



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. A. Kovalevsky, Asymptotics of some functions generalizing the Euler gamma-function, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 123–129

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.82

January 13, 2025, 14:31:49



АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ОБОБЩЕНИЕМ
ГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА.

Введение.

Рассмотрим поведение следующих двух функций:

$$G_j(z) = C_j \int_{z_j}^{j+1} f_j(t) \exp\{S_j(t, z)\} dt, \quad (\text{в. I})$$

$$(S_j(t, z) = (-1)^{j+1} (t + \Psi(t) - z \ln(t)), \quad j=1, 2),$$

при $|z| \rightarrow \infty$. Здесь $C_1 = 1/(2\pi i)$; L_1 - контур, состоящий из 3-х частей: 1) прямой $\arg(t) = \pi$, идущей из ∞ до $t = -R$; 2) окружности $|t| = R$, $-\pi < \arg(t) < \pi$, проходимой против часовой стрелки; 3) прямой $\arg(t) = \pi$, идущей от $t = -R$ в ∞ а $C_2 = 1$ и L - положительная часть вещественной оси.

Пусть область D_1 комплексной плоскости t - это: $R - \varepsilon < |t| < \infty$, где $0 < \varepsilon < R$ - некоторое число, а D_2 - это: $0 < |t| < \infty$. Полагается, что функции $f_j(t)$ и $\Psi_j(t)$ являются в D_j аналитическими. Далее, в областях D_j с разрезом по отрицательной части вещественной оси в качестве аналитических элементов $f_j(t)$ и $\Psi_j(t)$ фиксированы некоторые регулярные ветви этих функций, а в качестве аналитического элемента $\ln(t)$ берется главная ветвь.

Обозначим через $D_1^{(1)}(\varepsilon_1)$ область: $\varepsilon_1 - \varepsilon + R < |t| < \infty$, $|\arg(t)| < 3\pi/2$, а через $D_2^{(1)}(\varepsilon_1)$ - область: $\varepsilon_1 < |t| < \infty$, $\gamma^{(-)} < \arg(t) < \gamma^{(+)}$. Здесь $\varepsilon_1 > 0$ - любое, а $\gamma^{(\pm)}$ - любые числа, удовлетворяющие неравенствам: $-\pi < \gamma^{(-)} < 0$, $0 < \gamma^{(+)} < \pi$. Теперь полагается, что в $D_j^{(1)}(\varepsilon_1)$ справедливы следующие неравенства:

$$|f_j(t)| < C(\varepsilon_1) |t|^\delta; \quad |\Psi_j(t)|^{1-\rho} < C(\varepsilon_1) |t|^{1-\rho}, \quad (C(\varepsilon_1) > 0, 0 < \rho < 1), \quad (\text{в. 2})$$

где δ - некоторое число. Кроме того, при $j=2$ дополнительно полагается, что в области: $0 < |t| < \varepsilon_1$ выполняется неравенство:

$$|f_2(t) \exp(-t - \Psi_2(t))| < C^*(\varepsilon_1) \exp(\alpha \ln |t| + \beta \arg(t)) \quad (\text{в. 3})$$

Здесь α, β и $C^*(\varepsilon_1) > 0$ - некоторые числа, и $-\infty < \arg(t) < \infty$

Можно заметить, что при $f_j(t) \equiv 1$ и $\Psi_j(t) \equiv 0$ справедливы равенства:

$$G_1(z) = 1/\Gamma(z), \quad G_2(z) = \Gamma(z+1).$$

где $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера. Функция $G_2(z)$ исследовалась ранее во многих работах для частных значений $\Psi_2(t)$, например, в (1,2). Необходимость исследования функции $G_2(z)$ в более общем случае, а также $G_1(z)$, вызвана задачей о построении фундаментальных семейств решений некоторых разностных уравнений. Эти уравнения появляются при решении проблемы связи для линейных дифференциальных уравнений с двумя особыми точками, подобно (3,4). Полученная в предлагаемой работе асимптотика $G_j(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ является равномерной для $-\pi + \varepsilon < \arg(z) < \pi - \varepsilon$ в случае $j=1$, и для $\gamma^{(+)} + \varepsilon < \arg(z) < \gamma^{(+)} - \varepsilon$ в случае $j=2$ ($\varepsilon > 0$ - любое малое).

§ 1. Нахождение точки перевала и удобного для оценок контура интегрирования.

Для определения точек перевала имеем уравнение

$$[S_j(t, z)]'_t = (-1)^{j+1} [1 + \Psi_j'(t) - z/t] = 0. \quad (I.1)$$

Пусть теперь область $D_1^{(m)}(K, \varepsilon)$ - это: $K < |z| < \infty, -\pi + \varepsilon < \arg(z) < \pi - \varepsilon$, а $D_2^{(m)}(K, \varepsilon)$ - это: $K < |z| < \infty, \gamma^{(+)} + \varepsilon < \arg(z) < \gamma^{(+)} - \varepsilon$; и K, ε - некоторые положительные числа. Справедлива следующая лемма, которая дает решение уравнения (I.1).

ЛЕММА I. Для любого малого $\varepsilon > 0$ существует такое $K > 0$, что при $|t/z - 1| < \varepsilon$ и $z \in D_j^{(m)}(K, \varepsilon)$ существует и единственно решение уравнения (I.1):

$$t = T_n^{(j)}(z) = z \left\{ 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{d^{s-1}}{d\tau^{s-1}} [-\Psi_j'((\tau+1)z)] * \right. \quad (I.2)$$

$$\left. * (\tau+1) \right\}_{\tau=0}^s.$$

Функция $T_n^{(j)}(z)$ регулярна в $D_j^{(m)}(K, \varepsilon)$ и при $|z| \rightarrow \infty$ в этой области справедливо равенство:

$$T_n^{(j)}(z) = z [1 + O(|z|^{-\rho})],$$

где $0 < \rho < 1$ взято из (в.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совершив в (I.1) замену: $t = (\tau+1)z$, получаем:

$$\tau = -\Psi_j'((\tau+1)z)(\tau+1). \quad (I.3)$$

Т.к. функция $\Psi_j(t)$ является аналитической в $D_j^{(k)}(\varepsilon_1)$, и в этой области для нее выполняется неравенство (в.2), то в $D_j^{(k)}(\varepsilon_1)$ выполняется следующее неравенство:

$$|\Psi_j^{(k)}(t)| < C_k(\varepsilon_1)|t|^{1-p-k} \quad (I.4)$$

Применяя к (I.3) теорему Лагранжа, п.7.32 (5), получаем выражение (I.2) и единственность решения уравнения (I.3) в соответствующей области. Регулярность $T_n^{(k)}(z)$ следует из регулярности $\Psi_j(t)$ и равномерной сходимости ряда (I.2). Из (I.4) при $k=1$ и (I.2) следует асимптотическое выражение для $T_n^{(k)}(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$

Для удобства изучения (в.1) приведем эти интеграла к виду, в котором точкой перевала является единица. Это достигается заменой $t = T_n^{(k)}(z)w$. В результате, с учетом (I.1), получаем:

$$G_j(z) = C_j T_n^{(k)} G_j^*(z) \int_{L_j^*(T_n^{(k)})} f_j(T_n^{(k)} w)^* * \exp\{T_n^{(k)}(-1)^{j+1} [w-1-\ln(w) + Q_j(T_n^{(k)}, w)]\} dw. \quad (I.5)$$

Здесь $L_j^*(T_n^{(k)})$ - это контур L_j , который повернут по часовой стрелке на угол $\arg(T_n^{(k)})$ и для $L_j^*(T_n^{(k)})$ возможно, в силу аналитичности подынтегральных функций, взять $R=1$. Далее,

$$T_n^{(k)} = T_n^{(k)}(z), \quad G_j^*(z) = \exp\{(-1)^{j+1} [T_n^{(k)} + \Psi_j(T_n^{(k)}) - z \ln(T_n^{(k)})]\} \quad (I.6)$$

$$Q_j(T_n^{(k)}, w) = [\Psi_j(T_n^{(k)}, w) - \Psi_j(T_n^{(k)})] / T_n^{(k)} - \Psi_j'(T_n^{(k)}) \ln(w).$$

Следует заметить, что в силу (в.2) функция $Q_j(T_n^{(k)}, w)$ будет в некотором смысле "малым возмущением", которое подобно рассмотренным в гл.4 п.8.3 (2) и (6). Т.о. можно надеяться, что контуром интегрирования в (I.5), удобным для проведения асимптотических оценок, будет тот, что и в случае $Q_j(T_n^{(k)}, w) \equiv 0$ (т.е. $\Psi_j(t) \equiv 0$). Пусть

$$\tau = \tau_j(w) = (-1)^{j+1} [w-1-\ln(w)], \quad (I.7)$$

тогда таким контуром будет тот, что проходит через точку перевала $\tau=0$ и на котором $\operatorname{Re}(-T_n^{(k)}\tau)$ монотонно убывает.

Т.к. контур интегрирования наиболее просто выбрать в плоскости τ , то в (I.5) нужно произвести замену: $w = W_j(\tau)$, где $W_j(\tau)$ - решение уравнения (I.7). Необходимые в дальнейшем свойства этого решения даются в следующих леммах.

ЛЕММА 2. Уравнение (I.7) определяет многозначную аналитическую функцию $W_j(\tau)$, имеющую особые точки: $\tau = \pm 2\pi i n$ ($n=0,1,2,\dots$). В правой полуплоскости существует две регулярных ветви этой функции $-W_j^{(k)}(\tau)$ ($k=1,2$), для которых $W_j^{(k)}(0)=1$. Кроме того, при $|\tau| < 2\pi$ справедливо равенство:

$$W_j^{(k)}(\tau) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)n} a_n (2 \exp\{-\pi(j+2)i/2\})^n \tau^{n/2}, \quad (I.8)$$

где $a_1=1, a_2=1/3, a_3=1/36, \dots$

Далее, $W_2^{(1)}(\tau)$ вещественна и монотонно возрастает от 1 до $+\infty$, а $W_2^{(2)}(\tau)$ вещественна и монотонно убывает от 1 до 0 при $\tau \geq 0$. Подобное же утверждение, только при $\tau \leq 0$, справедливо и для аналитических продолжений $W_1^{(k)}(\tau)$ в область $\operatorname{Re}(\tau) < 0$ по кривым, пересекающим мнимую ось в точках $0 < |\operatorname{Im}(\tau)| < 2\pi$ и не обходящим 0.

Эта лемма следует из результатов § 25 (7) и изучения поведения функции (I.7) $-T_j(w)$, при вещественных w . В дальнейшем еще одна лемма, дающая оценки для $W_j^{(k)}$ в правой полуплоскости.

ЛЕММА 3. В области $\operatorname{Re}(\tau) > \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ - любое), справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} |W_1^{(k)}(\tau)| &< K(\varepsilon)|\tau| \quad (k=1,2); & |W_2^{(1)}(\tau)| &< K(\varepsilon)|\tau|; \\ |(W_j^{(k)}(\tau))'| &< K(\varepsilon) \quad (j=1,2; k=1,2); \end{aligned} \quad (I.9)$$

где $K(\varepsilon) > 0$, а функции $W_j^{(k)}(\tau)$ описаны в лемме 2.

Кроме того, в этой области имеет место равенство:

$$W_2^{(2)}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} \exp(-n)}{n!} \exp(-\tau n). \quad (I.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (I.7) следуют неравенства:

$$\begin{aligned} |\tau| &\leq |W_j^{(k)}(\tau)| + |\ln |W_j^{(k)}(\tau)|| + 1 + |\arg(W_j^{(k)}(\tau))|, \\ |\tau| &\geq |W_j^{(k)}(\tau)| - |\ln |W_j^{(k)}(\tau)|| - 1 - |\arg(W_j^{(k)}(\tau))|, \\ |\tau| &\geq -|W_j^{(k)}(\tau)| + |\ln |W_j^{(k)}(\tau)|| - 1 - |\arg(W_j^{(k)}(\tau))|. \end{aligned} \quad (I.11)$$

Если: 1) изучить образы лучей: $w = r \exp(\varphi i), 0 < r \leq \infty$ для $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и окружностей: $|w| = R$ для $0 < R < \infty$ при отображении (I.7); 2) учесть свойства $W_j^{(k)}(\tau)$, данные в лемме 2; 3) применить теорему о соответствии границ; то можно убедиться, что $|\arg(W_j^{(k)}(\tau))|$

($K = 1, 2$) и $|\arg(w_2^{(k)}(\tau))|$ ограничены при $\operatorname{Re}(\tau) > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - любое. (Следует заметить, что образ прямой: $\tau = \tau \exp(i\varphi)$, $0 \leq \tau < \infty$ при $0 < |\varphi| < \pi/2$ будет при отображении $w = w_2^{(k)}(\tau)$ спиралью, навивающейся на начало координат, т.е. $|\arg(w_2^{(k)}(\tau))|$ в этом случае не будет ограничен).

Учитывая ограниченность соответствующих модулей аргументов $w_j^{(k)}(\tau)$ и неравенства (I.II) получаем, что при $|\tau| \rightarrow \infty$ может быть (для соответствующих j и K) только два случая - либо $|w_j^{(k)}(\tau)| \rightarrow \infty$, либо $|w_j^{(k)}(\tau)| \rightarrow 0$. Из этого факта, регулярности $w_j^{(k)}(\tau)$ при $\operatorname{Re}(\tau) > \varepsilon$ и неравенств (I.II) следуют первые два неравенства (I.9). Последнее неравенство следует из: 1) равенства: $(w_j^{(k)}(\tau))' = (-1)^j [1 + 1/(w_j^{(k)}(\tau) - 0)]$; 2) того, что $w_j^{(k)}(\tau) = 1$ только при $\tau = \pm 2\pi ni$; $n = 0, 1, \dots$; 3) непрерывности $w_j^{(k)}(\tau)$. Равенство (I.I0) следует из результатов, приведенных на с.396(8).

§ 2. Асимптотическое поведение $G_j(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_j^{(k)}(\tau, T) &= f_j(w_j^{(k)}(\tau)T) (w_j^{(k)}(\tau))' \exp\{(-1)^{j+1} T Q_j(T, w_j^{(k)}(\tau))\}, \\ d_m^{(j)}(T) &= \frac{1}{(2m)!} \left[\frac{d^{2m} \tilde{Q}_j^{(k)}(\xi^2, T) \xi}{d\xi^{2m}} \right]_{\xi=0}. \end{aligned} \quad (2.I)$$

Здесь $f_j(t)$ взято из введения, $Q_j(T, w)$ - из (I.6), $w_j^{(k)}(\tau)$ - из леммы 2. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. В области $\mathcal{D}_j^{(k)}(K, \varepsilon)$ (она определена в § I) имеет место равенство:

$$\begin{aligned} G_j(z) &= G_j(T_n^{(j)})^{1/2} \exp\{(-1)^{j+1} (T_n^{(j)} + \Psi_j(T_n^{(j)})) - z \ln(T_n^{(j)})\} * \\ &* \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} 2\Gamma(m+1/2) d_m^{(j)}(T_n^{(j)}) / (T_n^{(j)})^m + R_M^{(j)}(T_n^{(j)}) \right\}, \end{aligned}$$

где $T_n^{(j)} = T_n^{(j)}(z)$ дана в лемме I, $K > 0$ - некоторое число, $\varepsilon > 0$ - любое малое. Далее, $M \geq 1$ - любое целое, функции $d_m^{(j)}(T)$ приведены в (2.I), и при $z \in \mathcal{D}_j^{(k)}(K, \varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$|R_M^{(j)}(T_n^{(j)})| < C_M |z|^{-\rho M + \delta}$$

Здесь C_M - некоторое положительное число, а остальные обозначения взяты из введения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы деформируем в интеграле (I.8) контур $L_j^*(T_n^{(j)})$ в такой, на котором наиболее просто получить оценки остаточных членов в асимптотическом разложении функции $G_j(z)$. Как следует из рассуждений, приведенных в параграфе 2, в плоскости \mathcal{T} таким контуром при $|\arg(z)| \leq \pi/2 - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \pi/2$ - любое) будет положительная часть вещественной оси, проходящая дважды. Именно в этот контур переходит положительная часть вещественной оси W при отображении (I.7) для $j=2$.

Для данных значений $\arg(z)$ контур $L_j^*(T_n^{(j)})$ можно, используя условия из введения, деформировать в плоскости W в контур $L_j^*(|T_n^{(j)}|)$. Теперь, изучая образ последнего при отображении (I.7) и деформируя его в плоскости \mathcal{T} в положительную часть вещественной оси, проходящую дважды, (это возможно в силу лемм 2 и 3) получаем из (I.5) при $|\arg(z)| \leq \pi/2 - \varepsilon$ равенство:

$$G_j(z) = C_j T_n^{(j)} G_j^*(z) \left\{ \mathcal{X} \int_0^\infty Q_j^{(1)}(\mathcal{X}\tau, T_n^{(j)}) \exp\{-T_n^{(j)} \mathcal{X}\tau\} d\tau - \right. \\ \left. \mathcal{X} \int_0^\infty Q_j^{(2)}(\mathcal{X}\tau, T_n^{(j)}) \exp\{-T_n^{(j)} \mathcal{X}\tau\} d\tau. \right. \quad (2.2)$$

Здесь $\mathcal{X} = 1$.

Для исследования же функции $G_j(z)$ при $\pi/2 - \varepsilon < |\arg(z)| < \pi$ будем использовать их аналитическое продолжение, которое можно получить с помощью представления (2.2). В случае а) $\pi/2 - \varepsilon < \arg(z) < \pi$ контуры интегрирования в (2.2) следует для этого деформировать в луч: $\arg(\tau) = -\pi/2 + \varepsilon$, а в случае б) $-\pi < \arg(z) < -\pi/2 + \varepsilon$ - в луч: $\arg(\tau) = \pi/2 - \varepsilon$. Подобная деформация контуров возможна в силу лемм 2 и 3, условий (в.2-3) и применения теоремы о соответствии границ к отображению (I.7). Итак, при $\pi/2 - \varepsilon < |\arg(z)| < \pi$ имеет место равенство (2.2), в котором $\mathcal{X} = \exp\{(-\pi/2 + \varepsilon)i\}$ для случая а), и $\mathcal{X} = \exp\{(\pi/2 - \varepsilon)i\}$ для случая б). Разлагая теперь функции $Q_j^{(k)}(\mathcal{X}\tau, T_n^{(j)})$ в ряды по степеням $\tau^{1/2}$ с помощью (I.8), и производя необходимые оценки, получаем утверждения теоремы.

Литература

1. Д е Б р е й н Н.Г. Асимптотические методы в анализе. М., ИЛ, 1961.
2. Ф е д о р ю к М.В. Метод перевала. М., 1977.

3. К о н н о М. A two point connection problem for general linear ordinary differential equations. Hiroshima Math.J., vol.4, N 2, p.293-338.
4. К о в а л е в с к и й М.А. Асимптотическое поведение голоморфных в нуле решений некоторого линейного дифференциального уравнения. Вестник ЛГУ, сер.мат., мех., астр., 1978, № I, с.34-39.
5. У и т е к к е р Э.Т., В а т с о н Дж.Н. Курс современного анализа. М., т.1, 1962, с.342.
6. Е в г р а ф о в М.А. Асимптотика интегралов со сливающимися точками перевала. М., (Ин-т прикл.мат.АН СССР. Препринт № 12); 1977, с.67.
7. К о п с о н Э. Асимптотические разложения. М., 1966, с.159.
8. Л а в р е н т ь е в М.А., Ш а б а т Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, М., 1958, с.678.

Kovalevsky M.A. Asymptotics of some functions generalizing the Euler gamma-function.

Asymptotic behavior of two classes of functions defined by some integrals is considered. The functions $\frac{1}{\Gamma(z)}$ and $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ are examples of functions of this classes. The problem of investigation of this functions arises from the "connection problem" for a linear ordinary differential equations with two singular points. The theorem giving asymptotics of these functions when $|z| \rightarrow \infty$ in a certain sector is proved by making use of some lemmas and saddle point method.