А. К. Цих, О циклах, разделяющих нули аналитических функций в C^n, *Сиб. матем. журн.*, 1975, том 16, номер 5, 1118–1121

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XVI, № 5 сентябрь — октябрь 1975

УДК 513.83+517.55

А. К. ЦИХ

О ЦИКЛАХ, РАЗДЕЛЯЮЩИХ НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В C^n

1°. Е. Мартинелли ([1]) и Г. Сорани ([2]) в связи с обобщением логарифмического вычета на голоморфные функции многих комплексных переменных ввели понятие разделяющих циклов. А именно, пусть $f_\nu(z)=f_\nu(z_1,\ldots,z_n)$, $\nu=1,\ldots,n$, — функции, голоморфные в области $D\subset C^n$ пространства n комплексных переменных $z_1,\ldots,z_n$, и множество $E=F_1\cap\ldots\cap F_n$, где $F_\nu=\{z\in D:f_\nu(z)=0\}$ дискретно в D. Если U_μ — окрестность точки $0_\mu\in E$, не содержащая других точек E, и ε_ν достаточно малы, то через Γ_μ обозначим связную компоненту множества $\{z\in D:|f_\nu(z)|=\varepsilon_\nu, \nu=1,\ldots,n\}$, лежащую в U_μ и снабженную некоторой ориентацией.

Указанный цикл называется локально-разделяющим для аналитических множеств $F_1, F_2,\ldots,F_n$ в точке 0_μ или просто локально-разделяющим циклом ([2]).

Цикл $\Gamma\sim\sum\limits_\mu N_\mu\Gamma_\mu$ из $D\setminus F$, где $F=F_1\cup\ldots\cup F_n$, называется глобально-разделяющим, соответственно подгруппа $H_n^*(D\setminus F)$ n-мерной группы гомологий $H_n(D\setminus F)$, порожденная локально-разделяющими циклами $\{\Gamma_\mu\}_{0_\mu\in E}$, называется глобально-разделяющей подгруппой.

Как показано в ([1, 2]), глобально-разделяющий цикл удовлетворяет условию

$$\Gamma\sim 0 \quad \text{в} \quad D\setminus F[j],\quad j=1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $F[j]=F\setminus F_j$.

Мартинелли для $n=2$ показал, что если цикл Γ_μ лежит на $S^3\setminus(F_1\cup F_2)$, где S^3 — сфера достаточно малого радиуса с центром в $0_\mu\in E$, то условие (1) является также и достаточным для того, чтобы Γ_μ был локально-разделяющим.

Встает вопрос, будет ли условие (1) достаточным для того, чтобы цикл $\Gamma\subset D\setminus F$ был глобально-разделяющим. В ([3]) на этот вопрос дан положительный ответ в случае, когда: *a*) D — область голоморфности, *b*) $\operatorname{grad} f_\nu\neq 0$ в точках F_ν, *c*) F_ν, $\nu=1,\ldots,n$, в общих точках находятся в общем положении.

Там же в ([3]) приводится пример, показывающий, что условие *a*) существенно.

В настоящей работе показывается, что требования *b*) и *c*) можно опустить, а именно, доказывается следующая

Теорема. *Пусть D — область голоморфности в C^n, $f_1,\ldots,f_n$ — система голоморфных в D функций таких, что множество $E=F_1\cap\ldots\cap E_s$ $(F_\nu=\{z\in D:f_\nu(z)=0\})$ дискретно в D.*

Тогда для того, чтобы цикл $\Gamma\subset D\setminus F_1\cup\ldots\cup F_n$ был глобально-разделяющим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1).

2°. Для дальнейшего нам потребуется точная последовательность Майера — Виеториса ([4], с. 246)

$$\ldots \xrightarrow{i_*} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{j_*} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} \ldots. \tag{2}$$

Здесь X_1, X_2 — полиэдры, i_*, j_* — гомоморфизмы, линейно выражающиеся через гомоморфизмы, индуцированные соответствующими вложениями, ∂_* — так называемый связывающий гомоморфизм ([4], с. 238). Принцип действия ∂_* следующий: если z — q-мерный цикл из $X_1 \cup X_2$, а z_1 — часть цикла z, лежащая в X_1, то граница ∂z_1 цепи z_1, будучи вложенной в $X_1 \cap X_2$, и будет представителем элемента $\partial_* \bar{z} \in H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$.

Из описанной конструкции гомоморфизма ∂_* вытекает следующая

Лемма 1. *Если X, X_1, X_2 — полиэдры, причем $X_1 \subseteq X_2$, то диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_q(X \cup X_1) & \xrightarrow{\partial_*^1} & H_{q-1}(X \cap X_1) \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow \\ H_q(X \cup X_2) & \xrightarrow{\partial_*^2} & H_{q-1}(X \cap X_2), \end{array}$$

где ∂_*^1, ∂_*^2 — связывающие гомоморфизмы, α, β индуцированы вложениями, коммутативна.

Лемма 2. *Пусть D — область голоморфности в C^n, $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_s$ — главные аналитические множества* ([5], с. 40) *в D. Тогда*

$$H_{n+q}(D \setminus \Phi_0 \cap \Phi_1 \cap \ldots \cap \Phi_s) \simeq 0 \quad \text{для всех} \quad q > s.$$

Доказательство. Будем доказывать лемму индукцией по s. Если $s=0$, то $H_{n+q}(D \setminus \Phi_0) \simeq 0$ для всех $q>0$, так как $D \setminus \Phi_0$ — область голоморфности ([6], с. 209). Обозначим $\Phi_0 \cap \Phi_1 \cap \ldots \cap \Phi_j$ через A^j. Предположим, что $H_{n+q}(D \setminus A^s) \simeq 0$ для всех $q>s$. Далее, очевидно,

$$D \setminus A^{s+1} = D \setminus (A^s \cap \Phi_{s+1}) = (D \setminus A^s) \cup (D \setminus \Phi_{s+1}).$$

Положим в (2) $X_1 = D \setminus A^s$, $X_2 = D \setminus \Phi_{s+1}$, тогда при $q>s$ последовательность (2) принимает вид

$$0 \xrightarrow{j_*} H_{n+q+1}(D \setminus A^{s+1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n+q}[(D \setminus \Phi_{s+1}) \setminus A^s] \xrightarrow{i_*} 0,$$

так как в силу предположения индукции $H_{n+j}(D \setminus A^s) \oplus H_{n+j}(D \setminus \Phi_{s+1}) \simeq 0$ для $j=q$, $q+1$, если $q>s$.

Но $D \setminus \Phi_{s+1}$ — область голоморфности, поэтому по предположению индукции

$$0 \simeq H_{n+q}[(D \setminus \Phi_{s+1}) \setminus A^s] \simeq H_{n+q+1}(D \setminus A^{s+1})$$

для $q>s$ или для $q+1>s+1$. Лемма доказана.

3°. Введем обозначения $S^k = F_1 \cap \ldots \cap F_k$, $S_k = F_{k+1} \cup \ldots \cup F_n$, $L_k = S^k \cap S_k$, $k=0, 1, \ldots, n-1$ *). Тогда $L_0 = F$, $L_{n-1} = E$, $L_k = (S_{k+1} \cap S^k) \cup S^{k+1}$, $L_{k+1} = (S_{k+1} \cap S^k) \cap S^{k+1}$.

Для $X_k = D \setminus S_{k+1} \cap S^k$, $X_k' = D \setminus S^{k+1}$ рассмотрим семейство точных последовательностей вида (2)

$$\ldots \xrightarrow{i_*^k} H_{n+q+1}(X_k) \oplus H_{n+q+1}(X_k') \xrightarrow{j_*^k} H_{n+q+1}(D \setminus L_{k+1}) \xrightarrow{\partial_*^k}$$

$$\xrightarrow{\partial_*^k} H_{n+q}(D \setminus L_k) \to \ldots, \tag{3}$$

*) S^0 полагаем равным $F_1 \cup \ldots \cup F_n = F$.

$k=0, 1, \ldots, n-1$, которое определяет следующую последовательность

$$H_n(D\setminus F) \xleftarrow{\partial_*^0} H_{n+1}(D\setminus L_1) \xleftarrow{\partial_*^1} \ldots \xleftarrow{\partial_*^{k-1}} H_{n+k}(D\setminus L_k) \xleftarrow{\partial_*^k} \ldots$$
$$\ldots \xleftarrow{\partial_*^{n-2}} H_{2n-1}(D\setminus E). \quad (4)$$

Доказательство теоремы. Пусть n-мерный цикл $\Gamma\subset D\setminus F$ удовлетворяет условию (1). Доказательство того, что $\overline{\Gamma}\in H_n^*(D\setminus F)$, состоит в последовательной проверке следующих утверждений.

а) Существует $(2n-1)$-мерный цикл $h_{2n-1}\subset D\setminus E$ такой, что $\partial_*^0\circ\partial_*^1\circ\ldots$ $\ldots\partial_*^{n-2}\overline{h}_{2n-1}=\overline{\Gamma}$;

б) Выполняется равенство $\partial_*^0\circ\partial_*^1\circ\ldots\circ\partial_*^{n-2}\overline{h}_{2n-1}=\sum\limits_{\mu}N_\mu\Gamma_\mu$, где Γ_μ — локально-разделяющие циклы.

Докажем а). Поскольку $\Gamma\sim 0$ в $D\setminus F[1]=X_0$ и в $D\setminus F_1=X_0'$, то из точности последовательности (3) для $k=0$ следует, что существует цикл $\overline{h}_{n+1}\in H_{n+1}(D\setminus L_1)$, для которого $\partial_*^0\overline{h}_{n+1}=\overline{\Gamma}$.

Допустим, что в $H_{n+k}(D\setminus L_k)$ существует такой цикл $\overline{h}_{n+k}$, что $\partial_*^0\circ\ldots\circ\partial_*^{k-1}\overline{h}_{n+k}=\overline{\Gamma}$.

Покажем, что найдется $h_{n+k+1}\subset D\setminus L_{k+1}$ со свойством $\partial_*^k\overline{h}_{n+k+1}=$ $=\overline{h}_{n+k}$. Для этого по L_k построим множества $M_q=M_q(k)=S^q\cap(S_q\setminus F_{k+1})$, $P_q=P_q(k)=S^q\cap(S_q\setminus S_{k+1})$, $q=0, 1, \ldots, k$. Легко видеть, что M_q и P_q строятся аналогично L_q, только исходя из совокупностей множеств $F_1, \ldots, [k+1], \ldots, F_n$ и $F_1, F_2, \ldots, F_{k+1}$ соответственно: при этом $D\setminus M_k=$ $=X_k$, $D\setminus P_k=X_k'$, $D\setminus M_0=D\setminus F[k+1]$, $D\setminus P_0=D\setminus F_1\cup\ldots\cup F_{k+1}$. Положим $\widetilde{X}_q=D\setminus S^q\cap(S_{q+1}\setminus F_{k+1})$, $\widetilde{X}_q'=D\setminus S^{q+1}$. Тогда для пар $(\widetilde{X}_q, \widetilde{X}_q')$ можно написать точные последовательности типа (3)

$$\ldots \xrightarrow{\widetilde{j}_*^q} H_{n+i+1}(D\setminus M_{q+1}) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_*^q} H_{n+i}(D\setminus M_q) \xrightarrow{\widetilde{i}_*^q} H_{n+i}(\widetilde{X}_q)\oplus$$
$$\oplus H_{n+i}(\widetilde{X}_q') \xrightarrow{\widetilde{j}_*^q} \ldots, \quad (3')$$

$q=0, 1, \ldots, k$, и им сопоставить последовательность, аналогичную последовательности (4).

$$H_n(D\setminus F[k+1]) \xleftarrow{\widetilde{\partial}_*^0} \ldots \xleftarrow{\widetilde{\partial}_*^{q-1}} H_{n+q}(D\setminus M_q) \xleftarrow{\widetilde{\partial}_*^q} \ldots \xleftarrow{\widetilde{\partial}_*^{k-1}}$$
$$\xleftarrow{\widetilde{\partial}_*^{k-1}} H_{n+k}(D\setminus M_k). \quad (4')$$

Здесь $\widetilde{\partial}_*^q$, $q=0, 1, \ldots, k-1$,— мономорфизмы, так как последовательности (3) точны, а в силу леммы 2 $H_{n+q+1}(\widetilde{X}_q)\simeq H_{n+q+1}(\widetilde{X}_q')\simeq 0$. С помощью (3) и (4) составим следующую диаграмму

$$\xleftarrow{\partial_*^k} H_{n+k+1}(D\setminus L_{k+1}),$$

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(D\setminus F) & \xleftarrow{\partial_*^0} \ldots \xleftarrow{\partial_*^{q-1}} & H_{n+q}(D\setminus L_q) & \xleftarrow{\partial_*^q} \ldots \xleftarrow{\partial_*^{k-1}} & H_{n+k}(D\setminus L_k) & \xleftarrow{\partial_*^k} \\ \downarrow{\scriptstyle\nu} & & & & \downarrow{\scriptstyle i_{*1}^k} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\gamma\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big\downarrow i^k_{*1} \\
H_n(D\setminus F[k+1]) \xleftarrow{\widetilde{\partial}^0_*} \cdots \xleftarrow{\widetilde{\partial}^{q-1}_*} H_{n+q}(D\setminus M_q) \xleftarrow{\widetilde{\partial}^q_*} \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \xleftarrow{\widetilde{\partial}^{k-1}_*} H_{n+k}(D\setminus M_k),
\end{array}$$

где i^k_{*1} — проекция гомоморфизма $i^k_*: H_{n+k}(D\setminus L_k) \to H_{n+k}(X_k) \oplus H_{n+k} \times \times (X'_k) = H_{n+k}(D\setminus M_k) \oplus H_{n+k}(D\setminus P_k)$ в последовательности (3) на первое слагаемое $H_{n+k}(D\setminus M_k)$, γ — гомоморфизм, индуцированный вложением $D\setminus F \subset D\setminus F[k+1]$.

Так как $X_q \in \widetilde{X}_q$, $X_q = \widetilde{X}'_q$ для всех $q=0, 1, \ldots, n-1$, то в силу леммы 1

$$\gamma \circ \partial^*_0 \circ \widetilde{\partial}^1_* \circ \ldots \circ \partial^{k-1}_* \bar{h}_{n+k} = \widetilde{\partial}^0_* \circ \widetilde{\partial}^1_* \circ \ldots \circ \widetilde{\partial}^{k-1}_* \circ i^k_{*1} \bar{h}_{n+k}.$$

Но по построению h_{n+k} имеем $\partial^0_* \circ \ldots \circ \partial^{k-1}_* \bar{h}_{n+k} = \bar{\Gamma}$, а по условию теоремы $\gamma\bar{\Gamma}=0$, поэтому $\widetilde{\partial}^0_* \circ \ldots \circ \widetilde{\partial}^{k-1}_* \circ i^k_{*1} \bar{h}_{n+k} = 0$. Поскольку $\widetilde{\partial}^q_*$ — мономорфизмы, то и $i^k_{*1}\bar{h}_{n+k} = 0$. Точно так же показывается, что элемент $i^k_{*2}\bar{h}_{n+k} \in H_{n+k}(D\setminus P_k) = H_{n+k}(X'_k)$ — нулевой, где i^k_{*2} — проекция гомоморфизма i^k_* на второе слагаемое. В силу точности последовательности (3) и из того, что $i^k_* \bar{h}_{n+k} = 0$, следует существование элемента $h_{n+k+1} \in \in H_{n+k+1}(D\setminus L_{k+1})$ такого, что $\partial^k_* \bar{h}_{n+k+1} = \bar{h}_{n+k}$, и утверждение а) доказано.

Докажем б). Так как D — область голоморфности, то $H_{2n-1}(D) \simeq 0$, и ввиду дискретности E за базу $(2n-1)$-мерных гомологий $D\setminus E$ можно принять $\{h^\mu\}_{O_\mu \in E}$, где $h^\mu = \partial\{z \in U_\mu : |f_\nu(z)| < \varepsilon, \nu = 1, 2, \ldots, n\}$ (здесь ∂ — граница цепи, U_μ определено в 1^0). Поэтому построенный по индукции цикл $h_{2n-1} \sim \sum\limits_\mu N_\mu h^\mu$.

Покажем, что $\partial^0_* \circ \ldots \circ \partial^{n-2}_* \bar{h}^\mu = \bar{\Gamma}_\mu$. Пусть J есть множество индексов $1, 2, \ldots, n$. Обозначим через J^k_i следующее подмножество множества J: $k-i+1, k+2, k+3, \ldots, n$, а через γ^k_i — цепь

$$\{z \in U_\mu : |f_q(z)| = \varepsilon,\ q \in J^k_i, |f_\nu(z)| < \varepsilon, \nu \in J\setminus J^k_i\},$$
$$i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 1, \ldots, n.$$

Цепь γ^k_i ориентируем так, чтобы цепь $\gamma^k_0 + \gamma^k_1 + \ldots + \gamma^k_k = \omega_k$ была циклом, который, как нетрудно проверить, лежит в $D\setminus L_k$; при этом $\gamma^k_0 \subset D\setminus S_k \cap S^{k-1}$, $\gamma^k_1 + \ldots + \gamma^k_k \subset D\setminus S^k$.

Далее, $\partial\gamma^k_0 = \gamma^{k-1}_0 + \gamma^{k-1}_1 + \ldots + \gamma^{k-1}_{k-1} = \omega_{k-1}$, откуда видно, что $\bar{\omega}_{k-1} = \partial_* \bar{\omega}_k$. Поэтому, если учесть, что $h^\mu = \omega_{n-1}$, $\Gamma_\mu = \omega_0$, получим требуемое.

Теорема доказана.

*Поступила в редакцию
20 апреля 1974 г.*

ЛИТЕРАТУРА

1 *Martinelli S.* Contributi alla teoria dei residui per le funzioni di due variabili complesse. Ann. mat. pura ed appl., serie 4, 39(1955), 422—430.
2 *Sorani G.* Sullindicatore logaritmico per le funzioni di piu variabili complesse. Rend. mat. e applic., serie 5, 19(1960), 130—142.
3 *Южаков А. П.* Одно условие когравицы по Лере и его применение к логарифмическому вычету. Сиб. мат. журн., 11, № 3(1970), 708—711.
4 *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М., «Мир», 1971.
5 *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. М., «Мир», 1965.
6 *Фукс Б. А.* Специальные главы аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз., 1963.