А. К. Цих, А. П. Южаков, Свойства полной суммы вычетов относительно полиномиального отображения и их приложения, *Сиб. матем. журн.*, 1984, том 25, номер 4, 207–213

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXV, № 4 ИЮЛЬ — АВГУСТ 1984

УДК 517.55+513.6

А. К. ЦИХ, А. П. ЮЖАКОВ

СВОЙСТВА ПОЛНОЙ СУММЫ ВЫЧЕТОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В работе известные свойства локального вычета [1, 2] — формула преобразования и локальная двойственность — переносятся на полную сумму вычетов относительно полиномиального отображения в $\mathbf{C}^n$ (теоремы 1, 3). На основании этих свойств дается критерий (теорема 4) принадлежности полинома от n переменных идеалу, порожденному системой n полиномов, который сводится к вычислению полной суммы вычетов относительно этой системы. Указывается алгоритм вычисления полной суммы вычетов, не требующий вычисления каждого вычета в отдельности. В частности, решается задача вычисления суммы значений многочлена в решениях системы алгебраических уравнений, которая для некоторых частных классов систем решалась в работах [3—6]. Кроме того, как следствие теоремы о полной сумме вычетов [2, гл. 5] получено ее обобщение (теорема 5) на случай, когда число дивизоров больше размерности многообразия. Дается обращение этой теоремы для пространства $\mathbf{CP}^n$ (теорема 6). Полученное обобщение позволяет выразить полную сумму вычетов относительно полиномиального отображения в $\mathbf{C}^n$ через вычеты в бесконечно удаленных точках пространства $\mathbf{CP}^n$, кратность которых может быть понижена на 1. Теоремы 1, 2, 5, 7 принадлежат А. П. Южакову, теоремы 3, 4, 6 — А. К. Циху.

1°. Пусть $h, f_1, \ldots, f_n$ — голоморфные функции в окрестности U_a точки $a \in \mathbf{C}^n$ и отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)$ имеет в точке a изолированный нуль: $f^{-1}(0) \cap U_a = \{a\}$. Локальным вычетом, или вычетом Гротендика [1, 2] формы $\omega = h dz/f_1 \ldots f_n$, $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, в точке a называется

$$\operatorname*{res}_a \omega = (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma_a} \omega, \tag{1}$$

где $\Gamma_a = \{z \in U_a : |f_j(z)| = \varepsilon,\ j = 1, \ldots, n\}$. Ориентация Γ_a определяется условием $d(\arg f_1) \wedge \ldots \wedge d(\arg f_n) \geqslant 0$. Мы будем также называть (1) вычетом функции h (формы hdz) относительно отображения f в точке a и обозначать $\operatorname*{res}_{f,a}(h)$ $(\operatorname*{res}_{f,a}(hdz))$.

В дальнейшем будем предполагать, что $h, f_1, \ldots, f_n$ — полиномы из кольца $\mathbf{C}[z] = \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$, причем множество $E_f = f^{-1}(0) = \{z \in \mathbf{C}^n : f_1(z) = \ldots = f_n(z) = 0\}$ дискретно. Рассмотрим полную сумму вычетов полинома h относительно полиномиального отображения $f = (f_1, \ldots, f_n)$:

$$\operatorname{Res}_f(h) = \operatorname{Res}_f(hdz) = \sum_{a \in E_f} \operatorname*{res}_{f,a}(h). \tag{2}$$

Теорема 1 (формула преобразования полной суммы вычетов). *Если* $g = (g_1, \ldots, g_n)$, $g_j = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{jk} f_k$, $j = 1, \ldots, n$, $\varphi_{jk} \in \mathbf{C}[z]$ *и множество* $E_g = g^{-1}(0)$ *дискретно, то*

$$\operatorname{Res}_f(h) = \operatorname{Res}_g(h \cdot \det \|\varphi_{jk}\|). \tag{3}$$

Формула (3) вытекает из определения (2), формулы преобразования локального вычета (см. [2, гл. 5]), примененной к $\operatorname{res}_{f,a}(h)$ в точках $a \in E_f \subset E_g$, и из того, что в точках $b \in E_g \setminus E_f$ локальный вычет $\operatorname{res}_{g,b}(h \cdot \det \|\varphi_{jk}\|) = 0$. Последнее имеет место (см. [2, с. 692]), так как

$$\det \|\varphi_{jk}\| = \sum_{k=1}^{n} g_k A_{k\nu}/f_\nu \in I_b(g_1, \ldots, g_n), \tag{4}$$

где f_ν — компонента f, для которой $f_\nu(b) \neq 0$, $A_{k\nu}$ — алгебраическое дополнение $\varphi_{k\nu}$ в $\|\varphi_{jk}\|$.

Укажем алгоритм вычисления полной суммы вычетов (2), опирающийся на теорему 1 и формулу (4) работы [4]. Заметим, прежде всего, что при переходе к другой системе координат $\zeta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k$ (2) преобразуется по формуле $\operatorname{Res}_f(h dz) = \Delta^{-1} \operatorname{Res}_f(h d\zeta)$, где $\Delta = \det \|c_{jk}\|$. Выберем систему координат в $\mathbf{C}^n$ так, чтобы в полиноме f_1 коэффициент при старшей степени переменной z_n был равен 1. Рассмотрим результант Сильвестра полиномов f_1 и $f_2 u_2 + \ldots + f_n u_n$ относительно переменной z_n:

$$R\left(f_1, \sum_{j=2}^{n} f_j u_j\right) = R_1('z, u), \tag{5}$$

где $'z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$, $u = (u_2, \ldots, u_n)$. При этом по известному правилу (см. [7, § 34]) находятся полиномы $A(z, u)$, $B(z, u)$ такие, что

$$R_1('z, u) = A(z, u) f_1(z) + B(z, u) \sum_{j=2}^{n} f_j(z) u_j. \tag{6}$$

Выделяя в (5) и (6) коэффициенты при мономах по u, получим систему результантов

$$R_{1q}('z), \quad q = 1, \ldots, s_1, \tag{7}$$

и систему соотношений

$$R_{1q}('z) = \sum_{\nu=1}^{n} A_{1q\nu}(z) \cdot f_\nu(z), \quad q = 1, \ldots, s_1.$$

При этом система (7) в $\mathbf{C}^{n-1}$ имеет дискретное множество нулей, являющееся проекцией E_f. Следовательно, система $f_1(z)$, $R_{1q}('z)$, $q = 1, \ldots, s_1$, имеет в $\mathbf{C}^n$ также дискретное множество нулей. Применяя предыдущее рассуждение к системе (7), получим последовательно системы результантов

$$\{R_{jq}({}^{(j)}z) = R_{jq}(z_1, \ldots, z_{n-j})\}_{q=1}^{s_j}, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

каждая из которых имеет дискретное множество нулей, и системы соотношений

$$R_{jq}({}^{(j)}z) = \sum_{\nu=1}^{n} A_{jq\nu}(z) f_\nu(z), \quad q = 1, \ldots, s_j. \tag{8}$$

Положим $g = (g_1, \ldots, g_n)$, $g_j(z) = R_{n-j,1}(z_1, \ldots, z_j)$, $j = 1, \ldots, n-1$, $g_n(z) = f_1(z)$. Очевидно, отображение g имеет дискретное множество нулей и связано с f соотношениями

$$g_j(z) = \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-j,1,\nu}(z) f_\nu(z), \quad A_{n1\nu}(z) = \delta_{1\nu}.$$

По теореме 1

$$\operatorname{Res}_f(h) = \operatorname{Res}_g(h \cdot \det \|A_{n-j,1,\nu}\|). \tag{9}$$

Так как g_j имеет вид $g_j(z) = z_j^{k_j} + Q_j(z_1, \ldots, z_j)$, где $\deg Q_j \leqslant k_j$, $\deg_{z_j} Q_j < k_j$ (поскольку на каждом этапе систему координат $z_1, \ldots, z_{n-j}$

в $\mathbf{C}^{n-j}$ выбираем так, чтобы в $R_{j1}({}^{(j)}z)$ коэффициент при старшей степени переменной z_{n-j} был равен 1), то для вычисления Res_g можно применить формулу (4) из [4] (см. также [6, (21.16)]). Получаем

$$\mathrm{Res}_g(\psi) = \sum_{\alpha\in M} \mathfrak{M}_0 \left[\frac{(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\psi(z)}{z_1^{k_1-1}\ldots z_n^{k_n-1}} \left(\frac{Q_1}{z_1^{k_1}}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{Q_n}{z_n^{k_n}}\right)^{\alpha_n}\right], \tag{10}$$

где $M = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : 0 \leqslant \alpha_j \leqslant m - (k_j - 1) - \ldots - (k_n - 1),\ j = 1, \ldots$ $\ldots, n\}$, $\psi = h \cdot \det \|A_{n-j,1,\nu}\|$, $\mathfrak{M}_0(\cdot)$ — свободный член полинома Лорана $(\cdot)$, $m = \deg \psi$.

При нахождении результантов и соотношений (8) используются только рациональные операции, а по формуле (10) $\mathrm{Res}_g(\psi)$ выражается рационально через коэффициенты полиномов ψ, g_j. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Полная сумма вычетов* (2) *полинома h относительно полиномиального отображения $f = (f_1, \ldots, f_n)$, имеющего дискретное множество нулей в $\mathbf{C}^n$, вычисляется по формулам* (9), (10) *и выражается рационально через коэффициенты полиномов h, f_j.*

Замечание 1. При $h = \varphi \cdot \partial f/\partial z$ вычет Гротендика (1) совпадает с логарифмическим вычетом и равен $\varphi(a) \cdot \mu_a(f)$, где $\mu_a(f)$ — кратность нуля a отображения f. Таким образом, сумма значений многочлена φ в нулях отображения f равна $\mathrm{Res}_f(\varphi \cdot \partial f/\partial z)$ и, следовательно, может быть вычислена по формулам (9), (10).

2°. Обозначим $I(f)$ — идеал в кольце $\mathbf{C}[z] = \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$, порожденный системой полиномов $f = (f_1, \ldots, f_n)$, имеющей дискретное множество нулей E_f; $I_a(f)$ — аналогичный идеал в кольце O_a ростков функций, голоморфных в точке a. Следующее утверждение распространяет свойство двойственности для локального вычета res [2, гл. 5] на полную сумму вычетов Res.

Теорема 3. *Полином F принадлежит идеалу $I(f)$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Res}_f(F\varphi) = 0$ *для любого* $\varphi \in \mathbf{C}[z]$.

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. Достаточность получается из теоремы Ласкера — Нётера [7, § 132] и локальной двойственности [2, гл. 5], сводящим вопрос о принадлежности $F \in I(f)$ к проверке в каждой точке $a \in E_f$ условия

$$\operatorname*{res}_{a} {}_f(F\varphi) = 0,\quad \varphi \in O_a. \tag{11}$$

Справедливость условий (11) доказывается следующим образом. Для каждой точки $a \in E_f$ построим полином $P_a(z)$ такой, что $P_a(a) \neq 0$, $P_a \in I_b(f)$ для всех $b \in E_f \setminus \{a\}$. Выберем отрезки Q и R рядов Тейлора в точке a функций P_a^{-1} и φ соответственно так, чтобы $P_a^{-1} - Q \in I_a(f)$, $\varphi - R \in I_a(f)$ (это условие выполняется для Q и R достаточно высоких степеней согласно локальному варианту теоремы Гильберта о корнях). В результате имеем

$$\operatorname*{res}_{a}{}_f(F\varphi) = \operatorname*{res}_{a}{}_f\left(F\varphi P_a P_a^{-1}\right) = \operatorname*{res}_{a}{}_f(FRP_aQ).$$

Так как $P_a \in I_b(f)$, то $\operatorname*{res}_{b}{}_f(FRP_aQ) = 0$ для $b \in E_f \setminus \{a\}$. Следовательно, $\mathrm{Res}_f(FRP_aQ) = \operatorname*{res}_{a}{}_f(F\varphi)$, откуда, согласно условию теоремы, получаем (11).

В действительности, для проверки принадлежности полинома F идеалу $I(f)$ достаточно вычислять $\mathrm{Res}_f(F\varphi)$ лишь для конечного набора полиномов $\varphi \in \mathbf{C}[z]$. Как выбирать эти полиномы, указывает следующее утверждение. Пусть

$$f_j(\zeta) - f_j(z) = \sum_{k=1}^{n} P_{jk}(\zeta, z)(\zeta_k - z_k),\quad j = 1, \ldots, n,$$

— разложения Хефера полиномов f_j и $\Omega(\zeta, z) = \det \|P_{jk}\|$. Определитель Ω можно представить в виде

$$\Omega(\zeta, z) = \sum_{k=1}^{L} g_k(\zeta)\, h_k(z). \tag{12}$$

Теорема 4. *Если система полиномов $f = (f_1, \ldots, f_n)$ имеет дискретное множество нулей E_f, то полином F принадлежит идеалу $I(f)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Res}_f(Fh_k) = 0$, $k = 1, \ldots, L$, где h_k — полиномы из разложения (12).*

Если отображение $w = f(z)$ собственное, то семейство полиномов $\{h_k(z)\}_{k=\overline{1,L}}$ порождает расширение $\mathbf{C}[z]$ кольца $\mathbf{C}[w]$ (т. е. $\mathbf{C}[z]$, рассматриваемое как $\mathbf{C}[w]$-модуль), индуцированное этим отображением.

Доказательство. Пусть $\{U_a\}_{a\in E_f}$ — семейство непересекающихся окрестностей точек $a \in E_f$ и r настолько малое, что полиэдры $\Pi_a = \{z \in U_a : |f_j(z)| < r,\ j = 1, \ldots, n\} \subset\subset U_a$. Положим $W_r = \bigcup_{a\in E_f} \Pi_a$, Δ_r — остов полиэдра W_r, тогда, согласно интегральному представлению Бергмана — Вейля, для каждого $\varphi \in \mathbf{C}[z]$ имеем

$$\varphi(z) = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\Delta_r} \frac{\varphi(\zeta)\, \Omega(\zeta, z)\, d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{n} [f_j(\zeta) - f_j(z)]}, \quad z \in W_r.$$

Отсюда с учетом (12) получаем

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{L} c_k(f(\zeta))\, h_k(z), \quad z \in W_r, \tag{13}$$

где $c_k(w)$ — голоморфные в полицилиндре $\Delta_r^* = \{w : |w_j| < r, j = 1, \ldots, n\}$ функции, определяемые интегралами

$$c_k(w) = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\Delta_r} \frac{\varphi(\zeta)\, g_k(\zeta)\, d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{n} [f_j(\zeta) - w_j]}, \quad w \in \Delta_r^*. \tag{14}$$

Пусть $c_k(w) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} c_{k\alpha} w^\alpha$. Поскольку $f^\alpha(z) \in I(f)$ для всех $\alpha > 0$, то из определения Res_f как суммы локальных вычетов, формулы (13) и условия теоремы имеем

$$\operatorname{Res}_f(F\varphi) = \sum_{k=1}^{L} c_{k0} \operatorname{Res}_f(Fh_k).$$

Согласно теореме 3, получаем, что $F \in I(f)$, т. е. первое утверждение теоремы.

Если отображение $w = f(z)$ собственное, то для любого $w \in \mathbf{C}^n$ система $f - w = (f_1 - w_1, \ldots, f_n - w_n)$ имеет одно и то же число нулей с учетом их кратностей. При этом если $w \in \Delta_r^*$, то все нули этой системы лежат (см. [6, с. 55]) в полиэдре $W_r = \{z \in \mathbf{C}^n : |f_j(z)| < r,\ j = 1, \ldots, n\}$, где $r > 0$ — любое действительное число. Следовательно, интеграл (14) выражает полную сумму вычетов полинома φg_k относительно отображения $f - w$. Отсюда по теореме 2 заключаем, что $c_k(w)$ — рациональные функции. Кроме того, эти функции целые, так как в (14) цикл $\Delta_r = \{z \in \mathbf{C}^n : |f_j(z)| = r,\ j = 1, \ldots, n\}$ гомологичен в области регулярности подынтегральной функции любому циклу Δ_R, $R > r$ (это влечет голоморфную продолжаемость $c_k(w)$ из Δ_r^* в Δ_R^*). Таким образом, $c_k(w)$ — полиномы, и с учетом (13) получаем, что $\mathbf{C}[z]$ является $\mathbf{C}[w]$-модулем с системой образующих $\{h_k(z)\}_{k=\overline{1,L}}$.

Замечание 2. Из [6, § 27], вытекает, что полиномы $\{h_k(z)\}_{k=\overline{1,L}}$ образуют базис $\mathbf{C}[w]$-модуля $\mathbf{C}[z]$ тогда и только тогда, когда $\det \|\operatorname{Res}_f(g_j h_k)\| \not\equiv 0$.

3°. Пусть X — компактное аналитическое многообразие комплексной размерности n; $T_1, \ldots, T_N$ $(N \geqslant n)$ — эффективные дивизоры в X такие, что $E_\alpha = T_{\alpha_1} \cap \ldots \cap T_{\alpha_n}$ дискретно для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset \{1, \ldots, N\}$ и $E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing$ для $\alpha \neq \beta$; ω — мероморфная форма с полярным дивизором $T_1 + \ldots + T_N$. Каждой точке $a \in E_\alpha$, $\alpha \subset \{1, \ldots, N\}$, соответствует локальный вычет

$$\operatorname{res}_a \omega = \operatorname{res}_\alpha \omega = \operatorname{res}_f (hdz),$$

где $hdz/f_1 \ldots f_n$ — локальное представление формы ω (f_j — определяющая функция дивизора T_{α_j} в окрестности точки a). Каждому набору дивизоров $T_\alpha = (T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_n})$ соответствует сумма вычетов

$$\operatorname{Res}_\alpha \omega = \operatorname{Res}_{T_\alpha} \omega = \sum_{a \in E_\alpha} \operatorname{res}_a \omega.$$

Заметим, что $\operatorname{Res}_\alpha \omega$ и $\operatorname{res}_{\alpha, a} \omega$ кососимметричны по $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Теорема 5. *Для каждого набора* $'\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \subset \{1, \ldots, N-1\}$

$$\operatorname{Res}_{('\alpha, N)} \omega = - \sum_{j \in \{1, \ldots, ['\alpha], \ldots, N-1\}} \operatorname{Res}_{('\alpha, j)} \omega; \tag{15}$$

В частности, при $N = n + 1$

$$\operatorname{Res}_{(1, \ldots, [j], \ldots, n+1)} \omega = (-1)^{n-j-1} \operatorname{Res}_{(1, \ldots, n)} \omega. \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим набор n дивизоров $\tilde{T}$:

$$\tilde{T}_1 = T_{\alpha_1}, \ldots, \tilde{T}_{n-1} = T_{\alpha_{n-1}}, \quad \tilde{T}_n = T_1 + \ldots [\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}] \ldots + T_N.$$

Их пересечение $\tilde{E}$ дискретно. Следовательно, по теореме о полной сумме вычетов [2, с. 697]

$$\operatorname{Res}_{\tilde{T}} \omega = \sum_{a \in \tilde{E}} \operatorname{res}_a \omega = 0. \tag{17}$$

Так как $\tilde{E} = \bigcup_{j \in \{1, \ldots ['\alpha] \ldots, N\}} E_{('\alpha, j)}$, то (17) равносильно (15).

Замечание 3. Из дивизоров $T_1, \ldots, T_N$ можно другими способами образовывать n дивизоров $\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_n$ и применять к ним теорему о полной сумме вычетов. Получим другие соотношения для $\{\operatorname{Res}_\alpha \omega\}_{\alpha \subset \{1, \ldots, N\}}$. Однако можно показать, что все эти соотношения являются следствиями соотношений (15).

Следующая теорема доказывает, что для $X = \mathbf{CP}^n$ все зависимости между $\{\operatorname{Res}_\alpha \omega\}_{\alpha \subset \{1, \ldots, N\}}$ исчерпываются соотношениями (15).

Теорема 6 (обращение теоремы о полной сумме вычетов). *Пусть* $T_1, \ldots, T_N$ — *эффективные дивизоры в* $\mathbf{CP}^n$, *удовлетворяющие условию теоремы* 5. *Тогда*

а) *если* $N = n$, *то для любого набора чисел* $\{r_a\}_{a \in E}$ (*здесь* $E = T_1 \cap \ldots \cap T_n$), *удовлетворяющих условию* $\sum_{a \in E} a = 0$, *найдется форма* ω *с полярным дивизором* $T = T_1 + \ldots + T_n$ *такая, что* $\operatorname{res}_a \omega = r_a$;

б) *если* $N > n$, *то для любого набора чисел* $\{R_\alpha = R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\}_{\alpha \subset \{1, \ldots, N\}}$, *удовлетворяющих соотношениям вида* (15) (*с заменой* $\operatorname{Res}_\alpha \omega$ *на* R_α), *найдется форма с полярным дивизором* $T = T_1 + \ldots + T_N$ *такая, что* $\operatorname{Res}_\alpha \omega = R_\alpha$.

Доказательство. Выберем аффинную часть $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{CP}^n$ так, чтобы для каждого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset \{1, \ldots, N\}$ пересечение $E_\alpha = T_{\alpha_1} \cap \ldots \cap T_{\alpha_n}$ не имело точек на бесконечно удаленной гиперплоскости $\mathbf{CP}^n \backslash \mathbf{C}^n$. Тогда всякая форма ω с полярным дивизором T в локальных координатах $z \in \mathbf{C}^n$ запишется в виде $\omega = h(z) dz / f_1(z) \ldots f_N(z)$, где f_j — полиномы, определяющие дивизоры T_j, причем $\deg h + n <$

$<\deg f_1+\ldots+\deg f_N$. Очевидно, для доказательства а) достаточно для любой пары точек a_i, $a_j\in E$ найти полином h такой, что

$$\operatorname*{res}_{a_i}\omega=-\operatorname*{res}_{a_j}\omega=1, \tag{18}$$

$$\operatorname*{res}_{a}\omega=0,\ a\in E\setminus\{a_i, a_j\}, \tag{19}$$

$$\deg h+n<\deg f_1+\ldots+\deg f_n. \tag{20}$$

Покажем, что в качестве такого h можно взять $h(z)=\Omega(z, a_i)-\Omega(z, a_j)$, где $\Omega(z, \zeta)$ — определитель, составленный из коэффициентов $P_{qs}(z, \zeta)$ разложений Хефера полиномов f_q, $q=1, \ldots, n$ (см. п. 2°). Действительно, коэффициенты P_{q_s} можно выбрать такими, чтобы их степени по совокупности переменных не превосходили $\deg f_q-1$. Тогда, как нетрудно убедиться, h удовлетворяет условию (20). Формула (18) вытекает из интегрального представления Бергмана — Вейля, а (19) — из того, что $\Omega(z, a)\in I_b(f)$, где a и b — различные точки из $E=E_f$ (это вытекает из равенства (4), примененному к определителю $\Omega(z, a)$ преобразования

$$f_q(z)=\sum_{s=1}^{n}P_{qs}(z, a)(z_s-a_s),\quad q=1, \ldots, n).$$

Пусть теперь $N>n$. Утверждение б) будет доказано, если мы установим, что $\{\mathrm{Res}_\alpha\,\omega\}_{\alpha\subset\{1, \ldots, N-1\}}$ независимы. Для этого достаточно показать существование для каждого $\alpha\subset\{1, \ldots, N-1\}$ формы ω с полюсом на T такой, что $\mathrm{Res}_\alpha\,\omega=1$ и $\mathrm{Res}_\beta\,\omega=0$ для всякого $\beta\subset\{1, \ldots, N-1\}$, $\beta\neq\alpha$. Применим утверждение а) к семейству дивизоров $\tilde{T}: T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_{n-1}}, T_{\alpha_n}+T_N$. При этом множества $E_\alpha=T_{\alpha_1}\cap\ldots\cap T_{\alpha_n}$ и $E'_{\alpha,N}=T_{\alpha_1}\cap\ldots\cap T_{\alpha_{n-1}}\cap T_N$ непусты (здесь снова используется то, что T_j — дивизоры в $\mathbf{CP}^n$), и для точек $a_i\in E_\alpha$, $a_j\in E'_{\alpha,N}$ можно построить форму ω с полюсом на $\tilde{T}$, удовлетворяющую (18) и (19), где в качестве E берется пересечение всех дивизоров семейства $\tilde{T}$. Следовательно, $\mathrm{Res}_\alpha\,\omega=\operatorname*{res}_{a_i}\omega=1$, в то время как $\mathrm{Res}_\beta\,\omega=0$, $\beta\subset\{1, \ldots, N-1\}$, $\beta\neq\alpha$, так как форма ω не имеет полюса на T_{β_j}, где $\beta_j\notin\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Теорема доказана.

Замечание 4. Существование формы ω, удовлетворяющей условию а) теоремы 6, для положительных в смысле Кодаиры дивизоров T_j доказано в [8]. Приведенное здесь доказательство а) является кратким и конструктивным.

Формулу (16) можно использовать для преобразования полной суммы вычетов (2) относительно полиномиального отображения к более простому виду. Предположим, что система полиномов $f=(f_1, \ldots, f_n)$ не имеет нулей на бесконечности в пространстве $\mathbf{CP}^n$. Форма $\omega=hdz/f_1\ldots f_n$, продолженная в проективное пространство $\mathbf{CP}^n$ введением однородных координат $\zeta=(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)$, $z_j=\zeta_j/\zeta_0$, имеет в $\mathbf{CP}^n$ полюсы на дивизорах $T_0, T_1, \ldots, T_n$, определяемых полиномами ζ_0^q, $\tilde{f}_j(\zeta)=\zeta_0^{k_j}f_j(\zeta_1/\zeta_0, \ldots, \zeta_n/\zeta_0)$, $j=1, \ldots, n$, где $k_j=\deg f_j$, $q=\deg h-k_1-\ldots-k_n+n+1$. При сделанных предположениях дивизоры $T_0, T_1, \ldots, T_n$ удовлетворяют условиям теоремы 5. По формуле (16)

$$\mathrm{Res}_f(h)=\mathrm{Res}_{(1, \ldots, n)}\,\omega=(-1)^{j-1}\,\mathrm{Res}_{(0, \ldots [j] \ldots, n)}\,\omega.$$

Таким образом, получается

Теорема 7. *Если полиномиальное отображение $f=(f_1, \ldots, f_n)$ не имеет нулей на бесконечности в пространстве $\mathbf{CP}^n$, то полная сумма вычетов формы $\omega=hdz/f_1\ldots f_n$ относительно полиномов $f_1, \ldots, f_n$ равна (с точностью до знака) полной сумме вычетов формы ω относительно любых $n-1$ из этих полиномов и монома ζ_0^q.*

Согласно теореме 7, сумма вычетов в конечных точках выражается через вычеты в бесконечно удаленных точках. Так как по ζ_0 можно проинтегрировать, то кратность этих вычетов понизится на 1.

В работах [3, 4] вычисление суммы вычетов в конечных точках фактически сводится к вычислению вычета в единственной бесконечно удаленной точке, который находится разложением в ряд Лорана. В [5] разобран случай, когда вычетов на бесконечности несколько, однако все они вычисляются разложением в ряд Лорана.

Статья поступила
4 апреля 1982 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tong Y. L.* Integral representation formulae and Grotendieck residue symbol.— Amer. J. Math., 1973, v. 95, 904—917.
2. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
3. *Айзенберг Л. А.* Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных алгебраических уравнений.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 3, 505—508.
4. *Айзенберг Л. А., Цих А. К.* О применении многомерного логарифмического вычета к системам нелинейных алгебраических уравнений.— Сиб. мат. журн., 1979, т. 20, № 4, с. 699—707.
5. *Южаков А. П.* О вычислении суммы значений многочлена в решениях системы алгебраических уравнений.— В кн.: Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск: ИФ СО АН СССР, 1980, с. 197—214.
6. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
7. *Ван-дер-Варден Б. Л.* Алгебра. М., Наука, 1976.
8. *Griffiths P.* Variations on the theorem of Abel.— Invent. math., 1976, v. 35, p. 321—390.