta$. $\mathscr{L}$-оператор в n-м узле решетки задается для модели РСГ следующей формулой:

$$\mathscr{L}_n(\alpha)=\begin{pmatrix} a_n & b_n(\alpha) \\ c_n(\alpha) & d_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

где

$$a_n=d_n^*=\exp\{-i\sqrt{2}\gamma p_n/4\}\varphi(u_n)\exp\{-i\sqrt{2\gamma}p_n/4\}, \tag{4}$$

$$b_n(\alpha)=-c_n^*(\alpha^*)=-2\,\mathrm{sh}\,\{(\alpha+i\sqrt{8\gamma}u_n)/2\}/\sqrt{2\,\mathrm{ch}\,\Lambda},$$

$$\varphi(u)=\{1+(\cos\sqrt{8\gamma}u)/(\mathrm{ch}\,\Lambda)\}^{1/2}.$$

Канонические бозонные операторы u_n, p_n удовлетворяют коммутационным соотношениям $[u_m, p_n]=i\delta_{mn}$; связь с полями $u(x)$ и $\pi(x)$ модели СГ (1) в непрерывном пределе дается формулами $u_n\approx u(x_n)$; $p_n\approx\pi(x_n)\Delta$, где $x_n=$ $=n\Delta$ $(0\leqslant x\leqslant L)$. Комплексное число α — аддитивный спектральный параметр — будем называть быстротой. Величина Λ, связанная с голой массой m модели СГ и шагом решетки Δ формулой

$$(m\Delta/4)^2=1/(2\,\mathrm{ch}\,\Lambda), \tag{5}$$

будет играть роль обрезания по быстротам. Подчеркнем, что Λ не является независимым параметром теории.

Матричный след $\tau(\alpha)$ матрицы монодромии $T(\alpha)=\mathscr{L}_M(\alpha)\ldots\mathscr{L}_2(\alpha)\cdot$ $\cdot\mathscr{L}_1(\alpha)$ — оператор в квантовом пространстве, где действуют операторы p_n, u_n $(n=1,\ldots, M)$ — является производящей функцией интегралов движения, среди которых находится и гамильтониан модели РСГ (выражение гамильтониана в терминах $\tau(\alpha)$ см. в [9]). Собственные функции гамильтониана те же, что у оператора $\tau(\alpha)$. Важную роль среди них играет «голый вакуум» — вектор состояния, который аннулируется левым нижним матричным элементом матрицы монодромии $T(\alpha)$ и является собственным вектором для ее диагональных элементов. Другие собственные векторы гамильтониана строятся стандартным в КМОЗ образом с помощью алгебраического анзаца Бёте [5]. Они могут быть охарактеризованы наборами быстрот $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$ $(N=1, 2, 3,\ldots)$. Эти быстроты должны удовлетворять системе уравнений

$$\exp\{ip(\alpha_l)L\}=\prod_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N}\exp\{-i\Phi(\alpha_l-\alpha_k)\},\qquad l=1,2,\ldots,N. \tag{6}$$

Здесь фаза рассеяния голых частиц $\Phi(\alpha)$ и импульс $p(\alpha)$ суть

$$\Phi(\alpha)=-i\ln\,[\mathrm{sh}\,((\alpha+2i\gamma)/2)/\mathrm{sh}((\alpha-2i\gamma)/2)], \tag{7}$$

$$p(\alpha)=(2i\Delta)^{-1}[\Psi(\Lambda+\alpha)-\Psi(\Lambda-\alpha)], \tag{8}$$

где $\Psi(\alpha)=\ln\,[\mathrm{ch}\,((\alpha+i\gamma)/2)/\mathrm{ch}\,((\alpha-i\gamma)/2)]$.

Одночастичная дисперсия в модели РСГ, через которую аддитивным образом выражаются собственные значения гамильтониана, дается формулой [9]

$$h_1(\alpha)=\varphi(\alpha)+\varphi^*(\alpha^*)+\varphi(-\alpha)+\varphi^*(-\alpha^*), \tag{9}$$

где функция $\varphi(\alpha)$ выражается через ту же функцию $\Psi(\alpha)$, которая входит в определение импульса (8): $\varphi(\alpha)=\exp\{i\gamma\}(\Delta\sin\gamma)^{-1}[\partial\Psi(\alpha+\Lambda+2i\gamma)/$ $/\partial\alpha]$. Отметим, что при $|\alpha|\ll\Lambda$ восстанавливается релятивистская инвариантность:

$$(10)\qquad h_1(\alpha)\approx((m^2\Delta\sin\gamma)/2)\,\mathrm{ch}\,\alpha;\qquad p(\alpha)\approx((m^2\Delta\sin\gamma)/2)\,\mathrm{sh}\,\alpha.$$

Это оправдывает выбор названия «быстрота» для α.

Отметим, что фаза рассеяния (7) в модели РСГ та же, что и в моделях XXZ и ММТ. Поэтому анализ возможных типов решений системы (6) аналогичен [12, 14]. В термодинамическом пределе ($M\to\infty$, Δ фиксировано) возможные значения α_l в (6) группируются в «струны» различной длины; быстроты частиц, входящих в струну из n частиц, связаны соотношениями

$$(11)\qquad \alpha_l^{(n)}=\beta+i\gamma(n-2l-1)+i\pi(1-v_n)/2,$$

$$\operatorname{Im}\beta=0;\qquad l=0,1,\ldots,n-1;\qquad v_n=\pm1.$$

Вещественную величину β будем называть быстротой струны. Возможные значения быстрот струн, входящих в данную конфигурацию $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$ ($N=\sum nN_n$; N — число струн длины n в данной конфигурации), могут быть определены из (6).

Число n частиц в струне не может быть произвольным. При $\gamma<\pi/2$ существуют струны с $n=1$ и $v=\pm1$. Струны с $n\geqslant2$ существуют, если выполняется одно из следующих двух условий [12, 14, 11]:

$$(12)\qquad \sin m\gamma\sin(n-m)\gamma>0;\qquad m=1,\ldots,n-1,$$

или

$$(13)\qquad \sin m\gamma\sin(n-m)\gamma<0;\qquad m=1,\ldots,n-1.$$

Классификация всех возможных решений этих неравенств была проведена в работе [12] (см. приложение 1).

Опишем результат. Представим величину $\omega=\pi/\gamma$ в виде цепной дроби [15]:

$$(14)\qquad \frac{\pi}{\gamma}=\omega=[\nu_1;\nu_2,\nu_3,\ldots]=\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\cfrac{1}{\nu_3+\ldots}}.$$

Последовательность целых чисел ν_1, ν_2, $\nu_3,\ldots$ конечна, если ω — рациональное число, и бесконечна, если ω иррационально (отметим, что ν_1 есть целая часть $[\omega]$ числа ω и $\nu_1\geqslant2$ при $\gamma\leqslant\pi/2$). Для определенности будем считать далее, что ω иррационально, рассмотрение рациональных ω внесет очевидные изменения. Определим i-ю подходящую дробь:

$$(15)\qquad \omega_i=[\nu_1;\nu_2,\ldots,\nu_i]\equiv p_i/q_i\qquad (p_0\equiv1;\ p_{-1}\equiv0),$$

где p_i, q_i — несократимые целые числа, см. (П.1), (П.2). Результат [12] состоит в том, что возможные длины струн следующим простым образом выражаются через числители подходящих дробей: $n=p_{i-1}+kp_i$, где $k=0$, $1,\ldots,\nu_{i+1}-1$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между разрешенными длинами струн и множеством всех положительных целых чисел j, причем число частиц в струне типа j есть

(16) $$n_j = p_{i-1} + (j - m_i) p_i, \quad i \geqslant 0, \quad m_i \leqslant j \leqslant m_{i+1} - 1,$$

(17) $$m_i = \sum_{k=1}^{i} \nu_k, \quad m_0 \equiv 0.$$

«Четность» v_j струны определяется числом частиц в ней:

(18) $$v_1 \equiv 1, \quad v_{m_1} = -1, \quad v_j = \exp\{i\pi[(n_j - 1)/\omega]\} \text{ при } j \neq 1, \ m_1.$$

Будем говорить, что j-струна с $m_i \leqslant j \leqslant m_{i+1} - 1$ принадлежит к серии номер i. Особую роль будут играть струны «основной» серии с $i = 0$ ($n_j = j$, $v_j = +1$ ($j = 1, \ldots, \nu_1 - 1$)) и низшая струна серии $i = 1$ с $j = \nu_1$, $n_{\nu_1} = 1$, $v_{\nu_1} = -1$.

Голая энергия j-струны складывается аддитивно из энергий входящих в нее частиц:

(19) $$h_j(\beta) = \sum_{l=0}^{n_j - 1} h_1(\beta + i\gamma(n - 2l - 1) + i\pi(1 - v_j)/2), \quad \operatorname{Im}\beta = 0.$$

В заключение этого раздела заметим, что в модели РСГ можно ввести оператор топологического заряда [8, 16], коммутирующий со следом матрицы монодромии $\tau(\alpha)$ и с гамильтонианом и являющийся поэтому интегралом движения. Собственные значения этого оператора аддитивны: заряд j-струны (над голым вакуумом) равен числу частиц в ней n_j, а заряд состояния, содержащего несколько струн,— сумме зарядов струн.

3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

Спектр состояний над голым вакуумом образуют различные комбинации j-струн (16)—(18), голые энергии струн даются формулой (19). Среди этих энергий есть и отрицательные, например при $|\beta| \ll \Lambda$ голая энергия ν_1-струны есть (см. (10))

(20) $$h_{\nu_1}(\beta) = h_1(\beta + i\pi) \approx -((m^2\Delta \sin\gamma)/2) \operatorname{ch}\beta < 0, \quad |\beta| \ll \Lambda.$$

Поэтому встает вопрос о построении физического вакуума (состояния с наименьшей энергией) и спектра одночастичных возбуждений над ним. Здесь мы рассмотрим эту задачу в термодинамическом пределе ($M \to \infty$, $L \to \infty$, $\Delta = L/M$ фиксировано), используя подход работы [12]. В этом пределе спектр быстрот струн, разрешенный уравнениями (6), «сгущается», и можно ввести стандартным образом [17] плотности $\rho_j(\beta)$, $\rho_j^h(\beta)$ так, что величины $L\rho_j(\beta)d\beta$ и $L\rho_j^h(\beta)d\beta$ суть число j-струн и число незаполненных вакансий j-струн («дырок») в интервале быстрот $[\beta, \beta + d\beta]$, соответственно. Таким образом, каждое состояние характеризуется набором положительных плотностей ρ_j, ρ_j^h ($j = 1, 2, \ldots$). Из (6) получаем систему уравнений для этих функций

(21) $$a_j(\beta) = (-1)^i(\rho_j(\beta) + \rho_j^h(\beta)) + \sum_{l=1}^{\infty} T_{jl} * \rho_l(\beta),$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots; \quad -\infty < \beta < +\infty.$$

Поясним обозначения. Целое число $i \geqslant 0$ означает номер серии, к которой принадлежит j-струна (см. (16), (17)). Величина $a_j(\beta)$ определяется как

$$a_j(\beta)=p_j'(\beta)/2\pi, \tag{22}$$

где производная от импульса вычисляется из (8), (11):

$$\begin{aligned} p_j'(\beta)&=\sum_{l=0}^{n_j-1} p'(\beta+i\gamma(n-2l-1)+i\pi(1-v_j)/2)= \\ &=(v_j\sin(n_j\gamma)/2\Delta)\{(\mathrm{ch}(\beta+\Lambda)+v_j\cos(n_j\gamma))^{-1}+(\Lambda\to-\Lambda)\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя (П.16), (П.20), приходим к заключению, что знак $p_j'(\beta)$ определяется номером i серии j-струны: $\mathrm{sgn}\, p_j'(\beta)=(-1)^i$. Этим объясняется множитель $(-1)^i$ в правой части (21). Величина $-2\pi T_{jl}(\beta_j-\beta_l)$ — это производная полной фазы рассеяния j-струны с быстротой β_j на l-струне с быстротой β_l (см. (7), (11)):

$$\begin{aligned} &-2\pi T_{jl}(\beta)= \\ &=\sum_{p=0}^{n_j-1}\sum_{q=0}^{n_l-1}\Phi'(\beta+i\gamma(n_j-n_l)+2i\gamma(p-q)+i\pi(v_j-v_l)/2), \end{aligned} \tag{24}$$

здесь $\beta\equiv\beta_j-\beta_l$; явный вид фаз приведен в приложении 2. Наконец, звездочкой обозначена свертка:

$$A*B(\beta)\equiv\int d\alpha A(\beta-\alpha)B(\alpha). \tag{25}$$

Энергия E состояния с данными плотностями частиц и дырок дается формулой

$$E=L\sum_{j=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_j(\beta)\rho_j(\beta)\,d\beta, \tag{26}$$

где h_j — голая энергия j-струны (19). Задача построения физического вакуума — состояния с наименьшей энергией — сводится к нахождению функций $\rho_j(\beta)$, удовлетворяющих уравнениям (21), на которых функционал (26) минимален. Функционал энергии линеен по плотностям, и его минимум лежит на «границе» области изменения ρ_j (т. е. при фиксированном β либо $\rho_j(\beta)=0$, либо $\rho_j^h(\beta)=0$). Поэтому удобнее рассмотреть систему, помещенную в резервуар с конечной температурой T, и искать минимум ее свободной энергии F:

$$F=E-TS-\mu N. \tag{27}$$

Здесь энтропия S есть [17]

$$S=L\sum_{j=1}^{\infty}\int[(\rho_j+\rho_j^h)\ln(\rho_j+\rho_j^h)-\rho_j\ln\rho_j-\rho_j^h\ln\rho_j^h]\,d\beta. \tag{28}$$

Мы ввели также химический потенциал μ и число частиц N:

$$N=L\sum_{j=1}^{\infty}\int n_j\rho_j(\beta)\,d\beta, \tag{29}$$

что позволит просто получить уравнения для зарядов физических возбуждений. Функционал F имеет минимум при $\delta F/\delta\rho_j=0$, откуда получаем систему нелинейных интегральных уравнений:

$$\ln\eta_j=(h_j(\beta)-\mu n_j)/T+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^k T_{jl}*\ln(1+\eta_l^{-1}). \tag{30}$$

Мы обозначили здесь $\eta_j(\beta)=\rho_j^h(\beta)/\rho_j(\beta)$; k — номер зоны, к которой принадлежит l-струна (см. (16)).

Уравнения (21), (30) будут использованы для построения физического спектра в модели РСГ. Входящие в эти уравнения производные фаз рассеяния T_{jl} (24) те же, что в XXZ-модели [12], отличие — в величинах a_j (22) и h_j (19). Воспользовавшись установленными в [12] соотношениями для фаз (см. (П.18)), а также соотношениями (П.19) и (П.20), уравнения (21) перепишем в виде

$$\begin{aligned}&\rho_j+\rho_j^h=s_i*(\rho_{j-1}^h+\rho_{j+1}^h), \qquad m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-2,\\ &\rho_j+\rho_j^h=s_i*\rho_{j-1}^h+d_i*\rho_j^h-s_{i+1}*\rho_{j+1}^h+Z_i, \qquad j=m_{i+1}-1, \qquad \rho_0^h\equiv 0,\end{aligned} \tag{31}$$

а уравнения (30) — в виде

$$\begin{aligned}&\ln\eta_j=(1-2\delta_{m_i j})s_i*\ln(1+\eta_{j-1})-s_i*\ln(1+\eta_{j+1})+X_j/T \qquad (m_j\leqslant j\leqslant m_{i+1}-2),\\ &\ln\eta_j=(1-2\delta_{m_i j})s_i*\ln(1+\eta_{j-1})+d_i*\ln(1+\eta_j)+\\ &+s_{i+1}*\ln(1+\eta_{j+1})+X_j/T \qquad (j=m_{i+1}-1),\\ &\ln\eta_0\equiv 0, \qquad \lim_{j\to\infty}(\eta_j/n_j)=\mu/T.\end{aligned} \tag{32}$$

Здесь фурье-образы положительных функций $s_i(\beta)$ и $d_i(\beta)$ даются формулами

$$\tilde{s}_i(k)=\int d\beta\,\exp(ik\beta)s_i(\beta)=(2\,\mathrm{ch}(\pi kx_i))^{-1}, \tag{33}$$

$$\tilde{d}_i(k)=\mathrm{ch}\,(\pi k(x_{i+1}-x_i))\,[2\,\mathrm{ch}\,(\pi kx_i)\,\mathrm{ch}\,(\pi kx_{i+1})]^{-1}. \tag{34}$$

Величина x_i есть произведение первых $(i+1)$ остатков цепной дроби ω (14) (подробнее см. приложение 1, (П.7)). Фурье-образ положительной функции $Z_i(\beta)$ в (31) есть (см. (П.19))

$$\tilde{Z}_i(k)=[2\Delta\,\mathrm{ch}\,(\pi kx_i)\,\mathrm{ch}\,(\pi kx_{i+1})]^{-1}\cos\,(k\Lambda). \tag{35}$$

Величина X_j в (32) определяется как

$$\begin{aligned}&X_j=h_j-(1-2\delta_{m_i j})s_i*h_{j-1}-s_i*h_{j+1} \qquad (m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-2),\\ &X_j=h_j-(1-2\delta_{m_i j})s_i*h_{j-1}-d_i*h_j-s_{i+1}*h_{j+1} \qquad (j=m_{i+1}-1),\end{aligned} \tag{36}$$

причем мы полагаем $h_0=0$. Напомним, что в (31)—(36) i означает номер зоны, к которой принадлежит струна j.

Обсудим переход к нулевой температуре в (31), (32). Известно [12, 17], что

$$\eta_j(\beta)\equiv\rho_j^h(\beta)/\rho_j(\beta)=\exp\{e_j(\beta,\mu,T)/T\}, \tag{37}$$

где $e_j(\beta, \mu, T)$ есть энергия одночастичного возбуждения, соответствующего внесению одной j-струны с голой быстротой β в основное состояние (с учетом его поляризации). Энергия дырки, получающейся при удалении из основного состояния одной j-струны с быстротой β, есть $-e_j(\beta, \mu, T)$; при ненулевой температуре существуют возбуждения как с положительной, так и с отрицательной энергией. При $T\to 0$ в зависимости от знака e_j при некотором β либо $\rho_j(\beta)\to 0$, либо $\rho_j^h(\beta)\to 0$. Поэтому энергии одночастичных возбуждений при $T\to 0$ и $\mu=0$ получаются из функции $\varepsilon_j(\beta)$:

$$(38)\qquad \varepsilon_j(\beta)=e_j(\beta, \mu=0, T=0).$$

Удобно ввести функции ε_j^+ и ε_j^-:

$$(39)\qquad \varepsilon_j^+(\beta)=\begin{cases}\varepsilon_j(\beta) & \text{при } \varepsilon_j(\beta)\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } \varepsilon_j(\beta)<0,\end{cases}\qquad \varepsilon^-(\beta)=\varepsilon(\beta)-\varepsilon^+(\beta).$$

Тогда в области быстрот $\varepsilon(\beta)>0$, где $\rho_j(\beta)=0$, существуют только возбуждения типа частиц с физической энергией $\varepsilon_j^+(\beta)$; в области $\varepsilon_j(\beta)<0$, где $\rho_j^h(\beta)=0$, существуют только дырочные возбуждения с энергией $\varepsilon_j^h(\beta)=-\varepsilon_j^-(\beta)$.

Можно также показать, что физический заряд z_j возбуждения, получающегося при внесении одной j-струны в физический вакуум (с учетом поляризации вакуума), дается формулой

$$(40)\qquad z_j=\partial e_j(\beta, \mu, T\to 0)/\partial\mu|_{\mu=0}.$$

Заметим, что в области $\varepsilon_j(\beta)<0$ величина $z_j^h=-z_j$ дает заряд соответствующей дырки.

Устремляя $T\to 0$, полагая $\mu=0$ и учитывая (32), (38)—(40), получаем уравнения для физических энергий и зарядов одночастичных возбуждений над физическим вакуумом в модели РСГ:

$$(41)\qquad \varepsilon_j=(1-2\delta_{m_i j})s_i*\varepsilon_{j-1}+s_i*\overset{+}{\varepsilon}_{j+1}+X_j\qquad (m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-2),$$

$$\varepsilon_j=(1-2\delta_{m_i j})s_i*\overset{+}{\varepsilon}_{j-1}+d_i*\varepsilon_j^++s_{i+1}*\overset{+}{\varepsilon}_{j+1}+X_j\qquad (j=m_{i+1}-1),\qquad \varepsilon_0^+\equiv 0,$$

$$(42)\qquad z_j=(1-2\delta_{m_i j})s_i*\overset{+}{z}_{j-1}+s_i*\overset{+}{z}_{j+1}\qquad (m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-2),$$

$$z_j=(1-2\delta_{m_i j})s_i*\overset{+}{z}_{j-1}+d_i*z_j^++s_{i+1}*\overset{+}{z}_{j+1}\qquad (j=m_{i+1}-1),\qquad z_0^+\equiv 0.$$

В этих уравнениях верхний значок «+» у функций означает, что соответствующий интеграл должен браться по области $\varepsilon_j(\beta)>0$. Мы потребуем также выполнения естественных граничных условий [12]

$$(43)\qquad \lim_{j\to\infty}\varepsilon_j(\beta)=0,$$

$$(44)\qquad \lim_{j\to\infty}(z_j/n_j)=1.$$

Уравнения (41)—(44) позволяют выяснить, какими струнами заполнен физический вакуум (заполнены области быстрот, где $\varepsilon_j(\beta)<0$), и найти спектр и заряды одночастичных возбуждений. Эти уравнения исследуются в следующем разделе. Энергия вакуума рассмотрена в приложении 3.

4. СПЕКТР РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ ПРИ $\gamma<\pi/2$

Напомним, что $\nu_1\geqslant 2$ при $\gamma<\pi/2$. Выясним сначала, воспользовавшись уравнениями (41), (43), какие струны заполняют вакуум в этом случае. Пользуясь (36), (П.15), (П.16), можно вычислить величины X_j, входящие в (41). Оказывается, что $X_j=0$ для $j\geqslant\nu_1$. Учитывая граничное условие (43), получаем из (41), что, как и в XXZ-модели [12],

$$\varepsilon_j(\beta)=0 \quad (j\geqslant\nu_1+1). \tag{45}$$

Можно показать, что в основной ($i=0$) зоне

$$X_j(\beta)=0 \quad (j=1, 2, \ldots, \nu_1-3), \tag{46}$$

а фурье-образы двух отличных от нуля величин суть

$$\tilde{X}_{\nu_1-l}(k)=\frac{2\pi i(-1)^l}{\Delta\sin\gamma\operatorname{ch}\gamma k}\times$$
$$\times\{e^{ik\Lambda}\operatorname{sh}(\pi k-(\nu_1+l-1)\gamma k+i\gamma)-\text{c. c.}\} \qquad (l=1,2) \tag{47}$$

(напомним, что Λ и Δ связаны соотношением (5)). Из уравнений (41) получаем тогда с учетом (45)

$$\varepsilon_j(\beta)=s_0*(\overset{+}{\varepsilon}_{j-1}(\beta)+\overset{+}{\varepsilon}_{j+1}(\beta))=\varepsilon_j^+(\beta)>0 \qquad (j=1,2,\ldots,\nu_1-3), \tag{48}$$

$$\varepsilon_{\nu_1-2}(\beta)=X_{\nu_1-2}(\beta)+s_0*(\varepsilon_{\nu_1-3}(\beta)+\varepsilon_{\nu_1-1}(\beta))=\overset{+}{\varepsilon}_{\nu_1-2}(\beta)+\overset{-}{\varepsilon}_{\nu_1-2}(\beta), \tag{49}$$

$$\varepsilon_{\nu_1-1}(\beta)=X_{\nu_1-1}(\beta)+s_0*\overset{+}{\varepsilon}_{\nu_1-2}(\beta)+d_0*\overset{+}{\varepsilon}_{\nu_1-1}(\beta)=\overset{+}{\varepsilon}_{\nu_1-1}(\beta)+\overset{-}{\varepsilon}_{\nu_1-1}(\beta), \tag{50}$$

$$\varepsilon_{\nu_1}(\beta)=-s_1*\varepsilon_{\nu_1-1}(\beta)=\varepsilon_{\nu_1}^-(\beta)<0. \tag{51}$$

Мы учли положительность функций $s_i(\beta)$ и $d_i(\beta)$ (33), (34). Из (51) следует, что в вакуумном состоянии ν_1-струны ($n=1$, $v=-1$) заполняют всю ось быстрот, т. е. $\rho_{\nu_1}^h=0$. Струны с $j\leqslant\nu_1-3$ в вакууме отсутствуют (т. е. для них $\rho_j=0$). Величины X, входящие в (49), (50), вообще говоря, знакопеременны, и вопрос о заполнении соответствующими струнами требует более детального исследования. С этой целью удобно записать уравнения (48)—(50) в матричном виде:

$$\varepsilon_j(\beta)=X_j(\beta)+\sum_l D_{jl}*\varepsilon_l^+(\beta)=$$
$$=X_j(\beta)+\sum_l D_{jl}*\varepsilon_l(\beta)-\sum_l D_{jl}*\varepsilon_l^-(\beta) \qquad (j, l=1,\ldots,\nu_1-1) \tag{52}$$

(здесь $X_j=\varepsilon_j^-=0$ при $j\leqslant\nu_1-3$). Вид матрицы D_{jl} легко восстанавливается из исходных уравнений (48)—(50). Из (52) получаем для $j=1, 2,\ldots, \nu_1-1$

$$\varepsilon_j(\beta)=E_j(\beta)-B_{j,\nu_1-2}*\overset{-}{\varepsilon}_{\nu_1-2}(\beta)-B_{j,\nu_1-1}*\overset{-}{\varepsilon}_{\nu_1-1}(\beta), \tag{53}$$

где

$$E_j(\beta)=X_j(\beta)+\sum_l B_{jl}*X_l(\beta), \tag{54}$$

а фурье-образы матричных элементов матрицы $B(\beta)=D(\beta)(1-D(\beta))^{-1}$ даются следующими формулами [18]:

$$\tilde{B}_{jl}(k)=\tilde{s}_0{}^{-1}\tilde{\alpha}_{\max(j,l)}(k)\frac{\operatorname{sh}(\min(j,l)k\gamma)}{\operatorname{sh}k\gamma}\qquad (j\neq l), \tag{55}$$

$$\tilde{B}_{ll}(k)=\tilde{s}_0(k)(\tilde{B}_{l+1,\,l}(k)+\tilde{B}_{l-1,\,l}(k)), \tag{56}$$

$$\tilde{\alpha}_j(k)=\operatorname{ch}(\pi k-(j+1)k\gamma)/\operatorname{ch}(\pi-\gamma)k. \tag{57}$$

Используя эти формулы, можно показать, что все функции $B_{jl}(\beta)$ положительны и при $|\beta|\to\infty$ ведут себя следующим образом:

$$B_{jl}(\beta)\underset{|\beta|\to\infty}{=}4\pi\varkappa\operatorname{ctg}(\varkappa\gamma)\sin(j\varkappa\gamma)\sin(l\varkappa\gamma)\exp(-\varkappa|\beta|)\qquad (j,l=1,\ldots,\nu_1-1). \tag{58}$$

Здесь введена величина $\varkappa$:

$$\varkappa\equiv\pi/(2(\pi-\gamma)). \tag{59}$$

Из (47) и (54)—(57) определяются фурье-образы функций $E(\beta)$:

$$\tilde{E}_j(k)=-\frac{4\pi i\operatorname{sh}(jk\gamma)}{\Delta\sin\gamma\operatorname{ch}(\pi-\gamma)k}\{e^{ik\Lambda}\operatorname{ch}(\gamma k-i\gamma)-\text{c. c.}\}\qquad (j=1,\ldots,\nu_1-2), \tag{60}$$

$$\tilde{E}_{\nu_1-1}(k)=-\frac{4\pi i\operatorname{ch}(\pi-\nu_1\gamma)k}{\Delta\sin\gamma\operatorname{ch}(\pi-\gamma)k}\{e^{ik\Lambda}\operatorname{sh}(\pi k-2\gamma k+i\gamma)-\text{c. c.}\}. \tag{61}$$

Заметим, что E_j — это значения физических энергий j-струн, которые бы получились при предположении, что в вакууме содержатся лишь ν_1-струны, заполняющие всю ось быстрот; энергия дырки при этом оказалась бы равной

$$\tilde{E}^{(h)}(k)=-E_{\nu_1}(k)=\tilde{s}_1(k)\tilde{E}_{\nu_1-1}(k). \tag{62}$$

Из формул (60), (61) можно найти явный вид функций $E_j(\beta)$ $(j\leqslant\nu_1-1)$ и детально исследовать их свойства. Мы, однако, сформулируем лишь те свойства, которые будем использовать далее. Во-первых, эти функции положительны при не слишком больших быстротах. Более точно для $j\leqslant\nu_1-1$:

$$E_j(\beta)>0 \text{ при } |\beta|<f_0(\Lambda,\gamma);\quad f_0(\Lambda,\gamma)=\Lambda+\varphi(\gamma). \tag{63}$$

Здесь $\varphi(\gamma)$ — константа, не зависящая от Λ; заметим, что если $E(\beta)$ положительна при любых быстротах (это имеет место для функции E_1 при γ, близких к $\pi/2$), мы полагаем $\varphi(\gamma)=+\infty$. Таким образом, область, где $E_j(\beta)<0$, лежит при достаточно больших быстротах $|\beta|>f_0$; при $\gamma<\pi/3$ такая область действительно существует. Другое важное свойство функций E_j — их асимптотика при $|\beta|\ll\Lambda$:

$$E_j(\beta)=2A(\gamma)\Delta^{-1}\exp(-\varkappa\Lambda)\sin(j\varkappa\gamma)\operatorname{ch}(\varkappa\beta)\qquad (j\leqslant\nu_1-1,\ |\beta|\ll\Lambda). \tag{64}$$

Здесь $\varkappa$ дается формулой (59), а

$$(65)\qquad A(\gamma)=4\varkappa\cos(\varkappa\gamma(\pi-2\gamma)/\pi)/\sin\gamma.$$

С помощью (62) легко найти и асимптотику функции $E^{(h)}$:

$$(66)\qquad E^{(h)}(\beta)=A(\gamma)\Delta^{-1}\exp(-\varkappa\Lambda)\operatorname{ch}(\varkappa\beta).$$

Вернемся теперь к равенствам (53), которые выражают энергии ε_j через две функции ε_l^- ($l=\nu_1-2$, ν_1-1). В свою очередь, эти две функции могут быть найдены из системы двух интегральных уравнений, получающейся из (53) при $j=\nu_1-2$, ν_1-1. При этом определяются и области, где $\varepsilon_l<0$ ($l=\nu_1-2$, ν_1-1) (напомним, что $\varepsilon_j^-=0$ ($j\leqslant\nu_1-3$)). Эти области естественно назвать зонами Ферми, т. к. в вакуумном состоянии они должны быть заполнены соответствующими струнами. Используя положительность ядер B (55)–(57), можно установить, что система двух интегральных уравнений действительно имеет решение, причем зоны Ферми составляют часть областей, где соответствующие функции $E_l(\beta)<0$; при этом

$$(67)\qquad |\varepsilon_l^-(\beta)|<|E_l(\beta)|,\quad l=\nu_1-2,\ \nu_1-1.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$(68)\qquad \varepsilon_l(\beta)>0 \text{ при } |\beta|<f(\Lambda,\gamma)\quad (l=\nu_1-2,\ \nu_1-1),$$

где константа $f(\Lambda,\gamma)$ больше, чем $f_0(\Lambda,\gamma)$ (63). Таким образом, границы зоны Ферми, ближайшие к началу оси β, расположены в области больших (по модулю) быстрот, по крайней мере порядка Λ. Можно показать, что при $\gamma<\pi/3$ зоны Ферми действительно существуют. Отметим также, что $\varepsilon_j(\beta)\to0$ при $\beta\to\pm\infty$.

Таким образом, из системы (53) можно определить функции ε_l^- со свойствами (67), (68). Конкретный вид спектра при $|\beta|>\Lambda$ определяется этими функциями. Для j-струн с $j\leqslant\nu_1-3$ и дырки с $j=\nu_1$ он состоит в этой области из двух «безмассовых» ветвей ($\varepsilon_j(\pm\infty)=0$). Для ($\nu_1-l$)-струн ($l=1$, 2) спектр в области больших быстрот в зависимости от константы связи может состоять из нескольких безмассовых ветвей. Заметим, что из-за полной интегрируемости модели переходы между состояниями, соответствующими различным ветвям спектра, отсутствуют. Мы не будем описывать спектр при $|\beta|>\Lambda$ более подробно, т. к. нас интересует спектр модели РСГ при $|\beta|\ll\Lambda$; именно эта часть спектра определяет при $\Lambda\to\infty$ спектр квантово-полевой модели СГ. Воспользовавшись формулами (58), (64), (66), получим из (53) и (51) для физических энергий ε_j струн основной серии и энергии $\varepsilon^{(h)}$ дырки в распределении ν_1-струн:

$$(69)\qquad \varepsilon_j(\beta)=2\mathscr{M}(\gamma,\Lambda)\sin(j\varkappa\gamma)\operatorname{ch}\vartheta\quad (j\leqslant\nu_1-1,\ |\beta|\ll\Lambda),$$

$$(70)\qquad \varepsilon^{(h)}(\beta)=\mathscr{M}(\gamma,\Lambda)\operatorname{ch}\vartheta=-\varepsilon_{\nu_1}(\beta)\quad (|\beta|\ll\Lambda).$$

Здесь $\varkappa$ введена в (59); «ренормированная» быстрота ϑ есть

$$(71)\qquad \vartheta=\varkappa\beta,\quad \varkappa=\pi/(2(\pi-\gamma)),$$

а функция $\mathscr{M}(\gamma, \Lambda)$ определяется как

(72) $$\mathscr{M}(\gamma, \Lambda)=\Delta^{-1}\exp(-\varkappa\Lambda)\{A(\gamma)+F_{\nu_1-2}(\gamma, \Lambda)+F_{\nu_1-1}(\gamma, \Lambda)\}.$$

Функцию $A(\gamma)$ см. в (65); F_{ν_1-2} и F_{ν_1-1} определяются вкладом в асимптотику интегралов, содержащих ε_l^- в (53):

(73) $$F_l(\gamma, \Lambda)=-4\pi\varkappa\Delta\exp(\varkappa\Lambda)\operatorname{ctg}(\varkappa\gamma)\sin(l\varkappa\gamma)\times$$
$$\times\int\varepsilon_l^-(\alpha)\exp(-\varkappa|\alpha|)d\alpha>0 \qquad (l=\nu_1-2, \nu_1-1).$$

Используя (63), (67), (68), можно убедиться, что существует конечный предел

(74) $$\lim_{\Delta\to\infty} F_l(\gamma, \Lambda)=F_l(\gamma)<+\infty.$$

Формулы (69), (70) и определяют спектр модели РСГ в области малых быстрот. Отметим, что для случая $\pi/3<\gamma<\pi/2$, где уравнения (48), (49) отсутствуют, он был получен в [11].

В заключение этого раздела обсудим вопрос о физических зарядах возбуждений в решеточной модели. Уравнения (42) для струн основной серии «замыкаются», поскольку величина $z_{\nu_1}{}^+=0$. Из этих уравнений получаем, что заряды струн основной серии (с учетом поляризации вакуума) равны нулю:

(75) $$z_j=0 \quad (j=1, 2, \ldots, \nu_1-1).$$

Систему же уравнений (42) для зарядов ν_1-струны и состояний с нулевой энергией (45) при учете граничного условия (44) можно решить с помощью формул (П.11), (П.2):

$$z^{(h)}=-z_{\nu_1}=-\omega/2, \qquad z_{\nu_1+1}=\omega, \qquad z_j=\omega Q_j^{(1)} \qquad (j\geqslant\nu_1+2), \qquad \omega=\pi/\gamma.$$

Отметим, что используя предложенное в [12] условие (44), получаем у дырки и высших струн с $i\geqslant1$ в общем случае иррациональные заряды. Этого можно избежать, если выбрать решение уравнений (42) в виде

(76) $$z^{(h)}=-z_{\nu_1}=-\nu_1/2, \quad z_{\nu_1+1}=\nu_1, \quad z_j=\nu_1 Q_j^{(1)} \quad (j\geqslant\nu_1+2), \quad \nu_1=[\pi/\gamma].$$

Граничное условие (44) при этом меняется в некотором смысле минимально. То что заряд дырки при этом (для нечетных ν_1) получается полуцелым, имеет аналогию в случае других моделей (см., например, [19]).

Струны с $j\geqslant\nu_1+1$, обладая нулевой энергией, несут ненулевой заряд. Их роль, как и в случае ММТ [14], состоит в построении правильных состояний рассеяния в секторе с нулевым физическим зарядом. Так, например, состояние рассеяния солитона на антисолитоне получается в зависимости от четности помещением струны с $j=\nu_1+1$ $(z=\nu_1)$ либо с $j=\nu_1+\nu_2$ $(z=\nu_1)$ с быстротой $\beta=(\beta_1+\beta_2)/2$ между двумя дырками с быстротами β_1 и β_2 в вакуумном распределении ν_1-струн.

5. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ СГ

Для перехода к непрерывной квантово-полевой модели СГ необходимо снять регуляризацию, т. е. устремить постоянную решетки $\Delta\to0$. «Обрезание» Λ при этом (см. (5)) связано с Δ формулой $\exp(-\Lambda/2)=m\Delta/4$ и

$\Lambda\to\infty$. Фиксируем физическую массу M_h дырки в вакуумном распределении ν_1-струн (см. (70), (72)) и произведем перенормировку массы по формуле

$$M_h=\mathscr{F}(\gamma)m\exp(-\gamma\Lambda'/\pi), \tag{77}$$

здесь $\mathscr{F}(\gamma)$ — ограниченная функция константы связи

$$\mathscr{F}(\gamma)=\{A(\gamma)+F_{\nu_1-2}(\gamma)+F_{\nu_1-1}(\gamma)\}/4 \tag{78}$$

(см. (65), (74)), а величина Λ', имеющая смысл обрезания по ренормированным быстротам ϑ (71), есть

$$\Lambda'=\varkappa\Lambda. \tag{79}$$

При этом восстанавливается релятивистская инвариантность, и спектр во всей области быстрот дается следующими формулами (см. (69), (70)):

$$\varepsilon^{(h)}(\vartheta)=M_h\operatorname{ch}\vartheta, \tag{80}$$

$$\varepsilon_j(\vartheta)=m_j\operatorname{ch}\vartheta,\quad m_j=2M_h\sin(j\varkappa\gamma)\quad (j\leqslant\nu_1-1).$$

Тем самым воспроизводятся известный квазиклассический спектр модели СГ [2, 3] и точный спектр модели ММТ, полученный в [13, 14]. Формула (77) также воспроизводит формулу перенормировки массы, получающуюся в модели СГ по теории возмущений [2]. Отметим, что, как можно показать, $\mathscr{F}(\gamma)\to A(\gamma)/4\to{}^1/_2$ при $\gamma\to0$; при этом получаем следующую простую связь между перенормированной и голой массой основной частицы: $m_1=m\exp\{-\gamma\Lambda'/\pi\}$ $(\gamma\to0)$.

Физические заряды возбуждений в квантово-полевом пределе по-прежнему даются формулами (76). Пользуясь методом одевающих уравнений для S-матрицы [14], можно вычислить матрицы рассеяния в модели СГ. Ответы получаются очевидным образом те же, что и для ММТ [14].

Мы показали, что модель РСГ действительно является хорошей вполне интегрируемой регуляризацией квантово-полевой модели СГ и в области констант связи $\gamma<\pi/2$ позволяет получить точные ответы и строго решить проблему ультрафиолетовых расходимостей. При этом подтверждается эквивалентность моделей СГ и ММТ в этой области констант связи. Таким образом, модель РСГ действительно позволяет разумно доопределить гамильтониан квантово-полевой модели на область больших констант связи [9]. Наиболее интересна, конечно, область констант связи $\pi/2<\gamma<\pi$, где в рамках модели ММТ в точках $\gamma=k\pi/(k+1)$ (k — целое) установлено изменение структуры физического вакуума [20]. Отметим также, что на основе $\mathscr{L}$-оператора (3) построена также другая версия модели РСГ [21], близкая к фундаментальным решеточным моделям типа XXZ-модели Гейзенберга. С практической точки зрения различие между этими двумя моделями РСГ сводится к замене одночастичной дисперсии (9) на $h_1(\alpha)=dp(\alpha)/d\alpha$ (см. (8)). В области $\gamma<\pi/2$ в квантово-полевом пределе обе модели РСГ дают одинаковые результаты; в области же $\gamma>\pi/2$ ответы, по-видимому, различаются. Эти вопросы мы рассмотрим в последующих работах, где будут существенно использованы обозначения и результаты данной работы, особенно разделов 2 и 3.

В заключение мы хотим поблагодарить В. Е. Корепина за многочисленные советы и замечания и Л. Д. Фаддеева за обсуждения и интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Представим, следуя работе [12], величину π/γ в виде цепной дроби (теория цепных дробей изложена, например, в [15]) $\pi/\gamma \equiv \omega = [\nu_1; \nu_2, \nu_3, \ldots]$ (см. (14)). Важными объектами являются подходящие дроби $\omega_i = [\nu_1; \nu_2, \ldots, \nu_i] = p_i/q_i$ (15), являющиеся приближениями к ω. Несократимые числа p_i и q_i могут быть получены из рекуррентных соотношений

(П.1) $$p_k = \nu_k p_{k-1} + p_{k-2}, \qquad q_k = \nu_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

причем можно считать, что эти числа определены при $k \geqslant -1$:

(П.2) $$p_{-1}=0, \quad p_0=1, \quad p_1=\nu_1, \quad p_2=1+\nu_1\nu_2, \ldots,$$
$$q_{-1}=1, \quad q_0=0, \quad q_1=1, \quad q_2=\nu_2, \ldots.$$

Обычным образом определенные остатки r_i цепной дроби ω

(П.3) $$r_i = [\nu_i; \nu_{i+1}, \nu_{i+2}, \ldots] = \nu_i + \cfrac{1}{\nu_{i+1} + \cfrac{1}{\nu_{i+2} + \ldots}}$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению

(П.4) $$r_i^{-1} = r_{i-1} - \nu_{i-1}.$$

Имеет место следующее тождество:

(П.5) $$\omega = \frac{p_{i-1} r_i + p_{i-2}}{q_{i-1} r_i + q_{i-2}},$$

с помощью которого легко получить важное соотношение

(П.6) $$p_k = \omega[q_k + (-1)^k x_k],$$

где числа x_k суть

(П.7) $$x_{-1}=1, \quad x_0=\omega^{-1}, \quad x_k = \prod_{l=1}^{k+1} r_l^{-1} \quad (k \geqslant 0), \quad x_k = x_{k-2} - \nu_k x_{k-1}.$$

Перейдем к описанию решения неравенств (11), (12) [12]. Эти неравенства, очевидно, равносильны следующим равенствам:

(П.8) $$[m/\omega] + [(n-m)/\omega] = [(n-1)/\omega] \quad (m=1, 2, \ldots, n-1).$$

Пусть ω – иррациональное число, так что последовательность чисел ν_k бесконечна (рассмотрение для рациональных ω проводится аналогично). Равенства (П.8) имеют очевидное решение $n=1, 2, \ldots, \nu_1+1$. При $n > \nu_1+1$ равенства (П.8) равносильны следующим:

(П.9) $$[m_k/\omega] + [(n-m_k)/\omega] = n_1 - 1,$$
$$[(m_k-1)/\omega] + [(n-m_k+1)/\omega] = n_1 - 1 \quad (k=1, 2, \ldots, n_1-1).$$

Здесь мы определили целые числа $m_k = [k\omega]+1$, $n_1 = [(n-1)/\omega]+1 \geqslant 2$. Равенства (П.9) приводятся к виду $n-1-n_1\nu_1 = [k/r_2] + [(n_1-k)/r_2]$ $(k=1, \ldots, n_1-1)$. Эти равенства имеют очевидное решение $n_1=2, 3, \ldots, \nu_2+1$; при этом $n=1+n_1\nu_1=p_0+n_1p_1$. Если $n_1 > \nu_2+1$, то сводим (П.9) к системе $n_1-1-n_2\nu_2 = [k/r_3] + [(n_2-k)/r_3]$ $(k=1, \ldots, n_2-1)$. Здесь $n_2 = [(n_1-1)/r_2]+1 \geqslant 2$. Опять система имеет решение $n_2=2, 3, \ldots, \nu_3+1$; при этом $n_1=1+n_2\nu_2$ и $n=n_1\nu_1+n_2=p_1+n_2p_2$. Поступая аналогичным образом и дальше, получаем на i-м шаге следующую серию решений исходной системы (П.8): $n_J = p_{i-1}+Jp_i$; $J=2,3,\ldots,\nu_{i+1}+1$. После несложных переобозначений приходим к классификации (16).

В заключение заметим, что (П.6) позволяет представить (16) в следующем виде:

(П.10) $$n_j=\omega(Q_j^{(i)}+R_j^{(i)}) \qquad (m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-1, \quad i\geqslant 0).$$

Здесь m_i определены в (17); целые числа $Q_j^{(i)}$ выражаются через знаменатели q_i подходящих дробей (15):

(П.11) $$Q_j^{(i)}=q_{i-1}+(j-m_i)q_i \qquad (m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-1),$$

а «остатки» $R_j^{(i)}$ – через числа x_k (П.7):

(П.12) $$R_j^{(i)}=(-1)^{i+1}(x_{i-1}-(j-m_i)x_i) \qquad (m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-1).$$

При этом $(-1)\leqslant R_j^{(0)}<\{(\nu_1-1)\omega^{-1}-1\}$ и $0<x_{i-1}\{1-(\nu_{i+1}-1)r_{i+1}^{-1}\}<(-1)^{i+1}R_j^{(i)}\leqslant \leqslant x_{i-1}<1$. Заметим также, что v_j (18) просто выражается через $Q_j^{(i)}$, поскольку $[(n_j-1)/\omega]=Q_j^{(i)}-1$:

(П.13) $$v_j=\exp\{i\pi(Q_j^{(i)}-1)\}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Формулы (П.10) и (П.13) оказываются полезными при вычислении фурье-образов величин $p_j'(\beta)$ (23), $h_j(\beta)$ (19) и $T_{jl}(\beta)$ (24). Фурье-образы первых двух из них суть

(П.14) $$\tilde{p}_j'(k)\equiv\int p_j'(\beta)\exp(ik\beta)\,d\beta=$$
$$=-(2\pi/\Delta)\cos k\Lambda\,\mathrm{sh}\{\pi k((-1)^{i+1}-R_j^{(i)})\}/\mathrm{sh}\,\pi k \qquad (m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-1),$$

(П.15) $$\tilde{h}_j(k)=-(4\pi i/\Delta\sin\gamma)(\mathrm{sh}\,jk\gamma/\mathrm{sh}\,\pi k)\{\exp(ik\Lambda)\,\mathrm{sh}(2\gamma k-i\gamma)-\text{c.c.}\}$$
$$(j=1,2,\ldots,\nu_1-2),$$

(П.16) $$\tilde{h}_j(k)=(4\pi i/\Delta\sin\gamma)(\mathrm{sh}\,\pi R_j^{(i)}k/\mathrm{sh}\,\pi k)\times$$
$$\times\{\exp(ik\Lambda)\,\mathrm{sh}((\pi-2\gamma)k+i\gamma)-\text{c. c.}\} \quad (j\geqslant\nu_1-1).$$

Величины $T_{jl}(\beta)$ (24) нетрудно представить в следующем виде:

(П.17) $$-2\pi T_{jl}(\beta)=\varphi(\beta,n_j+n_l,v_jv_l)+\varphi(\beta,|n_j-n_l|,v_jv_l)+$$
$$+2\sum_{m=1}^{\min(n_j,n_l)-1}\varphi(\beta,|n_j-n_l|+2m,v_jv_l),$$

где $\varphi(\beta,n,v)=-v\sin n\gamma/(\mathrm{ch}\,\beta-v\cos n\gamma)$. Отсюда видно, что величины T_{jl} те же, что в XXZ-модели. Используя их фурье-образы, можно получить следующие соотношения между ними [12]:

(П.18) $$T_{jl}-s_i*[(1-2\delta_{m_ij})T_{j-1,l}+T_{j+1,l}]=(-1)^i(\delta_{j-1,l}+\delta_{j+1,l})s_i$$
$$(m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-2),$$
$$T_{jl}-(1-2\delta_{m_ij})s_i*T_{j-1,l}-d_i*T_{jl}-s_{i+1}*T_{j+1,l}=(-1)^i(\delta_{j-1,l}s_i+\delta_{jl}d_i-\delta_{j+1,l}s_{i+1})$$
$$(j=m_{i+1}-1) \quad T_{0k}\equiv 0,$$

где фурье-образы функций $s_i(\beta)$ и $d_i(\beta)$ даются формулами (33), (34).

Используя (П.14), можно получить аналогичное соотношение для величин a_j (22):

(П.19)
$$a_j - s_i * [(1-2\delta_{m_i j}) a_{j-1} + a_{j+1}] = 0 \qquad (m_i \leqslant j \leqslant m_{i+1}-2),$$

$$a_j - (1-2\delta_{m_i j}) s_i * a_{j-1} - d_i * a_j - s_{i+1} * a_{j+1} = (-1)^i Z_i \qquad (j = m_{i+1}-1),$$

$$a_0 = 0.$$

Величина Z_j приведена в (35). Заметим, что голые заряды j-струн (16) также удовлетворяют аналогичным соотношениям, получающимся из (П.1), (П.2),

(П.20)
$$n_j - s_i * [(1-2\delta_{m_i j}) n_{j-1} + n_{j+1}] = 0 \qquad (m_i \leqslant j \leqslant m_{i+1}-2),$$

$$n_j - (1-2\delta_{m_i j}) s_i * n_{j-1} - d_i * n_j - s_{i+1} * n_{j+1} = 0 \qquad (j = m_{i+1}-1), \qquad n_0 = 0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Энергия вакуума $\mathscr{E}$ в модели РСГ есть суммарная энергия частиц в вакууме (см. (26)). Учитывая картину вакуумного заполнения (см. (48)–(51)), получим ($L = M\Delta$ – длина решетки)

$$\mathscr{E}/L = \sum_l \int \rho_l(\beta) h_l(\beta)\, d\beta \qquad (l = \nu_1 - 2, \nu_1 - 1, \nu_1).$$

Используя (30), (31), (37), (38), можно выразить энергию вакуума в терминах физических энергий ε^- (39) и величин a (22):

$$\mathscr{E}/L = \int \{a_{\nu_1-2}\bar{\varepsilon}_{\nu_1-2} + a_{\nu_1-1}\bar{\varepsilon}_{\nu_1-1} - a_{\nu_1}\varepsilon_{\nu_1}\}\, d\beta.$$

При $\Lambda \to \infty$ отсюда можно получить следующую асимптотику:

$$\mathscr{E} = (M/\Delta)\{C_1(\gamma) + C_2(\gamma) \exp(-2\varkappa\Lambda)\},$$

где $\varkappa$ дается формулой (59). Функции константы связи $C_{1,2}$ не зависят от Λ и в принципе могут быть найдены из явного решения интегральных уравнений (53) и выражений (22), (П.14). В области $\pi/3 < \gamma < \pi/2$ их вид приведен в [11].

Литература

[1] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*– ТМФ, 1974, *21*, № 2, 160—174.
[2] *Faddeev L. D., Korepin V. E.*— Phys. Rep., 1978, *42C*, № 1, 1—87.
[3] *Dashen R., Hasslacher B., Neveu A.*— Phys. Rev., 1975, *D*11, № 11, 3424—3450.
[4] *Coleman S.*— Phys. Rev., 1975, *D11*, № 8, 2088—2097.
[5] *Фаддеев Л. Д.* Квантовые вполне интегрируемые задачи теории поля. Препринт ЛОМИ ЭР-2-79, Л.: ЛОМИ, 1979.
[6] *Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*– ТМФ, 1979, *40*, № 2, 194—220.
[7] *Luther A.*— Phys. Rev., 1976, *B14*, 2153—2159.
[8] *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*— Вестн. ЛГУ, 1981, № 22, 84—87.
[9] *Izergin A. G., Korepin V. E.*— Nucl. Phys., 1982, *B205*, FS 5, № 3, 401—413.
[10] *Тарасов В. О.*— Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1982, *120*, 173—187.
[11] *Боголюбов Н. М.*— ТМФ, 1982, *51*, № 3, 344—354.
[12] *Takahashi M., Suzuki M.*— Progr. Theor. Phys., 1972, *48*, № 6B, 2187—2208.
[13] *Bergknoff H., Thacker H. B.*– Phys. Rev., 1979, *D19*, 3666–3681.
[14] *Корепин В. Е.,*– ТМФ, 1979, *41*, № 2, 169–189.
[15] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: Наука, 1978, 112 с.

[16] *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*— ЭЧАЯ, 1982, *13*, вып. 3, 501—541.
[17] *Yang C. N., Yang C. P.*— J. Math. Phys., 1969, *10*, 1115—1122.
[18] *Takahashi M.*— Progr. Theor. Phys., 1973, *50*, № 5, 1519—1536.
[19] *Faddeev L. D., Takhtajan L. A.*— Phys. Lett., 1981, *85A*, № 6, 375—377.
[20] *Korepin V. E.*— Commun. Math., Phys., 1980, *76*, 165—176.
[21] *Тарасов В. О., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*— ТМФ, 1983, *57*, № 2, 163—181.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19.I.1984 г.

LATTICE COMPLETELY INTEGRABLE REGULARIZATION OF THE SINE — GORDON MODEL FOR SMALL COUPLING CONSTANTS

Bogoliubov N. M., Izergin A. G.

Structure of vacuum state and spectrum of one-particle excitations in the quantum lattice sine-Gordon model are investigated. This model is a regularised version of the corresponding quantum field model. The region of the coupling constant $0<\gamma<\pi/2$ is considered.