А. Н. Зиновьев, Обобщенные формулы Артина–Хассе и Ивасавы для символа Гильберта в многомерном полном поле. II,
*Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2005, том 321, 183–196

https://www.mathnet.ru/znsl412

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 321, 2005 г.

**А. Н. Зиновьев**

# ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ АРТИНА–ХАССЕ И ИВАСАВЫ ДЛЯ СИМВОЛА ГИЛЬБЕРТА В МНОГОМЕРНОМ ПОЛНОМ ПОЛЕ. II

## Введение

Данная работа представляет собой непосредственное продолжение работы [1], в которой для обобщенного символа Гильберта в многомерном полном поле смешанной характеристики из явной формулы Востокова, принадлежащей к куммерову типу явных законов взаимности, были выведены обобщенные формулы Артина–Хассе и Ивасавы, которые принадлежат к другой ветви явных формул типа Артина–Хассе. В настоящей работе рассматривается обобщенный символ Гильберта на многомерном полном поле нулевой характеристики, первое поле вычетов которого также имеет характеристику 0. В этой ситуации в многомерном полном поле содержится подполе смешанной характеристики. В работе [3] с помощью спуска в данное подполе построено явное спаривание Востокова и доказано, что оно совпадает с обобщенным символом Гильберта. Используя идею спуска в подполе смешанной характеристики, мы выводим в настоящей работе из обобщенных формул Артина–Хассе и Ивасавы, доказанных в [1], соответствующие явные законы взаимности в общем случае многомерного полного поля характеристики 0 с совершенным, не алгебраически $p$-замкнутым последним полем вычетов характеристики $p > 2$.

В разделе 1 мы напоминаем определение явного спаривания Востокова на топологических $K$-группах Милнора многомерного полного поля с первым полем вычетов характеристики 0 и формулируем теорему 1.1 Востокова, которая утверждает, что данное спаривание задает явную формулу для обобщенного символа Гильберта, возникающего из высшей локальной теории полей $p$-классов Фесенко, построенной в работе [6].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ Nos. 04-01-00082a и 03-01-00633a.

В разделе 2 строится многомерный аналог кругового поля $\mathbb{Q}_p(\zeta)$, и для него в теореме 2.1 доказываются обобщенные формулы Артина–Хассе. В разделе 3, используя идею работы [3] о спуске в подполе смешанной характеристики, мы строим многомерную логарифмическую производную Ивасавы. И с ее помощью формулируем и выводим в теореме 3.1 обобщенную формулу Ивасавы из соответствующей явной формулы Ивасавы для многомерного полного поля смешанной характеристики ([1, теорема 2.2]).

## Терминология и обозначения

На протяжении всей работы мы будем использовать следующие обозначения:

• $p$ – фиксированное простое число, всюду предполагаем $p \neq 2$;

• $\zeta := \zeta_{p^m}$ – фиксированный первообразный корень степени $p^m$ из 1, $m \geqslant 1$;

• $\mu_{p^m}$ – циклическая группа, порожденная $\zeta$;

• $K$ – $n$-мерное полное поле характеристики 0, т.е. поле, для которого задана цепочка полей $K^{(n)} = K$, $K^{(n-1)}$, …, $K^{(0)}$, таких, что $K^{(i+1)}$ – полное дискретно нормированное поле с полем вычетов $K^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, а $K^{(0)}$ – совершенное поле характеристики $p$.

*Всюду предполагается, что $K$ содержит $\mu_{p^m}$. В настоящей работе предполагается, что* $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(K^{(n-1)}) = 0$*. Тогда для некоторого $1 \leqslant s \leqslant n-1$ поле $K^{(s)}$ является $s$-мерным полным полем смешанной характеристики, т.е.* $\mathrm{char}(K^{(s)}) = 0$*, а* $\mathrm{char}(K^{(s-1)}) = p$*.*

• $F = K^{(0)}$ – последнее поле вычетов поля $K$ (и поля $K^{(s)}$);

• $t_1, \dots, t_n$ – фиксированная система локальных параметров поля $K$ (подъемы простых элементов полей вычетов $K^{(i)}$ в $K$);

• $\overline{v}_K = (v_1, \dots, v_n) : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ – нормирование ранга $n$ на поле $K$, соответствующее системе локальных параметров $t_1$, …, $t_n$, при этом группа $\mathbb{Z}^n$ упорядочена лексикографически в следующем смысле: $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n) \leqslant \overline{b} = (b_1, \dots, b_n)$, если $a_l \leqslant b_l$, $a_{l+1} = b_{l+1}$, …, $a_n = b_n$ при некотором $l \leqslant n$;

• $V_K$ – группа главных единиц поля $K$ относительно нормирования ранга $n$; соответственно, $V_{K^{(s)}}$ – группа главных единиц поля $K^{(s)}$ относительно нормирования ранга $s$;

• $K_r^{\mathrm{top}}(K)$ $(VK_r^{\mathrm{top}}(K))$ – $r$-ая топологическая $K$-группа Милнора поля $K$, определение см. в [5];

• $P_{K^{(s)}}(i) = \{\alpha \in K^{(s)} \mid v_{K^{(s)}}(\alpha) \geqslant i\}$, $i \in \mathbb{Z}$, где $v_{K^{(s)}}$ – нормализованное дискретное нормирование на $K^{(s)}$;

• $U_{K^{(s)}}(i) := 1 + P_{K^{(s)}}(i)$ – подгруппа $V_{K^{(s)}}$ при $i > 0$;

• $k_0 \subset K^{(s)}$ – поле частных кольца векторов Витта $\mathrm{W}(F)$; как известно, $k_0$ – абсолютно неразветвленное полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с совершенным полем вычетов $F$;

• $\mathfrak{o}_0$ – кольцо целых $k_0$, т.е. $\mathfrak{o}_0 = \mathrm{W}(F)$;

• $\varphi$ – автоморфизм Фробениуса поля $k_0$;

• $\wp : \mathfrak{o}_0 \longrightarrow \mathfrak{o}_0$ – оператор Картье, заданный равенством $\wp(\alpha) = \varphi(\alpha) - \alpha$, $\alpha \in \mathfrak{o}_0$.

Для $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}_0$ сравнение $\alpha \equiv \beta \mod (\wp, p^m)$ в кольце $\mathfrak{o}_0$ означает, что существует $\gamma \in \mathfrak{o}_0$, такой, что $\alpha \equiv \beta + \wp(\gamma) \mod p^m$.

На $s$-мерном полном поле смешанной характеристики $K^{(s)}$ вводится каноническая топология Паршина, которая учитывает топологии полей вычетов. Ее определение и основные свойства можно найти в работе [4]. Напомним, что на поле $K$ многомерная топология Паршина определяется индукцией по размерности с помощью следующей конструкции.

Пусть $K = k((t))$. Предположим, что топология на $k$ уже определена. Пусть $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ – семейство окрестностей нуля в $k$, таких, что $U_i = k$ при достаточно больших $i$. Обозначим $U_{\{U_i\}} = \{\sum_{i>>-\infty}^{+\infty} a_i t^i \mid a_i \in U_i\}$. Тогда все множества $U_{\{U_i\}}$ образуют базу окрестностей нуля в топологии Паршина на $K$.

Поскольку, очевидно, $K = K^{(s)}((t_{s+1}))\dots((t_n))$, мы можем с помощью данной конструкции определить топологию на $K$. Заметим, что эта топология зависит от выбора вложений $K^{(i)}$ в кольца целых $\mathfrak{O}_{K^{(i+1)}}$ полей $K^{(i+1)}$ относительно дискретных нормирований для $s \leqslant i \leqslant n-1$.

На мультипликативной группе $(K^{(s)})^*$ поля $K^{(s)}$ также вводится топология Паршина, определение которой дано в [4]. Для поля $K$ топология Паршина на $K^*$ определяется следующим образом. Так как $K = K^{(s)}((t_{s+1}))\dots((t_n))$, легко видеть, что

$$K^* \simeq (K^{(s)})^* \times W_K \times \langle t_{s+1}\rangle \times \dots \times \langle t_n\rangle, \qquad (1)$$

где

$$W_K := \{\alpha \in K^* \mid (v_{s+1}(\alpha-1),\dots,v_n(\alpha-1)) \geqslant (1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-s-1}) \text{ в } \mathbb{Z}^{n-s}\}$$

– подгруппа $V_K$, которая однозначно делима. Топология Паршина на $K^*$ определяется как произведение топологии Паршина на $(K^{(s)})^*$, тривиальной топологии на $W_K$ и дискретной топологии на $\langle t_{s+1}\rangle \times \ldots \times \langle t_n\rangle$. Пересечение всех окрестностей единицы в $K^*$ равно $W_K$. Эта топология корректно определена.

Подмножество $I \subset \mathbb{Z}^n$ называется допустимым, если для любого $1 \leqslant l \leqslant n$ и любого набора $j_{l+1},\dots,j_n$ существует $i = i(j_{l+1},\dots,j_n) \in \mathbb{Z}$, такое, что

$$(i_1,\dots,i_n) \in I,\ i_{l+1} = j_{l+1},\dots,i_n = j_n \Longrightarrow i_l \geqslant i.$$

## 1. Явная формула Востокова для обобщенного символа Гильберта

Для определения обобщенного символа Гильберта в многомерном полном поле требуется понятие примарного элемента. Напомним, что $\omega \in K^*$ называется $p^m$-примарным или для краткости примарным, если расширение $K(\sqrt[p^m]{\omega})/K$ чисто неразветвлено (т.е. получается за счет расширения последних полей вычетов). Легко видеть, что примарные элементы поля $K$ образуют подгруппу в $K^*$, которую мы обозначаем $\Omega_K$. Она, очевидно, содержит $(K^*)^{p^m}$. Обозначим $\Omega_{K,m} = \Omega_K/(K^*)^{p^m}$. Для $\alpha, \beta \in \Omega_K$ мы пишем $\alpha \approx \beta$, если $\alpha/\beta \in (K^*)^{p^m}$. Ввиду (1), так как группа $W_K$ однозначно делима, для любого $\omega \in \Omega_K$ существует $\omega' \in \Omega_{K^{(s)}}$ примарный элемент поля $K^{(s)} \subset K$, такой, что $\omega \approx \omega'$. Тем самым $\Omega_{K,m} \simeq \Omega_{K^{(s)},m}$, где $\Omega_{K^{(s)},m} = \Omega_{K^{(s)}}/((K^{(s)})^*)^{p^m}$.

В работе [2] было дано явное описание группы $\Omega_{K^{(s)},m}$, которое мы использовали в [1]. Напомним, что имеет место изоморфизм

$$\psi : \mathfrak{o}_0/(p^m\mathfrak{o}_0 + \wp(\mathfrak{o}_0)) \xrightarrow{\sim} \Omega_{K^{(s)},m}, \quad \overline{a} \longmapsto \omega(a), \tag{2}$$

где $\overline{a}$ – это вычет элемента $a \in \mathfrak{o}_0$, а примарный элемент $\omega(a)$ определен, как в [1, предложение 1.1].

В случае, когда последнее поле вычетов $K$ конечно, характер $\chi : \Omega_{K^{(s)},m} \longrightarrow \mu_{p^m}$, заданный по формуле

$$\chi(\omega(a)) = \zeta^{\mathrm{Tr}_{k_0/\mathbb{Q}_p}(a)}, \quad a \in \mathfrak{o}_0, \tag{3}$$

является изоморфизмом.

В работе [1, раздел 1] мы приводили определение обобщенного символа Гильберта для многомерных полных полей, возникающее из высшей локальной теории полей $p$-классов Фесенко, данное в работе [6]. Для полноты изложения очень кратко напомним, что если последнее поле вычетов $F$ поля $K$ дополнительно предполагается не алгебраически $p$-замкнутым, т.е. оно имеет нетривиальные $p$-расширения, то теория Фесенко позволяет определить *обобщенный символ Гильберта* как спаривание

$$( \, , \, )_m : VK_n^{\mathrm{top}}(K)/p^m VK_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^*/(K^*)^{p^m} \longrightarrow \Omega_{K,m} \simeq \Omega_{K^{(s)},m}.$$

В частном случае конечного последнего поля вычетов $F$ высшая локальная теория полей классов Като позволяет дать альтернативное определение обобщенного символа Гильберта как спаривания

$$( \, , \, )_m : K_n^{\mathrm{top}}(K)/p^m K_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^*/(K^*)^{p^m} \longrightarrow \mu_{p^m} \tag{4}$$

(см. определение в [1, раздел 1]). И хотя мы обозначаем данное спаривание так же, как и обобщенный символ Гильберта для совершенного последнего поля вычетов, из контекста всегда будет ясно, о каком спаривании идет речь. Эти спаривания связаны естественным образом, а именно сужение спаривания (4) на $VK_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^*$ совпадает со сквозным отображением

$$VK_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^* \xrightarrow{( \, , \, )_m} \Omega_{K,m} \simeq \Omega_{K^{(s)},m} \xrightarrow{\overset{\chi}{\sim}} \mu_{p^m}, \tag{5}$$

где изоморфизм $\chi$ определен равенством (3).

В работе [2] было построено явное спаривание Востокова на топологических $K$-группах Милнора многомерного полного поля смешанной характеристики. В [1, раздел 1] мы привели конструкцию явного спаривания Востокова

$$[ \, , \dots , \, ]_{m,K^{(s)}} : ((K^{(s)})^*)^{n+1} \longrightarrow \mathfrak{o}_0/(p^m \mathfrak{o}_0 + \wp(\mathfrak{o}_0)) \tag{6}$$

для поля смешанной характеристики $K^{(s)}$.

В работе [3] с помощью спуска в подполе смешанной характеристики $K^{(s)}$ было построено явное спаривание Востокова на многомерном полном поле $K$, первое поле вычетов которого также имеет характеристику 0. Напомним здесь эту конструкцию.

Так как $K = K^{(s)}((t_{s+1}))\dots((t_n))$, любой элемент может быть однозначно представлен в виде

$$\alpha = \sum_{\overline{r}\in I} a_{\overline{r}} t_{s+1}^{r_{s+1}} \dots t_n^{r_n}, \quad \text{где} \quad a_{\overline{r}} \in K^{(s)},$$

а $\overline{r} = (r_{s+1}, \dots, r_n)$ пробегает допустимое подмножество $I$ в $\mathbb{Z}^{n-s}$. Пусть $\overline{r}_0 \in I$ – минимальный индекс в $I$ относительно лексикографического порядка на $\mathbb{Z}^{n-s}$. Так как $a_{\overline{r}_0}$ однозначно определен выбором локальных параметров $t_{s+1}, \dots, t_n$, мы получаем (неканонический) гомоморфизм

$$\begin{aligned} \tau : K^* &\longrightarrow (K^{(s)})^*, \\ \alpha &\longmapsto a_{\overline{r}_0}. \end{aligned}$$

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_{n-s}\}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_{n-s} \leqslant n+1$, – множество индексов. Для $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K^*$ положим

$$\Delta_I = \begin{vmatrix} v_{s+1}(\alpha_{i_1}) & \dots & v_n(\alpha_{i_1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{s+1}(\alpha_{i_{n-s}}) & \dots & v_n(\alpha_{i_{n-s}}) \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где $\overline{v}_K = (v_1, \dots, v_n)$ – нормирование ранга $n$ на $K$, соответствующее системе локальных параметров $t_1, \dots, t_n$.

Определим отображение

$$[\,,\dots,\,]_m = [\,,\dots,\,]_{m,K} : (K^*)^{n+1} \longrightarrow \mathfrak{o}_0/(p^m\mathfrak{o}_0 + \wp(\mathfrak{o}_0))$$

по формуле

$$\begin{aligned} &[\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}]_{m,K} \\ &= (-1)^{\frac{(n-s)(n+s+1)}{2}} \sum_I (-1)^{i_1+\dots+i_{n-s}} \Delta_I [\tau(\alpha_{j_1}), \dots, \tau(\alpha_{j_{s+1}})]_{m,K^{(s)}}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\{i_1, \dots, i_{n-s}\} \cup \{j_1, \dots, j_{s+1}\} = \{1, 2, \dots, n+1\}$, $j_1 < \dots < j_{s+1}$, а определение отображения $[\,,\dots,\,]_{m,K^{(s)}}$ из формулы (6) для поля смешанной характеристики $K^{(s)}$ можно найти в [2, §4] или [1, раздел 1].

В [3, предложение 2.6] доказано, что данное спаривание корректно определено, мультипликативно по всем аргументам и удовлетворяет соотношению Стейнберга. Нетрудно также убедиться, что оно секвенциально непрерывно по всем аргументам, если на $K^*$ введена топология Паршина, а на $\mathfrak{o}_0/(p^m\mathfrak{o}_0+\wp(\mathfrak{o}_0))$ – дискретная топология.

Для $1 \leqslant l \leqslant n$ из сформулированных выше свойств $[\,,\dots,\,]_{m,K}$ следует, что данное спаривание индуцирует спаривание $\langle\,,\,\rangle^{(l)}_{m,K}$ на топологических $K$-группах Милнора

$$\langle\,,\,\rangle^{(l)}_{m,K} : K_l^{\mathrm{top}}(K)/p^m K_l^{\mathrm{top}}(K) \times K_{n+1-l}^{\mathrm{top}}(K)/p^m K_{n+1-l}^{\mathrm{top}}(K) \longrightarrow \Omega_{m,K} \simeq \Omega_{m,K^{(s)}},$$

такое, что для символов $\alpha = \{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$, $\beta = \{\beta_1,\dots,\beta_{n+1-l}\}$ справедливо $\langle\alpha,\beta\rangle^{(l)}_{m,K} = \psi([\alpha_1,\dots,\alpha_l,\beta_1,\dots,\beta_{n+1-l}]_{m,K})$, где изоморфизм $\psi$ определен по формуле (2). Обозначим

$$\begin{aligned}\langle\,,\,\rangle_m &= \langle\,,\,\rangle_{m,K}\\ &:= \langle\,,\,\rangle^{(n)}_{m,K} : K_n^{\mathrm{top}}(K)/p^m K_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^*/(K^*)^{p^m}\\ &\qquad\longrightarrow \Omega_{m,K} \simeq \Omega_{m,K^{(s)}}.\end{aligned}$$

Данное спаривание называется *явным спариванием Востокова.* В случае конечного последнего поля вычетов $K$ явное спаривание Востокова $\langle\,,\,\rangle_{m,K}$ определяется как композиция построенного выше спаривания и изоморфизма $\chi$, заданного по формуле (3).

**Теорема 1.1 (Востоков).** *Для обобщенного символа Гильберта имеет место явная формула*

$$(\alpha,\beta)_m \approx \langle\alpha,\beta\rangle_m, \tag{9}$$

*где $\alpha \in VK_n^{\mathrm{top}}(K)$, $\beta \in K^*$.*

*Более того, если последнее поле вычетов $K$ конечно, то справедлива явная формула*

$$(\alpha,\beta)_m = \langle\alpha,\beta\rangle_m, \tag{10}$$

*где $\alpha \in K_n^{\mathrm{top}}(K)$, $\beta \in K^*$.*

**Доказательство.** См. [3, теорема 4.4]. □

## 2. Обобщенные формулы Артина–Хассе

С данного момента и до конца работы зафиксируем следующие обозначения. Пусть $F$ – совершенное поле характеристики $p$. Мы предполагаем, что $F$ не является алгебраически $p$-замкнутым. Как и выше, обозначим $k_0 = \operatorname{Quot} \mathrm{W}(F)$, $\mathfrak{o}_0 = \mathrm{W}(F)$. Обозначим

$$k = k_0\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{s-1}\}\}((t_{s+1}))\dots((t_n)), \quad \text{где} \quad 1 \leqslant s \leqslant n-1.$$

Очевидно, $k$ – стандартное абсолютно неразветвленное $n$-мерное полное поле с последним полем вычетов $F$. Ясно, что $\operatorname{char}(k) = \operatorname{char}(k^{(s)}) = 0$, а $\operatorname{char}(k^{(s-1)}) = p$. Пусть $K = k(\zeta)$ – круговое расширение $k$. В рассматриваемом случае поле $K$ будет служить многомерным аналогом кругового поля $\mathbb{Q}_p(\zeta)$. Имеем

$$K = k_0(\zeta)\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{s-1}\}\}((t_{s+1}))\dots((t_n)).$$

Очевидно, $K^{(s)} = k^{(s)}(\zeta) = k_0(\zeta)\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{s-1}\}\}$ смешанной характеристики. Пусть $\lambda := 1-\zeta$ обозначает простой элемент $K^{(s)}$. В качестве системы локальных параметров $K$ фиксируем $t_1, \dots, t_{s-1}, t_s = \lambda, t_{s+1}, \dots, t_n$.

Напомним, что в работе [1] для того, чтобы сформулировать обобщенные формулы Артина–Хассе и Ивасавы, мы ввели отображение обобщенного следа $R_{K^{(s)}/k_0}$, которое строится следующим образом. Для полного дискретно нормированного поля $L$ определим отображение

$$c_{L\{\{X\}\}/L} \longrightarrow L$$

по формуле $c_{L\{\{X\}\}/L}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i\right) := a_0$. Так как $K^{(s)} = K_0\{\{t_1\}\} \dots\{\{t_{s-1}\}\}$, где мы обозначили $K_0 = k_0(\zeta)$, то можно определить $c_{K^{(s)}/K_0}$ как композицию

$$c_{K^{(s)}/K_0} = c_{K_0\{\{t_1\}\}/K_0} \circ \dots \circ c_{K^{(s)}/K_0\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{s-2}\}\}}.$$

Тогда обобщенный след определяется как композиция $R_{K^{(s)}/k_0} = \operatorname{Tr}_{K_0/k_0} \circ c_{K^{(s)}/K_0}$. Напомним, что $R_{K^{(s)}/k_0}$ $k_0$-линеен и непрерывен.

**Теорема 2.1.** *Пусть $\alpha \in V_K$ такой, что $\tau(\alpha) \in U_{K^{(s)}}(p^{m-1}+1)$.*

*Справедливы обобщенные формулы Артина–Хассе:*

$$(\{\alpha, t_1, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_n\}, \zeta)_m \approx \omega\left((-1)^s \frac{1}{p^m} R_{K^{(s)}/k_0}\big(\log(\tau(\alpha))\big)\right), \tag{11}$$

$$(\{\alpha, t_1, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_n\}, \lambda)_m \approx \omega\left((-1)^{s+1} \frac{1}{p^m} R_{K^{(s)}/k_0}\left(\frac{\zeta}{\lambda}\log(\tau(\alpha))\right)\right). \tag{12}$$

**Доказательство.** Проверим (12). По теореме 1.1 и определению спаривания $\langle\, ,\, \rangle_{m,K}$ имеем

$$\begin{aligned}(\{\alpha, t_1, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_n\}, \lambda)_m &\approx \langle\{\alpha, t_1, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_n\}, \lambda\rangle_{m,K} \\ &= \psi([\alpha, t_1, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_n, \lambda]_{m,K}) =: \gamma,\end{aligned}$$

где изоморфизм $\psi$ задан формулой (2), а $[\,, \dots,\, ]_{m,K}$ определено в (8). Вычислим значение спаривания

$$[\alpha, t_1, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_n, \lambda]_{m,K}$$

по формуле (8). Заметим, что локальные параметры $t_{s+1}, \dots,$ $t_n$ – это $(s+1)$-ый, ..., $n$-ый аргументы данного спаривания соответственно. Так как $\tau(t_{s+1}) = \ldots = \tau(t_n) = 1$, слагаемое суммы (8), которое соответствует $I = \{i_1, \dots, i_{n-s}\}$, сравнимо с 0 по $\mod(\wp, p^m)$, если по крайней мере одно из натуральных чисел $s+1$, ..., $n$ принадлежит соответствующему множеству $\{j_1, \dots, j_{s+1}\}$ (мы используем то, что $[\dots, 1, \dots]_{m,K^{(s)}} \equiv 0$ $\mod(\wp, p^m)$ и $\Delta_I \in \mathbb{Z}$). Поэтому у нас имеется лишь одно, возможно, ненулевое слагаемое в (8), которое соответствует $I = \{s+1, \dots, n\}$ и $\{j_1, \dots, j_{s+1}\} = \{1, \dots, s, n+1\}$. Напомним, что, согласно обобщенной формуле Артина–Хассе в случае смешанной характеристики (см. формулу (17) в доказательстве [1, теорема 2.1]), для $a \in U_{K^{(s)}}(p^{m-1}+1)$ справедлива формула

$$\big\langle\{a, t_1, \dots, t_{s-1}\}, \lambda\big\rangle_{m,K^{(s)}} \approx \omega\left((-1)^{s+1} \frac{1}{p^m} R_{K^{(s)}/k_0}\left(\frac{\zeta}{\lambda}\log(a)\right)\right).$$

Используя данную формулу и то, что $\tau(a) = a$ для $a \in K^{(s)}$, поскольку $\tau(\alpha) \in U_{K^{(s)}}(p^{m-1}+1)$, получаем

$$\begin{aligned}\gamma &= \psi\Big((-1)^{\frac{(n-s)(n+s+1)}{2}}(-1)^{(s+1)+\dots+n}[\tau(\alpha), t_1, \dots, t_{s-1}, \lambda]_{m,K^{(s)}}\Big)\\ &= \langle\{\tau(\alpha), t_1, \dots, t_{s-1}\}, \lambda\rangle_{m,K^{(s)}}\\ &\approx \omega\left((-1)^{s+1}\frac{1}{p^m}R_{K^{(s)}/k_0}\left(\frac{\zeta}{\lambda}\log(\tau(\alpha))\right)\right).\end{aligned}$$

(11) доказывается аналогично. □

**Следствие 2.1.** *Предположим, что последнее поле вычетов $K$ конечно. Пусть $\alpha \in V_K$ такой, что $\tau(\alpha) \in U_{K^{(s)}}(1)$. Справедливы обобщенные формулы Артина–Хассе:*

$$(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \zeta, t_{s+1}, \dots, t_n\}, \alpha)_m = \zeta^{\frac{1}{p^m}R_{K^{(s)}/\mathbb{Q}_p}(\log(\tau(\alpha)))}, \tag{13}$$

$$(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \lambda, t_{s+1}, \dots, t_n\}, \alpha)_m = \zeta^{-\frac{1}{p^m}R_{K^{(s)}/\mathbb{Q}_p}\left(\frac{\zeta}{\lambda}\log(\tau(\alpha))\right)}, \tag{14}$$

*где* $R_{K^{(s)}/\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Tr}_{k_0/\mathbb{Q}_p} \circ R_{K^{(s)}/k_0}$.

**Доказательство.** Доказательство формул (13) и (14) аналогично доказательству (11) и (12), но вместо [1, теорема 2.1] надо применить [1, следствие 2.1]. □

## 3. Обобщенная формула Ивасавы

Как и в работе [1] при формулировке обобщенной формулы Ивасавы в случае смешанной характеристики, мы начнем с определения многомерной логарифмической производной на топологической $K$-группе Милнора. Через $\mathfrak{D}_{K^{(s)}/k^{(s)}}$ обозначим дифференту расширения $K^{(s)}/k^{(s)}$. Зададим отображение

$$\mathrm{Dlog} : \underbrace{K^* \times \ldots \times K^*}_{n\ \text{раз}} \longrightarrow P_{K^{(s)}}(-1)/\mathfrak{D}_{K^{(s)}/k^{(s)}}$$

по формуле

$$\mathrm{Dlog}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \tag{15}$$
$$(-1)^{\frac{(n-s)(n+s+1)}{2}} \sum_{\substack{I=\{i_1,\dots,i_{n-s}\}\\ 1\leqslant i_1<\dots<i_{n-s}\leqslant n}} (-1)^{i_1+\dots+i_{n-s}}\Delta_I\,\mathrm{Dlog}(\tau(\alpha_{j_1}), \dots, \tau(\alpha_{j_s})),$$

где $\{i_1,\dots,i_{n-s}\}\cup\{j_1,\dots,j_s\}=\{1,2,\dots,n\}$, $j_1<\dots<j_s$, $\Delta_I$ определен в (7), а Dlog в правой части определено в случае смешанной характеристики в работе [1] по формуле (26). Отображение Dlog называется *многомерной логарифмической производной Ивасавы.*

**Предложение 3.1.** *Многомерная логарифмическая производная Ивасавы* Dlog *удовлетворяет следующим свойствам:*

1) *мультипликативность по всем аргументам, т.е.*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Dlog}(\dots,\alpha_i\alpha_i',\dots)\\&\qquad\equiv \mathrm{Dlog}(\dots,\alpha_i,\dots)+\mathrm{Dlog}(\dots,\alpha_i',\dots)\mod \mathfrak{D}_{K^{(s)}/k^{(s)}};\end{aligned}$$

2) Dlog *удовлетворяет соотношению Стейнберга, т.е. для* $\alpha_i\neq 1$

$$\mathrm{Dlog}(\dots,\alpha_i,\dots,1-\alpha_i,\dots)\equiv 0\mod \mathfrak{D}_{K^{(s)}/k^{(s)}}.$$

**Доказательство.** По [1, предложение 2.1] Dlog в правой части (15) удовлетворяет свойствам 1) и 2). В [3, 2.7 и 2.8] показано, что из мультипликативности и соотношения Стейнберга для спаривания $[\,,\dots,\,]_{m,K^{(s)}}$ следуют эти свойства для $[\,,\dots,\,]_{m,K}$. Применяя этот метод, аналогично получаем 1) и 2) для Dlog, определенной по формуле (15). □

**Следствие 3.1.** *Многомерная логарифмическая производная Ивасавы* Dlog *индуцирует гомоморфизм абелевых групп*

$$\mathrm{Dlog}: VK_n^{\mathrm{top}}(K)\longrightarrow P_{K^{(s)}}(-1)/\mathfrak{D}_{K^{(s)}/k^{(s)}}.$$

*Более того, если последнее поле вычетов* $K$ *конечно, то* Dlog *индуцирует гомоморфизм абелевых групп*

$$\mathrm{Dlog}: K_n^{\mathrm{top}}(K)\longrightarrow P_{K^{(s)}}(-1)/\mathfrak{D}_{K^{(s)}/k^{(s)}}.$$

**Доказательство.** Доказательство аналогично доказательству [1, следствие 2.2], но вместо [1, предложение 2.1] надо применить предложение 3.1. □

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\alpha\in U_{K^{(s)}}(2p^{m-1})$, $\beta\in VK_n^{\mathrm{top}}(K)$. *Тогда справедлива обобщенная формула Ивасавы:*

$$(\beta,\alpha)_m\approx\omega\Big(-\frac{1}{p^m}R_{K^{(s)}/k_0}\big(\zeta t_1\dots t_{s-1}\log\alpha\,\mathrm{Dlog}\,\beta\big)\Big). \tag{16}$$

**Доказательство.** Так как обе части (16), очевидно, линейны по $\beta$, не умаляя общности, можно считать, что $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \in VK_n^{\mathrm{top}}(K)$, где $\beta_1 \in V_K$. По теореме 1.1 и определению спаривания $\langle\, ,\, \rangle_{m,K}$ имеем

$$\begin{aligned}(\{\beta_1, \dots, \beta_n\}, \alpha)_m &\approx \langle \{\beta_1, \dots, \beta_n\}, \alpha\rangle_{m,K} \\ &= \psi([\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha]_{m,K}) =: \gamma. \end{aligned} \tag{17}$$

Вычислим значение спаривания $[\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha]_{m,K}$ по формуле (8). Так как $\alpha \in K^{(s)}$, получаем $\tau(\alpha) = \alpha$ и $v_{s+1}(\alpha) = \ldots = v_n(\alpha) = 0$. Заметим, что $\alpha$ – $(n+1)$-ый аргумент спаривания. Поэтому если $n + 1 \in I = \{i_1, \dots, i_{n-s}\}$, то $\Delta_I = 0$. Следовательно, можно считать, что для всех слагаемых (8) выполнено $j_{s+1} = n + 1$. Отсюда

$$\begin{aligned}&[\beta_1, \dots, \beta_n, \alpha]_{m,K} = (-1)^{\frac{(n-s)(n+s+1)}{2}} \\ &\times \sum_{\substack{I=\{i_1,\dots,i_{n-s}\}\\ 1\leqslant i_1<\ldots<i_{n-s}\leqslant n}} (-1)^{i_1+\ldots+i_{n-s}} \Delta_I [\tau(\beta_{j_1}), \dots, \tau(\beta_{j_s}), \alpha]_{m,K^{(s)}},\end{aligned} \tag{18}$$

где $\{i_1, \dots, i_{n-s}\} \cup \{j_1, \dots, j_s\} = \{1, 2, \dots, n\}$, $j_1 < \ldots < j_s$.

Напомним, что, согласно обобщенной формуле Ивасавы для случая смешанной характеристики (см. формулу (37) в доказательстве [1, теорема 2.2]), для $a \in U_{K^{(s)}}(2p^{m-1})$ и $b \in VK_n^{\mathrm{top}}(K^{(s)})$ справедлива формула

$$\big\langle \beta, \alpha \big\rangle_{m,K^{(s)}} \approx \omega\bigg(-\frac{1}{p^m} R_{K^{(s)}/k_0}\big(\zeta t_1 \ldots t_{s-1} \log \alpha \,\mathrm{Dlog}\, \beta\big)\bigg). \tag{19}$$

Используя (17), (18), определение спаривания $\langle\, ,\, \rangle_{m,K^{(s)}}$, а также (19), поскольку $\alpha \in U_{K^{(s)}}(2p^{m-1})$, получаем

$$\gamma = \bigg(\prod_I \psi([\tau(\beta_{j_1}), \dots, \tau(\beta_{j_s}), \alpha]_{m,K^{(s)}})^{(-1)^{i_1+\ldots+i_{n-s}}\Delta_I}\bigg)^{(-1)^{\frac{(n-s)(n+s+1)}{2}}}$$

$$= \left(\prod_I \langle\{\tau(\beta_{j_1}),\dots,\tau(\beta_{j_s})\},\alpha\rangle_{m,K^{(s)}}^{(-1)^{i_1+\dots+i_{n-s}}\Delta_I}\right)^{(-1)^{\frac{(n-s)(n+s+1)}{2}}}$$

$$\approx \omega\Biggl((-1)^{\frac{(n-s)(n+s+1)}{2}+1}\sum_I(-1)^{i_1+\dots+i_{n-s}}\Delta_I$$

$$\times\frac{1}{p^m}R_{K^{(s)}/k_0}\bigl(\zeta t_1\dots t_{s-1}\log\alpha\,\mathrm{Dlog}(\{\tau(\beta_{j_1}),\dots,\tau(\beta_{j_s})\})\bigr)\Biggr)$$

$$= \omega\left(-\frac{1}{p^m}R_{K^{(s)}/k_0}\bigl(\zeta t_1\dots t_{s-1}\log\alpha\,\mathrm{Dlog}\,\beta\bigr)\right),$$

что и завершает доказательство теоремы. □

**Следствие 3.2.** *Предположим, что последнее поле вычетов $K$ конечно. Пусть $\alpha\in U_{K^{(s)}}(2p^{m-1})$, $\beta\in K_n^{\mathrm{top}}(K)$. Тогда справедлива обобщенная формула Ивасавы*

$$(\beta,\alpha)_m = \zeta^{-\frac{1}{p^m}R_{K^{(s)}/\mathbb{Q}_p}(\zeta t_1\dots t_{s-1}\log\alpha\,\mathrm{Dlog}\,\beta)}, \tag{20}$$

*где* $R_{K^{(s)}/\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Tr}_{k_0/\mathbb{Q}_p}\circ R_{K^{(s)}/k_0}$.

**Доказательство.** Доказательство (20) аналогично доказательству (16), но вместо [1, теорема 2.2] надо применить [1, следствие 2.3]. □

Автор выражает глубокую благодарность профессору С. В. Востокову за постановку задачи и ценные замечания.

## Литература


1. А. Н. Зиновьев, *Обобщенные формулы Артина-Хассе и Ивасавы для символа Гильберта в многомерном полном поле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 233–259.
2. С. В. Востоков, *Спаривание на $K$-группах многомерных полных полей.* — Труды С.-Петерб. мат. общ. **3** (1995), 140–184.
3. С. В. Востоков, *Спаривание Гильберта в полном многомерном поле.* — Труды МИАН им. В. А. Стеклова **208** (1995), 80–92.
4. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия.* — Труды С.-Петерб. мат. общ. **3** (1995), 4–46.
5. И. Б. Фесенко, *Секвенциальные топологии и факторы милноровских $K$-групп многомерных локальных полей.* — Алгебра и анализ 13 (2001), вып. 3, 198–221.
6. I. B. Fesenko, *Abelian local $p$-class field theory.* — Math. Annal. **301** (1995), 561–586.

Zinoviev A. N. Generalized Artin–Hasse and Iwasawa formulas for the Hilbert symbol in a higher local field. II.

In this paper we consider the generalized Hilbert symbol in a higher local field of charactersitic 0 with the first residue field of characteristic 0 as well and with perfect last residue field of positive characteristic p which comes from higher local $p$-class field theory developed by I. Fesenko. Using the descent to a subfield of mixed characteristic we deduce from the generalized Artin–Hasse and Iwasawa formulas proved in a previous paper the corresponding Artin–Hasse and Iwasawa explicit reciprocity laws in the case under consideration.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

*E-mail*: zinoviev@pdmi.ras.ru

Поступило 23 декабря 2004