В. В. Власов, С. А. Иванов, Оценки решений уравнений с последействием в шкале пространств Соболева и базис из разделенных разностей, *Алгебра и анализ*, 2003, том 15, выпуск 4, 115–141

Алгебра и анализ
Том 15 (2003), вып. 4

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ В ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА И БАЗИС ИЗ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ

© В. В. Власов, С. А. Иванов

Установлены неулучшаемые оценки решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа в шкале пространств Соболева с произвольным индексом без предположения отделимости корней характеристического квазимногочлена. Доказательство основано на базисности Рисса системы разделенных разностей экспоненциальных решений уравнения. Кроме того, получены результаты о полноте и минимальности системы экспоненциальных решений упомянутых уравнений.

§0. Введение

В предлагаемой статье изучается начальная задача для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа с несколькими запаздываниями

$$a_{0m}u^{(m)}(t)+\cdots+a_{km}u^{(m)}(t-h_k)+\cdots+a_{nm}u^{(m)}(t-h_n)=0,\quad t>0,$$

и с начальным условием

$$u|_{(-h_n,0)}=g.$$

Здесь не выписаны интегральные слагаемые и члены с младшими производными. Решения изучаются в шкале пространств Соболева H^s при $s\geqslant m$. Основное предположение состоит в том, что $a_{0m}\neq 0$, $a_{nm}\neq 0$. При этом предположении нули $\{\lambda_q\}$ характеристического квазимногочлена $L(\lambda)$ лежат

Ключевые слова: уравнения с запаздыванием, семейства экспонент, базис Рисса, пространства Соболева.

Работа поддержана РФФИ, гранты 02-01-00790, 00-15-96100, 02-01-00554.

в полосе $\varkappa_- \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \varkappa_+$, где $\varkappa_+ := \sup \operatorname{Re} \lambda_q$, $\varkappa_- =: \inf \operatorname{Re} \lambda_q$. Используя свойства семейства экспоненциальных решений, мы доказываем точные оценки решений

$$\|u\|_{H^s(T-h,T)} \leqslant d(T+1)^{M-1} e^{\varkappa_+ T} \|g\|_{H^s(-h,0)}, \quad T \geqslant 0, \tag{0.1}$$

$$\|u\|_{H^s(T-h,T)} \geqslant c(g) e^{\varkappa_- T}, \quad c > 0, \tag{0.2}$$

где постоянная M определяется функцией $L(\lambda)$.

Подчеркнем, что полученные оценки справедливы без условия отделимости нулей функции $L(z)$ и при любом $s \geqslant m$, кроме полуцелых.

В предположении отделимости для целочисленных s эти оценки установлены в [7, 8], для нецелых — анонсированы в [9, 27].

Оценки, сходные с (0.1), для которых величина $\varkappa_+$ заменяется на $\varkappa_+ + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, давно и хорошо известны; см., например, [10, 14, 15]. Полученная нами оценка (0.1) неулучшаема в следующем смысле: константы $\varkappa_\pm$ нельзя заменить на соответственно $\varkappa_+ - \varepsilon$, $\varkappa_- + \varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$. Кроме того, и степень M нельзя уменьшить сразу для всех g.

Доказательство основано на свойствах семейства V экспоненциальных решений задачи (в том случае, когда квазиполином $L(\lambda)$ имеет только простые нули λ_q, это семейство имеет вид $\{e^{\lambda_q t}\}$). При условии отделимости и для целых s это исследование проведено в работах первого автора [7, 8]. В данной работе удалось снять эти ограничения, опираясь на два недавних результата второго автора [1, 6].

Отметим, что изучение базисности экспоненциальных решений и оценки вида (0.1) в векторном случае (т.е. в ситуации, когда a_{kj} — квадратные матрицы) при $m = 1$ (см. (1.3)) в шкале пространств Соболева вектор-функций с целочисленным индексом проводилось в [16–17]. При ином понимании решений базисность семейства экспоненциальных решений в пространстве $L^2((-h,0),\mathbb{C}^m) \oplus \mathbb{C}^m$ рассматривалась в [20]. Полнота семейств экспоненциальных решений изучалась рядом авторов как в векторном, так и в скалярном случаях, начиная, по-видимому, с работы Н. Левинсона [21]. Ограничимся здесь указанием работ [18–20] (там же см. библиографию).

Схема работы состоит в следующем. После определения решения задачи в H^s и формулировки условий согласования вводится семейство V и изучается его полнота и минимальность. Изучение разложения по элементу V разделено на несколько этапов. Поскольку отделимость нулей $\{\lambda_q\}$ не предполагается, само семейство V, вообще говоря, не образует базис Рисса ни в одном из подпространств H^s. Поэтому сначала рассматривается базис из подпространств, образованных экспонентами с близкими точками λ_q. В каждом подпространстве затем выбирается базис из разделенных разностей (функций вида $e^{\mu t}$, $(e^{\mu t}-e^{\lambda t})/(\mu-\lambda)$, и т.д.) и получается семейство элементов Φ.

При удалении m элементов это семейство оказывается [1] базисом в $L^2(-h,0)$. Основываясь на этом и используя идею Д. Расселла [22], убеждаемся, что в H^m, $H^{m+1}, \dots$ исходное семейство разделенных разностей образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки и его коразмерность равна соответственно $0, 1, \dots$ Для получения базисности в пространстве Соболева с нецелыми индексами применяются результаты работы [6] об интерполяции подпространств и базисности экспонент в промежуточных пространствах. Оказывается, что Φ образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в H^s при всех s, кроме особых точек $s = m + 1/2$, $m+3/2, \dots$, когда Φ образует базис Рисса в пространстве с более сильной метрикой. После наложения необходимых для разрешимости задачи условий согласования при $t = 0$ получаем семейство, которое образует базис Рисса в подпространстве $H^s_U \subset H^s$ допустимых начальных функций.

В свою очередь, оценки сверху получаются с использованием разложения начальной функции g по полученному базису. На этом же пути получается и оценка снизу, но в отличие от оценки сверху последняя неравномерна по g: постоянную $c(g)$ в (0.2) нельзя заменить на $c\|g\|$. Отметим, что в особых точках $s = m+1/2, m+3/2, \dots$ справедливы аналогичные оценки в пространствах с метрикой более сильной, чем метрика H^s. Основные результаты предлагаемой статьи анонсированы в [27].

§1. Начальная задача для дифференциально-—разностного уравнения нейтрального типа

Рассмотрим следующую начальную задачу:

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{kj}u^{(j)}(t-h_k) + \sum_{j=0}^{m}\int_0^h B_j(\tau)u^{(j)}(t-\tau)\,d\tau = 0, \quad t > 0, \tag{1.3}$$

$$u(t) = g(t), \quad t \in [-h, 0]. \tag{1.4}$$

Здесь $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n =: h$, a_{kj} — комплексные коэффициенты, функции $B_j(\tau)$ лежат в $L^2(0,h)$. Функция g принадлежит пространству Соболева $H^s(-h,0)$, где $s \geqslant m$. Определение и свойства пространств Соболева с нецелым индексом см. ниже и в [5, гл. I].

Определение. Под решением задачи (1.3), (1.4) мы понимаем такую функцию u, что для любого $T > 0$ функция u принадлежит пространству $H^s(-h, T)$, удовлетворяет уравнению (1.3) в $H^{s-m}(0, T)$ и начальному условию (1.4) в пространстве $H^s(-h, 0)$.

Обозначим через H^s_U подпространство функций в $H^s(-h, 0)$, удовлетворяющих $[s - m + 1/2]$ условиям согласования

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{kj} g^{(j+r)}(-h_k) + \sum_{j=0}^{m} \int_0^h B_j(\tau) g^{(j+r)}(-\tau)\, d\tau = 0, \tag{1.5}$$

$r = 0, 1, \ldots, [s - m - 1/2]$. В силу теоремы о следах [5] условия согласования являются необходимыми условиями существования гладких решений при $s > m + 1/2$.

Напомним определение пространств Соболева для произвольного положительного p. Определим $H^p(\mathbb{R})$ как пространство всех $f \in L^2(\mathbb{R})$, для преобразований Фурье $\widehat{f}$ которых конечна величина

$$\|f\|^2_{H^p} := \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^{2p}) d\xi < \infty.$$

Пространство Соболева $H^p = H^p(-h, 0)$ на отрезке определим как пространство сужений функций из пространства $H^p(\mathbb{R})$ на интервал $(-h, 0)$ (с соответствующей фактор-нормой). При целочисленных $p = m$ пространство $H^m(-h, 0)$ есть, как известно, пространство функций $f \in L^2(-h, 0)$ таких, что $f^{(m)} \in L^2(-h, 0)$, с (эквивалентной) нормой $\|f\|_{H_m}$:

$$\|f\|^2_{H^m} = \int_{-h}^{0} (|f(t)|^2 + |f^{(m)}(t)|^2) dt < \infty.$$

Отметим важный факт, что при $0 < p < 1$ пространство H^p есть интерполяционное пространство, $H^p = [L^2, H^1]_p = [L^2, H^1]_{p,2}$. Подробнее см. [5, гл. I].

§2. Характеристическая функция и экспоненциальные решения уравнения

Введем характеристическую функцию $L(\lambda)$ уравнения (1.3)

$$L(\lambda) := \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{kj}\lambda^j e^{-\lambda h_k} + \sum_{j=0}^{m}\lambda^j \int_0^h B_j(\tau)e^{-\lambda\tau}\,d\tau;$$

через $\Lambda = \{\lambda_q\}$ обозначим ее нули, упорядоченные в порядке возрастания модулей с учетом кратности, через ν_q — их кратности. Введем семейство $V = \{v_{qj}\}$ экспоненциальных решений уравнения (1.3):

$$v_{qj}(t) = t^j \exp(\lambda_q t), \quad j = 0, 1, \ldots, \nu_q - 1. \tag{2.6}$$

Отметим, что семейство

$$w_{qj}(t) = \frac{t^j \exp(\lambda_q t)}{|\lambda_q|^s + 1}, \quad j = 0, 1, \ldots, \nu_q - 1,$$

почти нормировано в пространстве H^s. Этот факт при нецелом s показан в [6] для случая простых корней $L(\lambda)$. Для кратных нулей доказательство аналогично.

Заметим, что если все интегральные члены равны нулю, то функцию $L(\lambda)$ называют [10] характеристическим квазимногочленом уравнения (1.3).

Изучим поведение характеристической функции во всей комплексной плоскости, что необходимо для исследования семейства экспоненциальных решений.

Далее, вместо неравенств

$$c\,g(x) \leqslant f(x) \leqslant Cg(x), \quad x \in X,$$

с положительными постоянными c, C, не зависящими от x, мы будем писать

$$f(x) \asymp g(x), \quad x \in X.$$

Односторонние оценки такого рода мы будем обозначать знаками $\prec$ и $\succ$.

В следующей лемме выделяются главные части характеристической функции при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$, $\operatorname{Re}\lambda \to -\infty$, и в полосе, параллельной вещественной оси. Для того чтобы эти главные части выражались в терминах коэффициентов, мы потребуем подчиненности интегральных членов.

Лемма 2.1. а) *Пусть* $a_{0j_+} \neq 0$ *при некотором* j_+, *при* $j > j_+$ *коэффициенты* a_{0j} *и интегральные слагаемые* $B_j(t)$ *равны нулю. Тогда при* $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$ *характеристическая функция имеет асимптотику*

$$L(\lambda) = a_{0j_+}\lambda^{j_+}(1 + o(1)) \tag{2.7}$$

равномерно по $\operatorname{Im}\lambda$.

б) *Пусть* $a_{nj_-} \neq 0$ *при некотором* j_-, *при* $j > j_-$ *коэффициенты* a_{nj} *и интегральные слагаемые* $B_j(t)$ *равны нулю. Тогда в области* $|\operatorname{Re}\lambda| > c\ln|\operatorname{Im}\lambda|$ *для достаточно большого* c *при* $\operatorname{Re}\lambda \to -\infty$ *характеристическая функция имеет асимптотику*

$$L(\lambda) = a_{nj_-}\lambda^{j_-}e^{-\lambda h}(1 + o(1)) \tag{2.8}$$

равномерно по $\operatorname{Im}\lambda$. *Если* $a_{nm} \neq 0$, *то эта асимптотика верна при* $\operatorname{Re}\lambda \to -\infty$ *без условий на связь мнимой и вещественной частей* λ.

в) *Пусть хотя бы один из коэффициентов* a_{km}, $k = 0, 1, \ldots, n$, *отличен от нуля. Тогда при достаточно больших* c, C, R *на множестве* $\{\lambda \mid c < \operatorname{Re}\lambda < C, |\lambda| > R\}$ *характеристическая функция удовлетворяет оценкам*

$$|L(\lambda)| \asymp |\lambda|^m \tag{2.9}$$

равномерно по $\operatorname{Im}\lambda$.

Доказательство. а) При $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$ главный вклад неинтегральных слагаемых в поведение функции $L(\lambda)$ дают члены с минимальным сдвигом, а среди них — со старшей степенью λ. В условиях утверждения а) характеристическая функция может быть записана в виде

$$L(\lambda) = a_{0j_+}\lambda^{j_+}\left(1 + \sum_{j<j_+}\frac{a_{0j}}{a_{0j_+}}\lambda^{j-j_+} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{a_{kj}}{a_{0j_+}}e^{-\lambda h_k}\lambda^{j-j_+}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a_{0j_+}}\sum_{j=0}^{j_+}\lambda^{j-j_+}\int_0^h B_j(\tau)e^{-\lambda\tau}\,d\tau\right).$$

В силу леммы Римана–Лебега интегральные слагаемые стремятся к нулю, что дает а).

б) При $\operatorname{Re}\lambda \to -\infty$ главный вклад в поведение функции $L(\lambda)$ дают члены с максимальным сдвигом. Поэтому из представления

$$L(\lambda) = a_{nj_-}\lambda^{j_-}e^{-\lambda h}\left(1 + \sum_{j<j_-}\lambda^{j-j_-}\frac{a_{nj}}{a_{nj_-}} + \sum_{k<n}\sum_{j=0}^{m}\frac{a_{kj}}{a_{nj_-}}\lambda^{j-j_-}e^{\lambda(h-h_k)}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{a_{0j_-}}\sum_{j=0}^{j_-}\lambda^{j-j_-}\int_0^h B_j(\tau)e^{\lambda(h-\tau)}\,\tau\right)$$

следует утверждение б).

в) В полосе $c < \operatorname{Re}\lambda < C$ при больших c главный вклад в поведение функции $L(\lambda)$ дают члены с максимальной степенью, а среди них — с минимальным сдвигом. Это дает утверждение в). Лемма 2.1 доказана. •

Отметим, что при $B_j(\tau) \equiv 0$, $j = 0, \ldots, m$, изучением поведения и оценками функции $L(\lambda)$ занимались многие авторы. Ограничимся здесь указанием монографии [10] (там же см. соответствующую библиографию).

2.1. Полнота и минимальность семейства экспоненциальных решений уравнения. Исследуем, опираясь на свойства характеристической функции, вопрос о полноте и минимальности семейства V (2.6) экспоненциальных решений уравнения.

Теорема 2.1. а) *Семейство V является минимальным в пространстве $H^p(-h,0)$ при $p > m - 1/2$.*

б) *Пусть выполнены условия утверждений* а)–в) *леммы* 2.1. *Тогда семейство V является полным в пространствах $H^m(-h,0)$ и H^s_U.*

Доказательство. а) Для простоты ограничимся случаем простых нулей характеристической функции L, при этом $V = \{v_q\} = \{e^{\lambda_q t}\}$. Нам также удобно говорить не о биортогональном, а о дуальном семействе — мы покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое семейство ненулевых функционалов ψ_q над $H^p(-h,0)$, $p = m - 1/2 + \varepsilon$, что

$$\psi_q(v_r) = 0 \quad \text{при } q \neq r,\ \psi_q(v_q) = 1. \tag{2.10}$$

Дуальное к $H^p(-h,0)$, $p > 0$, пространство есть множество распределений из $H^{-p}(\mathbb{R})$ с носителем на $[-h,0]$.

Введем определенное на множестве $\mathcal{E}'$ — множестве функционалов над пространством бесконечно дифференцируемых на $[-h,0]$ функций — преобразование Фурье–Лапласа

$$\widehat{\varphi}(\lambda) := \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{-\xi\lambda}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

При этом

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \langle \varphi, e^{-\lambda\cdot} \rangle, \tag{2.11}$$

где $\langle \varphi, f(\cdot)\rangle$ есть значение функционала φ на f. Рассмотрим при некотором q целую функцию $\widehat{\psi}_q(\lambda) := \dfrac{L(\lambda)}{L'(\lambda_q)(\lambda-\lambda_q)}$. Это целая функция экспоненциального типа 0 в правой и типа h в левой полуплоскостях. Из явного вида характеристической функции $L(\lambda)$ заключаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(iy)|^2}{(1+|y|^{p+1})^2}dy < \infty.$$

Тогда для $\widehat{\psi}_q$ получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}_q(iy)|^2}{(1+|y|^{p})^2}dy < \infty.$$

По теореме Пэли–Винера найдется функционал ψ_q из $[H^p(-h,0)]'$, являющийся прообразом $\widehat{\psi}_q$ при преобразовании Фурье–Лапласа:

$$\langle \psi_q, e^{-\lambda\cdot}\rangle = \widehat{\psi}_q(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_q)(\lambda-\lambda_q)}.$$

Требуемое семейство функционалов построено.

б) Предположим, что семейство экспоненциальных решений V не является полным в пространстве $H^m(-h,0)$. Тогда существует ненулевая функция $f(t)$, ортогональная в пространстве $H^m(-h,0)$ всем экспоненциальным решениям из семейства V. Приведем это предположение к противоречию.

Рассмотрим функцию $F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = F_1(\lambda)/L(\lambda), \quad F_1(\lambda) := \int_{-h}^{0} \lambda^m e^{\lambda t} \bar{f}^{(m)}(t)\,dt + \int_{-h}^{0} e^{\lambda t} \bar{f}(t)\,dt,$$

и докажем, что функция F должна быть нулем.

Так как функция $f(t)$ ортогональна в пространстве $H^m(-h,0)$ экспоненциальным решениям $e^{\lambda_q t}$, $te^{\lambda_q t}, \ldots,$ $t^{\nu_q - 1}e^{\lambda_q t}$, а функция $L(\lambda)$ имеет нуль порядка ν_q в точках λ_q, то функция $F(\lambda)$ регулярна во всех этих точках, а поэтому является целой.

Прежде всего установим оценку числителя $F_1(\lambda)$ функции $F(\lambda)$. Во всей комплексной плоскости функция F_1 удовлетворяет оценкам

$$|F_1(\lambda)| \prec |\lambda|^m(1 + |e^{-\lambda h}|)/|\operatorname{Re}\lambda|^{1/2}. \tag{2.12}$$

В любой полосе, параллельной мнимой оси, в силу леммы Римана–Лебега справедлива асимптотика

$$F_1(\lambda) = \lambda^m o(1), \quad |\lambda| \to +\infty. \tag{2.13}$$

Из оценок (2.7), (2.8), (2.12) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $R > 0$, что в области $\{\lambda \mid |\lambda| > R, |\arg\lambda - \pi/2| < \varepsilon, |\arg\lambda + \pi/2| < \varepsilon\}$ функция $F(\lambda)$ допускает оценку

$$|F(\lambda)| \leqslant d_1|\lambda|^w \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|^{1/2}}, \tag{2.14}$$

где $w := \max\{m - j_+, m - j_-\}$.

Используя оценку (2.14) и то, что $F(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, и применяя стандартные рассуждения, основанные на теореме Фрагмена–Линделёфа, приходим к оценке

$$|F(\lambda)| \leqslant d_2|\lambda|^w$$

во всей комплексной плоскости. Отсюда вытекает, что $F(\lambda)$ — многочлен степени не выше w.

Согласно утверждению в) леммы 2.1, в полосе $\{c < \operatorname{Re}\lambda < C\}$ лежит при достаточно большом c лишь конечное число нулей.

Теперь из (2.9), (2.13) выводим:

$$|F(\lambda)| \to 0, \quad \operatorname{Im}\lambda \to \pm\infty, \quad \operatorname{Re}\lambda = \alpha,$$

откуда получается, что $F(\lambda) \equiv 0$. Из последнего соотношения следует, что при любом λ справедливо тождество

$$\int\limits_{-h}^{0} \lambda^m e^{\lambda t} \bar{f}^{(m)}(t)dt + \int\limits_{-h}^{0} e^{\lambda t} \bar{f}(t)dt \equiv 0.$$

Для завершения проверки полноты семейства V в $H^m(-h, 0)$ осталось заметить, что тогда $f(t) \equiv 0$ в силу полноты семейства экспонент $\{e^{\lambda t}\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ в пространстве $H^m(-h, 0)$ (см., например, [22]).

Исследуем полноту семейства V в $H^p(-h, 0)$ при $m < p \leqslant m + 1$, для чего свяжем с характеристической функцией функционал ψ_L, преобразованием Фурье–Лапласа которого и является характеристическая функция $L(\lambda)$: $\widehat{\psi}_L = L$. В силу (2.11) функционал ψ_L аннулирует все экспоненциальные решения, и мы заключаем, что семейство V неполно в $H^p(-h, 0)$, если этот функционал ограничен на $H^p(-h, 0)$. Так как в силу леммы 2.1 $|L(\lambda)| \asymp |\lambda|^m$ на прямой $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$, то характеристическая функция квадратично суммируема на этой прямой с весом $(1+|\lambda|^{2q})^{-1}$ тогда и только тогда, когда $q > m+1/2$. Это дает ограниченность функционала ψ_L на $H^p(-h, 0)$ при $q > m + 1/2$. Мы показали тем самым, что семейство V неполно в $H^p(-h, 0)$ при $p > m + 1/2$. Покажем, что V имеет единичный дефект (коразмерность замыкания линейной оболочки) при $m+1/2 < p \leqslant m+1$. Действительно, возьмем $\mu \notin \Lambda$ и добавим к V элемент $e^{-\mu t}$. Новому элементу отвечает целая функция $L(\lambda)(\lambda - \mu)$ и, проводя для нее рассуждения, использованные при доказательстве полноты семейства V в H^m, мы получаем полноту нового семейства в H^{m+1}. Очевидно, что это семейство сохраняет полноту и в H^p при $p < m + 1$.

Предположим теперь, что семейство V неполно в H^p при $p \leqslant m + 1/2$. Тогда дефект семейства V равен единице и найдется функционал ψ, ядро которого совпадает с замыканием линейной оболочки семейства V в H^p. Преобразование Фурье–Лапласа $\widehat{\psi}$ этого функционала есть целая функция экспоненциального типа, нули которой совпадают с Λ с учетом кратности. Действительно, наличие дополнительного нуля у $\widehat{\psi}$ давало бы полное семейство, что вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.2. *Пусть экспоненциальное семейство* $\tilde{V} = \{t^j \exp(\mu_q t)\}$ *со спектром* $\widetilde{\Lambda}$ *минимально в* $H^p(-h, 0)$ *и его дефект равен* 1. *Тогда добавление к* $\tilde{V}$ *элемента* $e^{\mu t}$ *при* $\mu \notin \widetilde{\Lambda}$ *или* $t^r e^{\mu_q t}$ *(если в* $\tilde{V}$ *уже есть элементы* $e^{\mu_q t}$, $te^{\mu_q t}$, $\ldots$, $t^{r-1}e^{\mu_q t}$*) дает полное семейство.*

Доказательство леммы 2.2 повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства квадратично-суммируемых функций из работы [13]. Для полноты изложения приведем схему доказательства для случая простого спектра Λ. Пусть $e^{\mu t} \in \bigvee_{H^p(-h,0)} \widetilde{V}$. Тогда в $\mathcal{H} := \bigvee_{H^p(-h,0)} e^{-\mu t}\widetilde{V}$ лежит функция, тождественно равная 1. Так как интегрирование — непрерывная операция и неопределенные интегралы от элементов $\mathcal{H}$ лежат в $\mathcal{H}$, то $t \in \mathcal{H}$, $t^2 \in \mathcal{H}, \ldots$, и множество полиномов плотно в $\mathcal{H}$. Следовательно, $\mathcal{H}$ совпадает с H^p. Поэтому $\bigvee_{H^p(-h,0)} \widetilde{V}$ совпадает с H^p, что невозможно. Лемма доказана. •

Рассмотрим целую функцию $\widehat{\psi}/L$. Эта функция не имеет нулей и ее порядок и тип не превышают порядок и тип функций $\widehat{\psi}$ и L [23, с. 35]; т.е. $\widehat{\psi}/L = \exp(a\lambda + b)$. В этом случае функция $\widehat{\psi}$ не может быть квадратично суммируема с весом $(1+|\lambda|^p)^{-1}$ на прямых, параллельных мнимой оси. Последнее противоречит требованию ограниченности функции $\widehat{\psi}$ на H^p. Тем самым установлена полнота в H^p при $p \leqslant m + 1/2$.

Чтобы найти дефект в $H^p(-h, 0)$ при $p > m+1$, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.3. *Пусть* ψ *— ограниченный функционал в пространстве* $H^p(-h, 0)$, $p \geqslant 1$, *причем* $\psi(1) \neq 0$; B_ψ *— оператор из* $\operatorname{Dom} B_\psi = \operatorname{Ker}\psi$ *в* H^{p-1}, $B_\psi f = \dfrac{d}{dt} f$. *Тогда* B_ψ *— изоморфизм подпространства* $\operatorname{Dom} B_\psi \subset H^p$ *и* H^{p-1}.

Доказательство леммы. Введем оператор интегрирования J:

$$(Jf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Оператор J ограничен как оператор из H^{p-1} в H^p. Оператор, обратный к B_ψ, можно записать в виде

$$(B_\psi^{-1}\varphi)(x) = (J\varphi)(x) - \frac{1}{\psi(1)}\psi(J\varphi).$$

Следовательно, этот оператор ограничен как оператор из пространства H^{p-1} на пространство $\operatorname{Dom} B_\psi$. Лемма доказана. •

Завершим доказательство теоремы 2.1. Из изученных свойств семейства V в $H^p(-h,0)$ для $m < p \leqslant m+1$ и из леммы 2.3 заключаем, что V имеет дефект в $H^s(-h,0)$, равный $[s-m+1/2]$. Подпространство H^s_U выделяется именно этим числом функционалов (1.5), причем все элементы системы V ими аннулируются. Теорема 2.1 доказана. •

Замечание 2.1. Доказательство полноты в пространстве $H^m = W_2^m$ семейства экспоненциальных решений переносится на случай банахова пространства W_p^m, $p \geqslant 1$, что обобщает известный результат Н. Левинсона и К. Маккаллы [21].

Замечание 2.2. Из доказательства леммы 2.2 видно, что в соболевских пространствах, также как и в L^2, неминимальное семейство экспонент является полным.

Приведем результат об асимптотическом поведении решений уравнения (1.3), а именно покажем, что решение уравнения (1.3), убывающее быстрее любой экспоненты, тождественно равно нулю. Утверждения такого рода носят названия теорем типа Фрагмена–Линделёфа, или утверждений о малых решениях (small solutions). Обозначим через U_α подмножество решений уравнения (1.3) таких, что $e^{\alpha t}u(t) \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* б) *теоремы* 2.1 *и* $u(t) \in \bigcap_{\alpha \geqslant 0} U_\alpha$. *Тогда* $u(t) \equiv 0$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.1 (б) о полноте экспоненциальных решений. Кратко наметим его в случае $B_j(\tau) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Рассмотрим преобразование Лапласа $\widehat{u}(\lambda)$ решения $u(t)$. Интегрируя по частям, можно получить, что

$$\widehat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda) q(\lambda),$$

где

$$q(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{kj} \left(\sum_{p=0}^{j-1} g^{(p)}(-h_k) \lambda^{j-p-1} - \lambda^j e^{-\lambda h_k} \int_{-h_k}^{0} e^{-\lambda t} g(t)\, dt \right).$$

Из включения $u(t) \in U_\alpha$ вытекает, что преобразование Лапласа $\widehat{u}(\lambda)$ допускает голоморфное продолжение в полуплоскость $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > -\alpha\}$. Из включения $u(t) \in \bigcap_{\alpha > 0} U_\alpha$ вытекает, что $\widehat{u}(\lambda)$ — целая функция, и из вида $q(\lambda)$

заключаем, что $\widehat{u}(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, не превосходящего h.

Аналогично доказательству теоремы 2.1 нетрудно установить, что функция $\widehat{u}(\lambda)$ ограничена при $\lambda \in \{\lambda : |\arg\lambda| < \pi/2 - \varepsilon; |\arg\lambda| > \pi/2 + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Из теоремы Фрагмена–Линделёфа получаем, что $\widehat{u}(\lambda)$ — целая функция, ограниченная во всей комплексной плоскости. Принимая во внимание, что $\widehat{u}(\lambda) \to 0$ при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$, получаем, что $\widehat{u}(\lambda) \equiv 0$, и тогда $u(t) \equiv 0$ в силу теоремы обращения.

Замечание 2.3. В работе [18] получены условия отсутствия малых решений для векторной системы первого порядка (см. также [15, 19]). Однако при стандартном переходе от уравнения (1.3) к такой системе определитель возникающей характеристической функции не имеет максимального экспоненциального типа mh, что не позволяет в нашем случае применить результаты работы [18].

2.2. Базис из подпространств. Если имеется несколько запаздываний и эти запаздывания h_j несоизмеримы, то, как правило, множество Λ неотделимо и семейство V не образует безусловного базиса в пространстве $H^p(0,T)$ при любом T и любом p. Оказывается, что если объединить близкие точки спектра, то подпространства, натянутые на соответствующие экспоненты, образуют безусловный базис.

Далее, предполагаем, что выполнено условие $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$. Тогда из леммы 2.1 следует, что спектр Λ семейства V лежит в полосе, параллельной мнимой оси:

$$\varkappa_- := \inf_q \operatorname{Re}\lambda_q \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \sup_q \operatorname{Re}\lambda_q =: \varkappa_+.$$

Следуя [2, 3, 25], построим подпространства экспонент. Для любого $\lambda \in \Lambda$ обозначим через $D_\lambda(r)$ круг радиуса r с центром λ. Обозначим через $G^{(q)}(r)$, $q = 1, 2, \ldots$, связные компоненты объединения $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda(r)$. Пусть $\Lambda^{(q)}(r)$ — подпоследовательность точек из Λ, лежащая в $G^{(q)}$, $\Lambda^{(q)}(r) := \Lambda \cap G^{(q)}(r)$, и $\mathcal{L}^{(q)}(r)$ — подпространства, образованные соответствующими экспонентами $t^n e^{\lambda t}$, $\lambda \in \Lambda^{(q)}(r), n = 0, \ldots, \nu_\lambda - 1$ (ν_λ — кратность точки λ). Семейство $\{\mathcal{L}^{(q)}(r)\}$ обозначим через $\mathcal{L} := \mathcal{L}(r)$; через $M_q = M_q(r)$ обозначим число точек в $\Lambda^{(q)}$ с учетом кратности.

Предложение 2.1. *Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$. Тогда при достаточно малом r числа $M_q(r)$ ограничены равномерно по q.*

Возьмем m произвольных нулей $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_m$ функции L. Тогда из полученной выше асимптотики вытекает, что функция

$$L_0(\lambda) = L(\lambda) / \prod_1^m (\lambda - \lambda_j)$$

является функцией типа синуса (точнее говоря, становится ею после замены $\lambda \to i\lambda$). Искомый результат следует из [24].

Теорема 2.3. *Пусть* $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$ *и* $s \geqslant m$ *не является полуцелым* ($s \neq m+1/2, m+3/2, \ldots$). *Тогда семейство подпространств* $\mathcal{L}$ *образует базис Рисса в пространствах* H^m *и* H^s_U.

Доказательство теоремы 2.3.

а) Сначала изучим свойства семейства $\mathcal{L}$ в L^2. Для этого построим подпространства $\{\mathcal{L}_0^{(q)}\}$, отвечающие функции L_0 (λ). Отличие семейства $\mathcal{L}$ от семейства $\mathcal{L}_0 := \{\mathcal{L}_0^{(q)}(r)\}$ состоит в следующем: если число λ_j — простой нуль функции $L(\lambda)$, то из базиса соответствующего подпространства $\{\mathcal{L}^{(q)}\}$ удаляется $e^{\lambda_j t}$; если λ_j — нуль кратности $n+1$, то удаляется элемент $t^n e^{\lambda_j t}$ со старшей степенью n.

Поскольку оператор умножения на $e^{\alpha t}$ есть изоморфизм в пространстве $H^n(-h, 0)$ при любом n и сдвигает спектр Λ на α (в $\mathbb{C}$), при исследовании базисности будем считать, что Λ лежит в полосе в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. При этом все элементы из V лежат в $H^n(-h, \infty)$ при любом n.

Базисность семейства $\mathcal{L}_0$ на полуоси гарантирует следующий результат.

Предложение 2.2 [2, 3]. *Если* Λ *находится в полосе, параллельной вещественной оси, лежащей в левой полуплоскости, и* Λ *представимо в виде конечного объединения отделимых множеств, то для любого* $r > 0$ *семейство подпространств* $\mathcal{L}_0$ *образует безусловный базис в замыкании своей линейной оболочки в* $L^2(0, \infty)$.

Поскольку L_0 (λ) — функция типа синуса, имеющая экспоненциальный тип 0 в правой полуплоскости и тип h в левой, оператор P_h проектирования из замыкания в $L^2(0, \infty)$ линейной оболочки $\mathcal{L}_0$ на $L^2(-h, 0)$ является изоморфизмом [11, 4]. Тем самым получена базисность семейства $\mathcal{L}_0$ в $L^2(-h, 0)$. Отметим, что это же семейство есть базис в L^2 на любом интервале длины h. Действительно, оператор сдвига $f(t) \longmapsto f(t + R)$ является изоморфизмом пространств $H^n(-h, 0)$ и $H^n(R - h, R)$ при любом R и сохраняет все подпространства $\mathcal{L}_0^{(q)}$.

б) Перейдем к исследованию базисности в соболевских пространствах с целым индексом.

Для применения леммы 2.3 возьмем функционал ψ_0, равный преобразованию Фурье–Лапласа от $L_0(\lambda)$. Рассуждая как и при доказательстве теоремы 2.1, получим, что функционал ψ_0 ограничен на $H^1(-h,0)$. Теперь из леммы 2.3 вытекает, что семейство подпространств $\mathcal{L}_0$ образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в подпространстве $\operatorname{Ker}\psi_0$ пространства $H^1(-h,0)$ единичной коразмерности. Действительно, все подпространства $\mathcal{L}_0^{(q)}$ лежат в $\operatorname{Ker}\psi_0$ и инвариантны относительно дифференцирования. Поэтому свойства базисности при отображении B_ψ сохраняются. Кроме того, пространство $L^2(-h,0)$, равное $\bigvee_{L^2}\mathcal{L}_0$, есть прообраз ядра $\operatorname{Ker}\psi_0$.

Применяя лемму 2.3 m раз, получим, что семейство подпространств $\{\mathcal{L}_0^{(q)}\}$ образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки в пространстве $H^m(-h,0)$ и дефект семейства $\mathcal{L}_0$ в $H^m(-h,0)$ равен m. Добавим к семейству $\mathcal{L}_0$ подпространство, образованное элементами из V, которые не вошли в семейство $\{\mathcal{L}_0^{(q)}\}$. В результате мы получим базис $\{\mathcal{L}(r)\}$ в пространстве $H^m(-h,0)$, что следует из леммы 2.2.

Пусть $s=m+n$ — целое. Тогда V имеет дефект n в $H^s(-h,0)$, причем все элементы V, будучи решениями (1), удовлетворяют n условиям (1.5). Это дает утверждение теоремы для целых s.

в) Перейдем к изучению базисности семейства $\{\mathcal{L}(r)\}$ в пространстве H^s при нецелом s. Сначала изучим семейство $\mathcal{L}_0$ в $H^p(-h,0)$ при $0<p\leqslant 1$. Это семейство образует базис Рисса в $L^2(-h,0)$ и в подпространстве $\mathcal{H}=\operatorname{Ker}\psi_0$ пространства $H^1(-h,0)$ единичной коразмерности. Из теории интерполяции операторов получаем, что это семейство — базис Рисса в интерполяционных пространствах $\mathcal{H}^p := [L^2(-h,0),\mathcal{H}]_p$. Задача определения метрики в таких пространствах решена в [6]. В простейшем случае, когда преобразование Фурье–Лапласа $L_0(\lambda)$ функционала ψ_0 ограничено сверху и отделено от нуля при $\lambda\to\pm i\infty$, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Пусть на прямой* $\operatorname{Re}\lambda=\alpha$ *выполнены неравенства*

$$|L_0(\alpha+iy)|\asymp 1.$$

Тогда при $0\leqslant p<1/2$ *пространство* $[L^2,\mathcal{H}]_p$ *совпадает с* H^p *и имеет эквивалентную метрику; при* $1/2<p\leqslant 1$ *пространство* $[L^2,\mathcal{H}]_p$ *— собственное подпространство в* H^p *коразмерности один с эквивалентной метрикой; при* $p=1/2$ *пространство* $[L^2,\mathcal{H}]_{1/2}$ *плотно в* $H^{1/2}$ *и имеет более сильную метрику.*

Отсюда заключаем, что семейство $\mathcal{L}_0$ образует безусловный базис в пространстве $H^p(-h,0)$ при $p < 1/2$ и образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки коразмерности 1 в пространстве $H^p(-h,0)$ при $1/2 < p \leqslant 1$.

Вновь применяя леммы 2.3, 2.2, получаем, что $\mathcal{L}_0$ образует безусловный базис в H^s в замыкании своей линейной оболочки при неполуцелом s и дефект равен $[s+1/2]$. По лемме 2.2 дефект базиса V равен $[s-m+1/2]$ и, следовательно, $\mathcal{L}$ образует безусловный базис в H^s_U, поскольку пространство H^s_U выделено именно теми функционалами, на которых аннулируются экспоненциальные решения. Теорема 2.3 полностью доказана. •

2.3. Базис из разделенных разностей. Если множество Λ неотделимо, то семейство V не является равномерно минимальным. Для получения базиса из элементов необходимо выбрать в каждом подпространстве $\mathcal{L}^{(q)}$ линейные комбинации экспонент. Оказывается [1], что удобным выбором являются так называемые разделенные разности.

Пусть μ_k, $k=1,\dots,m$, — произвольные комплексные числа, не обязательно различные.

Определение 2.1. Разделенная разность нулевого порядка, отвечающая точке μ, есть $[\mu](t) := e^{\mu t}$. Разделенная разность порядка $m-1$, отвечающая μ_1, $\mu_2,\dots,\mu_r$, определяется следующим образом:

$$[\mu_1,\dots,\mu_r](t) = \int\limits_0^1 d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int\limits_0^{\tau_{m-2}} d\tau_{r-1} t^{r-1} \exp\Big(tZ(\mu_1,\dots,\mu_r)\Big),$$

где

$$Z(\mu_1,\dots,\mu_r) := [\mu_1 + \tau_1\delta_1 + \dots + \tau_{r-1}\delta_{r-1}], \qquad \delta_j := \mu_{j+1} - \mu_j.$$

Если все точки μ_k различны, то легко получить явные формулы для разделенных разностей:

$$[\mu_1,\dots,\mu_r](t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{e^{\mu_k t}}{\prod_{j\neq k}(\mu_k - \mu_j)}.$$

В частности, $[\mu_1,\mu_2] = \dfrac{e^{\mu_1 t} - e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2}$. Подробнее о разделенных разностях см. в [1] и [12, с. 228].

Пусть $\Lambda^{(q)}(r) = \{\lambda_{j,q}\}$, $j = 1,\dots,M_q(r)$, — множества, введенные в п.2.2. Обозначим через $\Phi := \{\Phi^{(q)}(r)\}$ семейство разделенных разностей, соответствующих точкам $\Lambda^{(q)}(r)$:

$$\Phi^{(q)}(r) = \{[\lambda_{1,q}], [\lambda_{1,q}, \lambda_{2,q}], \dots, [\lambda_{1,q}, \dots, \lambda_{M_q,q}]\} = \{\varphi_{q,1}, \varphi_{q,2} \dots, \varphi_{q,M_q}\},$$

$\Phi^{(q)}(r)$ зависит от нумерации точек в $\Lambda^{(q)}(r)$, хотя каждая разделенная разность зависит от $\lambda_{j,q}$ симметрично. Отметим, что функции

$$\widetilde{\varphi}_{q,j} := \frac{\varphi_{q,j}}{(|\mu_q| + 1)^s}$$

почти нормированы в пространстве $H^s(-h,0)$, здесь $\mu_q := \max_{j=1,\dots,M_q} |\lambda_{q,j}|$.

Теорема 2.4. *Пусть $a_{0m} \neq 0, a_{nm} \neq 0$ и число $s \geqslant m$ не является полуцелым ($s \neq m+1/2, m+3/2, \dots$). Тогда семейство элементов $\{\varphi_{q,j}\}_{q,j}$ образует безусловный базис в пространствах $H^m(-h,0)$ и H^s_U.*

Доказательство. Так как семейство $\{\mathcal{L}^{(q)}(r)\}$ образует базис Рисса в $H^m(-h,0)$ в силу теоремы 2.3, то достаточно проверить, что для любого q разделенные разности $\Phi^{(q)}$ образуют в конечномерном пространстве $\mathcal{L}^{(q)}(r)$ *равномерный по* q базис в том смысле, что операторы, переводящие $\Phi^{(q)}$ в ортонормированный базис, ограничены вместе с обратными равномерно по q. Для пространства L^2 это сделано в [1]; для соболевских пространств H^n при целом n доказательство, как легко видеть, сохраняет свою силу. Поэтому то же верно и для промежуточных пространств.

§3. Оценки решений

На основании теорем 2.1а, 2.3, используя подход, предложенный в работах [7, 8], можно установить следующий результат об оценке решений задачи (1.3) сверху.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$, $s \geqslant m$ не является полуцелым ($s \neq m + 1/2, m + 3/2, \dots$). Далее, пусть начальная функция g лежит в пространстве H^s_U. Тогда решение $u(t)$ задачи (1.3), (1.4) существует, единственно и удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{H^s(T-h,T)} \leqslant d(T+1)^{M-1} e^{\varkappa+T} \|g\|_{H^s(-h,0)}, \quad T \geqslant 0, \tag{3.15}$$

где постоянная d не зависит от g, T, а величина M определяется следующим образом:

$$M := \lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\max_q\{M_q(r) \mid \varkappa_q > \varkappa_+ - \varepsilon\}.$$

Замечание 3.1. 1. Другими словами, M есть наибольшая кратность точек спектра „вблизи" его правой границы $\operatorname{Re}\lambda = \varkappa_+$.

2. Для полуцелого s, $s = m+n+1/2$, n — натуральное, аналогичные (3.15) оценки справедливы в более сильной норме. Если обозначить эту более сильную норму через $\|\cdot\|_{*,m+n+1/2}$, то справедлива следующая оценка

$$\|u\|_{H^{m+n+1/2}(T-h,T)} \leqslant \|u\|_{*,m+n+1/2} \leqslant d(T+1)^{M-1}e^{\varkappa_+ T}\|g\|_{*,m+n+1/2}.$$

3. В случае отделимости множества Λ постоянная M допускает оценку

$$M \leqslant N := \max_{\lambda_q\in\Lambda}\nu_q.$$

Доказательство теоремы 3.1. Выберем такую нумерацию точек в $\Lambda^{(q)}$: $\Lambda^q = \{\lambda_{q,1},\ldots,\lambda_{j,q},\ldots,\lambda_{q,M_q}\}$, чтобы величина $\operatorname{Re}\lambda_{q,j}$ не убывала по j, и положим $\varkappa_q := \max_j \operatorname{Re}\lambda_{q,j}$. В силу нумерации $\varkappa_q = \operatorname{Re}\lambda_{q,M_q}$.

Разложим начальную функцию $g(t)\in H^s_U$ по базису из подпространств:

$$g(t) = \sum_q \psi_q(t),$$

где функции $\psi_q(t)$ лежат в $\mathcal{L}^{(q)}$ и, в свою очередь, могут быть разложены по разделенным разностям:

$$\psi_q(t) = \sum_{j=0}^{M_q-1} c_{q,j}\varphi_{q,j}(t).$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|g\|^2_{H^s(-h,0)} \asymp \sum_q \|\psi_q\|^2_{H^s(-h,0)}, \tag{3.16}$$

$$\|\psi_q\|^2_{H^s(-h,0)} \asymp \sum_j |c_{q,j}|^2(1+|\lambda_{q,j}|)^{2s} \tag{3.17}$$

с постоянными, не зависящими от g и q. Так как каждая компонента ψ_q есть линейная комбинация экспоненциальных решений, то формальное решение имеет вид

$$u(t) = \sum_q \psi_q(t),$$

удовлетворяет начальному условию при $t \in [-h, 0]$ и сходится в пространстве $H^s(T-h,T)$. Следовательно, этот ряд представляет собой решение задачи в смысле нашего определения.

Следующие две леммы позволяют оценить разделенные разности $\varphi_{q,j}$ и функции ψ_q.

Лемма 3.1. *Для любых n, q, j справедливы неравенства*

$$|(d/dt)^n \varphi_{q,j}(t)| \leqslant C(1+t)^{M_q-1} e^{\varkappa_q t}(1+\mu_q^n), \tag{3.18}$$

$$\|\varphi_{q,j}\|_{H^n(T-h,T)} \leqslant C_1(1+T)^{M_q-1} e^{\varkappa_q T}(1+\mu_q^n) \tag{3.19}$$

с постоянными C и C_1, зависящими лишь от n и M_q.

Доказательство леммы 3.1. Из определения 2.1 при $Z = Z(\lambda_{q,1}, \lambda_{q,2}, \ldots, \lambda_{q,j})$ вытекает равенство

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi_{q,j}(t) = \sum_{k=0}^n d_k \int_0^1 \cdots \int_0^{\tau_{j-2}} t^{\max\{j-1-k,0\}} Z^{n-k} e^{tZ} d\tau_1 \cdots d\tau_{j-1}.$$

Теперь, обозначив $\delta_{q,j} = \lambda_{q,j+1} - \lambda_{q,j}$, из неравенств

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z &= \operatorname{Re}(\lambda_{q,1} + \delta_{q,1}\tau_1 + \cdots + \delta_{q,j-1}\tau_{j-1}) \\ &\leqslant \operatorname{Re}(\lambda_{q,1} + \delta_{q,1} + \cdots + \delta_{q,j-1}) = \operatorname{Re}\lambda_{q,M_q} = \varkappa_q; \\ |Z| &\leqslant |\lambda_{q,j}| + |\delta_1| + \cdots + |\delta_{j-1}| \leqslant 2j \max|\lambda_{q,j}| = 2j\mu_q \end{aligned}$$

получаем оценку

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}\varphi_{q,j}(t)\right| \leqslant C_2 \sum_{k=0}^n \int_0^1 \cdots \int_0^{\tau_{j-2}} t^{\max\{j-1-k,0\}} \mu_q^{n-k} e^{t\varkappa_q} d\tau_1 \cdots d\tau_{j-1}.$$

Это дает (3.18). Далее, из оценок

$$\|\varphi_{q,j}\|^2_{H^n(T-h,T)} \prec (1+\mu_q^{2n}) \int\limits_{T-h}^{T} |t^{j-1}e^{t\varkappa_q}|^2 dt \prec (1+\mu_q^{2n})e^{2\varkappa_q T} \int\limits_{T-h}^{T} t^{2(j-1)}dt$$
$$\prec (1+\mu_q^{2n})e^{2\varkappa_q T}(1+T)^{2(j-1)}h$$

получаем (3.19). Лемма 3.1 доказана. •

Лемма 3.2. *Для любых q, p справедливы неравенства*

$$\|\psi_q\|_{H^p(T-h,T)} \prec (1+T)^{M_q-1}e^{\varkappa_q T}(1+\mu_q^p)\|c_q\|_{l^2},$$

где $c_q := \{c_{q,j}\}$ и $\|c_q\|_{l^2} = (\sum_{j=0}^{M_q-1}|c_{qj}|^2)^{1/2}$.

При целых p утверждение леммы вытекает из предыдущей леммы и неравенств

$$\|\psi_q\|_{H^p(T-h,T)} \leqslant \sum_{j=0}^{M_q-1}|c_{qj}|\,\|\varphi_{q,j}\|_{H^p(T-h,T)} \leqslant \|c_q\|_{l^2}\left(\sum_{j=0}^{M_q-1}\|\varphi_{q,j}\|^2_{H^p(T-h,T)}\right)^{1/2}$$
$$\prec (1+T)^{M_q-1}e^{\varkappa_q T}(1+\mu_q^p)\|c_q\|_{l^2}.$$

Лемма 3.2 вытекает теперь из известного неравенства [5, формула (2.43)] для норм в интерполяционных пространствах $[X,Y]_\theta$:

$$\|y\|_{[X,Y]_\theta} \leqslant C\|y\|_X^{1-\theta}\|y\|_Y^\theta.$$

Вернемся к доказательству теоремы. Легко видеть, что сдвиг $t \to t+T$ не выводит из пространства $\mathcal{L}^{(q)}$. Если обозначить $\widetilde{\psi}_q(\tau) := \psi_q(\tau+T)$, $\tau \in [-h,0]$, то решение на промежутке $[T-h,T]$ может быть записано в виде

$$u(t) = u(\tau+T) = \sum_q \widetilde{\psi}_q(\tau).$$

В силу базисности семейства $\mathcal{L}$ получаем оценки

$$\|u\|^2_{H^s(T-h,T)} \asymp \sum_q \|\widetilde{\psi}_q\|^2_{H^s(-h,0)},$$

с постоянными, не зависящими от T. Возвращаясь к переменной t, из леммы 3.1 выводим, что

$$\|u\|^2_{H^s(T-h,T)} \prec \sum_q (1+T)^{2M_q-2} e^{2\varkappa_q T}(1+\mu_q^{2s})\|c_q\|^2_{l^2}. \tag{3.20}$$

Положим

$$M(r,\varepsilon) := \max\{M_q(r) \mid \varkappa_q > \varkappa_+ - \varepsilon\}.$$

Это неубывающая целочисленная функция переменной ε; она имеет при $\varepsilon \to +0$ предел $M(r)$, и, кроме того, если ε достаточно мало, то $M(r,\varepsilon) = M(r)$. Поэтому сразу для всех q можно взять T такое, что

$$(1+T)^{2(M_q(r)-1)} e^{\varkappa_q T} \leqslant 2(1+T)^{2(M(r)-1)} e^{\varkappa_+ T}. \tag{3.21}$$

Теперь из (3.20), (3.21) следует неравенство

$$\|u\|^2_{H^s(T-h,T)} \prec (1+T)^{2M(r)-2} e^{2\varkappa_+ T} \sum_q (1+\mu_q^{2s})\|c_q\|^2_{l^2}. \tag{3.22}$$

Поскольку при достаточно малых r при всех $\lambda_{qj} \in \Lambda^{(q)}(r)$ выполняется неравенство $1+\lambda_{qj} \leqslant 2(1+\mu_q)$, из (3.22) получаем

$$\|u\|^2_{H^s(T-h,T)} \prec (1+T)^{2M(r)-2} e^{2\varkappa_+ T} \sum_q (1+\lambda_{qj}^{2s})\|c_q\|^2_{l^2}.$$

Из соотношений (3.17) и (3.16) следует

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^s(T-h,T)} &\prec (1+T)^{2M(r)-2} e^{2\varkappa_+ T} \textstyle\sum_q \|\widetilde{\psi}_q\|^2_{H^s(-h,0)} \\ &\prec (1+T)^{2M(r)-2} e^{2\varkappa_+ T} \|g\|^2_{H^s(-h,0)}.\end{aligned}$$

Для окончания доказательства теоремы 3.1 надо лишь заметить, что при $r \to 0$ функция $M(r)$ не возрастает.

Оценим решения задачи (1.3), (1.4) снизу.

Теорема 3.2. *Пусть* $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$ *и* $s \geqslant m$ *не является полуцелым* ($s \neq m+1/2, m+3/2, \dots$). *Тогда при любой ненулевой функции* $g \in H_v^s(-h,0)$ *для решения задачи* (1.3), (1.4) *справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^s(T-h,T)} \geqslant ce^{\varkappa - T}, \quad c = c(g) > 0, \ T > 0, \tag{3.23}$$

с постоянной $c(g)$, *зависящей от функции* g.

Доказательство. Для любого q в силу (3.16), (3.17) справедливо неравенство

$$\|g\|_{H^s(-h,0)} \geqslant d_0 \|\psi_q\|_{H^s(-h,0)}.$$

Возьмем q такое, что $\psi_q \neq 0$, и обозначим через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ точки, входящие в Λ^q с кратностями $\nu_1, \dots, \nu_N$. Разложим ψ_q по экспоненциальным решениям:

$$\psi_q(t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{r=1}^{\nu_j} c_{jr} t^{r-1} e^{\xi_j t}, \quad t \in [-h, 0]. \tag{3.24}$$

Оставим в (3.24) только ненулевые слагаемые и пронумеруем действительные части $\operatorname{Re} \xi_j$ в возрастающем порядке:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_R.$$

Обозначим через β_{jr}, $r = 1, 2, \dots, \gamma_j$, мнимые части точек из $\Lambda^{(q)}$ с действительной частью α_j. Кратность точки $\alpha_j + i\beta_{jr}$ обозначим через ν_{jr}. Теперь запишем сумму (3.24), выделив слагаемые с одинаковой действительной частью $\operatorname{Re} \lambda = \alpha_j$:

$$\psi_q(t) = \sum_{j=1}^{R} \sum_{r=1}^{\gamma_j} \sum_{n=1}^{\nu_{jr}} c_{jrn} t^{n-1} e^{i\beta_{jr}} e^{\alpha_j t}.$$

В последнем выражении выделим главную часть (при $t \to +\infty$) с $\sigma := \max \alpha_j = \alpha_R$ и среди них — со старшей степенью $l = \max_j \nu_{j,R}$:

$$u(t) = t^l e^{\sigma t} \sum_{r=1}^{\gamma_R} c_{jr} e^{i\beta_{Rr} t} + u_1(t),$$

где в $u_1(t)$ входят слагаемые с меньшей действительной частью α_j или, при той же действительной части α_R, с меньшей степенью t. Для $u_1(t)$ очевидны оценки

$$|u_1(t)| \prec t^{l-1}e^{\sigma t}.$$

Из этих соображений нетрудно получить утверждение теоремы, если воспользоваться следующей леммой.

Лемма 3.3. *Пусть постоянные $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, I$, различны. Тогда равномерно по T справедливо неравенство*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{I} c_j e^{j\beta_j t} \Big\|_{H^s(T-h,T)} \geqslant c(s, q, \beta_1, \ldots, \beta_I) \Big(\sum_{j=1}^{I} |c_j|^2 \Big)^{1/2}.$$

Доказательство леммы 3.3 основано на соображениях компактности. Положим

$$Q(d_1, d_2, \ldots, d_I) := \Big\| \sum_{j=1}^{I} d_j e^{i\beta_j t} \Big\|_{H^s(-h,0)}$$

и рассмотрим функцию Q на сфере $d_1^2 + \cdots + d_I^2 = 1$. Эта функция непрерывна и достигает положительного минимума $Q_{\min}$ на этом компакте в силу того, что функции $e^{i\beta_j t}$ линейно независимы. Тогда при всех R

$$\Big\| \sum_{j=1}^{I} d_j e^{i\beta_j t} \Big\|_{H^s(R-h,R)} \geqslant Q_{\min},$$

поскольку

$$\sum_{j=1}^{I} d_j e^{i\beta_j (t+R)} = \sum_{1}^{I} e^{i\beta_j R} d_j e^{j\beta_j t} = \sum_{1}^{I} \widetilde{d}_j e^{j\beta_j t}$$

и $|\widetilde{d}_j| = |d_j|$. Лемма 3.3 доказана. •

В оценке (3.23) величину $c(g)$ нельзя, вообще говоря, заменить на $c\|g\|$:

$$\inf_{g} \lim_{T\to\infty} e^{\varkappa - T} \frac{\|u\|_{H^s(T-h,T)}}{\|g\|_{H^s(T-h,T)}} = 0.$$

Приведем пример для пространства $L^2(-h,0)$. Соответствующие рассмотрения в пространстве H^s проводятся аналогично.

Пусть Λ содержит пары

$$\{in, in+\delta_n\}_{n\in Z},$$

где $\delta_n \to 0$. Возьмем последовательность начальных функций $g_m(t) := e^{imt} + e^{i(m+\delta_n)t}$. Тогда

$$\|g_m\|_{L^2(-h,0)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 2\sqrt{h}$$

и при $T = T_m = \pi/\delta_m$

$$\|u_m\|^2_{L^2(T_m-h,T_m)} = \int_{-h}^{0} |1 - e^{i\delta_m t}|^2 dt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\inf_m \frac{\|u_m\|_{L^2(T_m-h,T_m)}}{\|g_m\|_{L^2(-h,0)}} = 0.$$

Предложение 3.1. *Пусть* $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$, $s \geqslant m$ *не является полуцелым* ($s \neq m + 1/2, m + 3/2, \dots$) *и нули функции* L *просты и отделимы. Тогда в оценке* (3.23) *величину* $c(g)$ *можно заменить на* $c\|g\|$.

Действительно, в этом случае, представив функцию g в виде

$$g(t) = \sum_{\lambda_q\in\Lambda} c_q e^{\lambda_q t},$$

получаем

$$u(t) = \sum_{\lambda_q\in\Lambda} c_q e^{\lambda_q t} = \sum_{\lambda_q\in\Lambda} c_q e^{\lambda_q T} e^{\lambda_q(t-T)}$$

и

$$\|u\|^2_{H^s(T-h,T)} \asymp \sum_{\lambda_q\in\Lambda} |c_q e^{\lambda_q T}|^2 \geqslant e^{2\varkappa - T} \sum_{\lambda_q\in\Lambda} |c_q|^2 \asymp e^{2\varkappa - T}\|g\|^2_{H^s(-h,0)}.$$

Замечание 3.2. Оценки (3.15), (3.23) являются неулучшаемыми. В самом деле, в работе [28] приводится пример уравнения с квазимногочленом $l(\lambda) = \lambda + a - e^{-\lambda}(\lambda - a)$, имеющим чисто мнимые и простые корни. Из оценок (3.15), (3.23) вытекает, что величина $\|u\|_{H^s(T-h,T)}$ равномерно ограничена сверху и снизу при всех $T > 0$. Таким образом, в (3.15), (3.23) $\varkappa_+$, $\varkappa_-$ нельзя заменить соответственно на $(\varkappa_+ - \varepsilon)$, $(\varkappa_- + \varepsilon)$ ни при каком $\varepsilon > 0$.

В заключение укажем, каким образом свойства семейства V могут быть связаны со спектральными вопросами для дифференциальных операторов.

Изучение полноты, минимальности и базисности семейства V экспоненциальных решений тесно связано с изучением оператора дифференцирования с многоточечными условиями. Поясним это в случае целочисленных s. Введем в рассмотрение оператор $\mathbb{D}g = \dfrac{d}{dt}g(t)$, $t \in (-h, 0)$, с областью определения $\mathrm{Dom}(\mathbb{D})$, состоящей из функций, принадлежащих пространству $H^s[-h, 0]$ и удовлетворяющих условиям согласования (1.5) при $s \geqslant m + 1$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что семейство экспоненциальных решений уравнения (1.3) является семейством собственных и присоединенных функций оператора $\mathbb{D}$, отвечающих собственным значениям λ_q. В соответствии с этим приведенные в данной работе результаты о полноте, минимальности и базисности Рисса семейства экспоненциальных решений допускают естественную переформулировку как соответствующие результаты о полноте, минимальности и базисности Рисса семейства собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования $\mathbb{D}$ с многоточечными условиями вида (1.5).

Здесь уместно подчеркнуть, что доказательство результатов о базисности Рисса подпространств было установлено первым автором в [16, 17] (для векторного случая при $m = 1$) именно на основании изучения резольвенты оператора $\mathbb{D}$.

Отметим, что спектральным анализом оператора дифференцирования $\mathbb{D}$ в несколько иных пространствах (в основном, в L^p и C) занимался ряд авторов. Ограничимся здесь указанием обстоятельного обзора А. М. Седлецкого [26] (там же см. соответствующую библиографию).

В свою очередь, изучение оператора дифференцирования в шкале пространств Соболева с целочисленным индексом s может быть связано с изучением оператора дифференцирования $\mathbb{D}$ со спектральным параметром в граничных условиях. Так, в работе [25] изучался случай дифференциальных операторов n-го порядка со спектральным параметром в граничных условиях. Методы этой работы также могут быть применены к изучению безусловной базисности подпространств $\mathcal{L}^{(p)}$ в пространстве H^m.

Уместно отметить также, что, по мнению авторов, изучение базисности и получение оценок решений в векторном случае в шкале пространств Соболева с произвольным вещественным индексом являются актуальной и заслуживающей внимания задачей.

Список литературы

[1] Авдонин С. А., Иванов С. А., *Базисы Рисса из экспонент и разделенных разностей*, Алгебра и анализ **13** (2001), №3, 1–17.

[2] Васюнин В. И., *Безусловно сходящиеся спектральные разложения и задачи интерполяции*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **130** (1978), 5–49.

[3] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.

[4] Khrushchev S. V., Nikol'skiĭ N. K., Pavlov B. S., *Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels*, Complex Analysis and Spectral Theory (Leningrad, 1979/1980), Lecture Notes in Math., vol. 864, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981, pp. 214–335.

[5] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.

[6] Ivanov S. A., Kalton N., *Interpolation of subspaces and applications to exponential bases*, Алгебра и анализ **13** (2001), №2, 93–115.

[7] Власов В. В., *Об одном классе дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа*, Изв. вузов. Мат. **1999**, №2, 20–29.

[8] Власов В. В., *О свойствах системы экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева*, Изв. вузов. Мат. **2001**, №6, 23–29.

[9] Власов В. В., Иванов С. А., *Базисность и оценки решений уравнений с последействием в шкале пространств Соболева*, Успехи мат. наук **56** (2001), №3, 151–152.

[10] Беллман Р., Кук К., *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967.

[11] Павлов Б. С., *Базисность системы экспонент и условие Макенхаупта*, Докл. АН СССР **247** (1979), №1, 37–40.

[12] Шилов Г. Е., *Математический анализ. Второй спецкурс*, Наука, М., 1965.

[13] Levinson N., *Gap and density theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 26, Amer. Math. Soc., New York, 1940.

[14] Henry D., *Linear autonomous neutral functional differential equations*, J. Differential Equations **15** (1974), 106–128.

[15] Хейл Дж., *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.

[16] Власов В. В., *Об оценках решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа*, Изв. вузов. Мат. **2000**, №4, 14–22.

[17] Власов В. В., *О базисности экспоненциальных решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева*, Докл. РАН **381** (2001), №3, 302–304.

[18] Verduyn Lunel S. M., *Series expansions and small solutions for Volterra equations of convolution type*, J. Differential Equations **85** (1990), no. 1, 17–53.

[19] Delfour M. C., Manitius A., *The structural operator F and its role in the theory of retarded systems*. II, J. Math. Anal. Appl. **74** (1980), 359–381.

[20] Verduyn Lunel S. M., Yakubovich D. V., *A functional model approach to linear neutral functional-differential equations*, Integral Equations Operator Theory **27** (1997), no. 3, 347–378.

[21] Levinson N., McCalla C., *Completeness and independence of the exponential solutions of some functional differential equations*, Stud. Appl. Math. **53** (1974), 1–15.

[22] Russell D., *On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval*, J. Math. Anal. Appl. **87** (1982), no. 2, 528–550.

[23] Левин Б. Я., *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.

[24] Левин Б. Я., *О базисах показательных функций в* L^2, Учен. зап. Харьков. ун-та **115** (1961) (Зап. мат. отд. физ.-мат. фак-та Харьков. ун-та и Харьков. мат. о-ва. Сер. 4 **27** (1961)), 39–48.

[25] Шкаликов А. А., *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях*, Тр. семин. им. И. Г. Петровского **9** (1983), 190–229.

[26] Седлецкий А. М., *Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси*, Успехи мат. наук **37** (1982), №5, 51–95.

[27] Власов В. В., Иванов С. А., *Оценки решений уравнений с последействием в пространствах Соболева и базис из разделенных разностей*, Мат. заметки **72** (2002), №2, 303–306.

[28] Громова П. С., Зверкин А. М., *О тригонометрических рядах, суммой которых является непрерывная неограниченная на числовой оси функция - решение уравнения с отклоняющимся аргументом*, Дифференц. уравнения **4** (1968), №10, 1774–1784.

Поступило 18 февраля 2003 г.

Московский
государственный университет
119992 Москва, Воробьевы горы
E-mail: vlasov@math.mipt.ru vvvlasov2002@mail.ru

С. Петербургский
государственный университет
Российский центр лазерной физики
198904 Санкт-Петербург
Петродворец, Ульяновская, 1
E-mail: Sergei.Ivanov@pobox.spbu.ru