



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Баранова, Оценка коэффициента c_4
однолистных функций в зависимости от
 $|c_2|$,
Матем. заметки, 1972, том 12, вы-
пуск 2, 127–130

<https://www.mathnet.ru/mzm9858>

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны
с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

30 апреля 2025 г., 06:28:31



ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА c_4 ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ $|c_2|$

В. А. Баранова

В классе S функций $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, улучшается оценка $|c_4|$ в зависимости от $|c_2|$, полученная Альфорсом. Самая грубая из полученных оценок $|c_4| \leq 4/15 (11 + |c_2|)$ лучше оценки Альфорса: $|c_4| \leq \frac{4}{\sqrt{15}} \sqrt{11 + |c_2|^2}$. Библи. 7 наз.

Пусть S — класс функций $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$. З. Хажинский и М. Шиффер [1] (см. также Г. М. Голузин [2], стр. 574, 575) доказали неравенство $|c_4| \leq 4$ для $f(z) \in S$, опираясь на неравенство Н. Грунского [3] (см. также [2], стр. 123). Альфорс [4] установил неравенство $16 - |c_4|^2 \geq \frac{16}{15} (4 - |c_2|^2)$ между $|c_2|$ и $|c_4|$ для $f(z) \in S$, т. е. получил неравенство

$$|c_4| \leq \frac{4}{\sqrt{15}} \sqrt{11 + |c_2|^2}, \quad (1)$$

усиливающее результат Хажинского и Шиффера. Доказательство Альфорса опирается на известную теорему площадей Голузина [5] (см. также [2], стр. 471) для p -листных функций.

В настоящей заметке получим усиление неравенства Альфорса (1) [см. неравенства (6) — (9)], исходя из обобщенной теоремы площадей для однолистных функций

(см. Н. А. Лебедев [6], стр. 218, 219; И. М. Милин [7]). Сформулируем обобщенную теорему площадей для $f(z) \in \in S$ (в [6] обобщенная теорема площадей приведена для неналегающих областей; в случае одной области получаем нужный нам результат).

Пусть $f(z) \in S$. Положим

$$\ln \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = \sum_{p, q=0}^{\infty} \omega_{p, q} \xi^p z^q.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{p=1}^{\infty} p \left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{p, q} x_p x_q \right|^2 \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2 \quad (2)$$

для произвольных x_p , $p = 1, 2, \dots$, таких, что правая часть в (2) меньше ∞ .

Отметим, что из (2) с помощью неравенства Буняковского сразу следует неравенство Грунскогo:

$$\left| \sum_{p, q=1}^{\infty} \omega_{p, q} x_p x_q \right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2. \quad (3)$$

Займемся теперь оценкой $|c_4|$. Для этого применим неравенство (2) к функции $\sqrt{f(z^2)} \in S$ и положим сначала $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \dots = 0$ и затем $x_1 = l$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = \dots = 0$:

$$|\omega_{11}| + 3|\omega_{13}| \leq 1, \quad (4)$$

$$|\omega_{11}l + 2\omega_{13}|^2 + 3|\omega_{31}l + 2\omega_{33}|^2 \leq |l|^2 + \frac{4}{3}, \quad (5)$$

$$\omega_{11} = \frac{1}{2} c_2, \quad \omega_{13} = \omega_{31} = \frac{1}{2} \left(c_3 - \frac{3}{4} c_2^2 \right),$$

$$\omega_{33} = \frac{1}{2} c_4 - c_2 \left(c_3 - \frac{13}{24} c_2^2 \right) = \frac{1}{2} c_4 - 4\omega_{11}\omega_{13} - \frac{5}{3} \omega_{11}^3.$$

Наши рассуждения аналогичны доказательству из [1] (см. также [2], стр. 574, 575). Из (5), полагая $c_4 > 0$ (что не умаляет общности), последовательно получаем

$$3 \left| c_4 - (8\omega_{11} - l)\omega_{13} - \frac{10}{3} \omega_{11}^3 \right|^2 + |\omega_{11}l + 2\omega_{13}|^2 \leq |l|^2 + \frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned}
|c_4| &\leq \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{3}|l|^2 - \frac{1}{3}} |\omega_{11}l + 2\omega_{13}|^2 + \\
&+ \operatorname{Re} \left\{ (8\omega_{11} - l)\omega_{13} + \frac{10}{3}\omega_{11}^3 \right\} \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{4}|l|^2 - \\
&- \frac{1}{4} |\omega_{11}l + 2\omega_{13}|^2 + \operatorname{Re} \left\{ (8\omega_{11} - l)\omega_{13} + \frac{10}{3}\omega_{11}^3 \right\} = \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{4}(1 - |\omega_{11}|^2)|l|^2 - |\omega_{13}|^2 + \operatorname{Re} \left\{ (8\omega_{11} - \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - l - \bar{\omega}_{11}\bar{l})\omega_{13} + \frac{10}{3}\omega_{11}^3 \right\}.
\end{aligned}$$

Полагая здесь $\omega_{11} = xe^{i\varphi}$, $x > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$,

$$l = \frac{8x}{1+x} e^{-\frac{1}{2}i\varphi} \cos \frac{3}{2}\varphi, \quad y = \left| \sin \frac{3}{2}\varphi \right|,$$

имеем

$$\begin{aligned}
|c_4| &\leq \frac{2}{3} + 16x^2 \frac{1-x}{1+x} + \frac{10}{3}x^3 - |\omega_{13}|^2 + \\
&+ 8x|\omega_{13}|y - \left(\frac{20}{3}x^3 + 16x^2 \frac{1-x}{1+x} \right) y^2.
\end{aligned}$$

Разыскивая максимум правой части по y и используя неравенство $|\omega_{13}| \leq \sqrt{(1-x^2)/3}$ [которое следует из (4)], приходим к оценке

$$\begin{aligned}
|c_4| &\leq \frac{2}{3} + 16x^2 \frac{1-x}{1+x} + \frac{10}{3}x^3 + \\
&+ \frac{1}{3}x \frac{19+14x-5x^2}{12-7x+5x^2} (1-x), \quad x = \frac{1}{2}|c_2|. \quad (6)
\end{aligned}$$

Используя легко проверяемые неравенства

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{1+x} &\leq \frac{1+x}{2} \quad \text{и} \quad \frac{19+14x-5x^2}{12-7x+5x^2} \leq 3,24 - \\
&- 0,44x \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1,
\end{aligned}$$

получаем

$$|c_4| \leq \frac{1}{3}(2 + 15,24x - 3,68x^2 - 1,56x^3), \quad x = \frac{1}{2}|c_2|. \quad (7)$$

Прибавляя к правой части последовательно $\frac{1,56}{3}x(1-x)^2$ и $\frac{6,8}{3}(1-x)^2$, получаем более простые оценки

$$|c_4| \leq \frac{1}{3}(2 + 16,8x - 6,8x^2), \quad x = \frac{1}{2}|c_2|, \quad (8)$$

$$|c_4| \leq \frac{4}{15}(11 + 4x), \quad x = \frac{1}{2}|c_2|. \quad (9)$$

Оценки (6) — (8) точны при $|c_2| = 0$ и $|c_2| = 2$ и знак равенства в них реализуется соответственно для коэффициентов функций

$$f(z) = \frac{z}{(1 - \eta z^3)^{2/3}}, \quad f(z) = \frac{z}{(1 - \eta z)^2}, \quad |\eta| = 1.$$

Легко видеть, что оценка (9) (самая грубая) лучше оценки (1) Альфорса при $0 \leq |c_2| < 2$.

Ленинградский государственный
университет

Поступило
18.X.1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ch ar g z u n s k i Z., S c h i f f e r M., A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, Arc. Ration. Mech. Anal., 5, № 3 (1960), 187—193.
- [2] Г о л у з и н Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.
- [3] G r u n s k y H., Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Functionen, Math. Z., 45, 1 (1939), 29—61.
- [4] А л ь ф о р с Л. Ф., Неравенство между коэффициентами a_2 и a_4 однолистных функций. Сб., Некоторые проблемы матем. и механ., М., (1970), 71—74.
- [5] Г о л у з и н Г. М., О p -листных функциях, Матем. сб., 8 (50), № 2 (1940), 217—284.
- [6] Л е б е д е в Н. А., Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 60, № 4 (1961), 211—231.
- [7] М и л и н И. М., Метод площадей в теории однолистных функций, Докл. АН СССР 154, № 2 (1964), 264—267.