11. *Новичков Ю.Н.* Флаттер пластин и оболочек //Механика деформируемого твердого тела. Итоги науки и техники. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. 67–122.
12. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006.
13. *Кийко И.А.* Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и пологой оболочки, обтекаемой потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью // Прикл. матем. и механ. 1999. **63**, вып. 2. 305–312.
14. *Кийко И.А.* Постановка задачи об аэроупругих колебаниях конической оболочки малого раствора, внутри которой с сверхзвуковой скоростью протекает газ // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2004. № 3. 58–61.
15. Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса; пер. с англ. М.: ИЛ, 1963.

Поступила в редакцию
04.10.2007

УДК 539

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНТИНУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО СПЕКТРА В УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКЕ

Г. Л. Бровко[1], **З. Г. Тунгускова**[2]

Для расчета спектра собственных колебаний углеродной нанотрубки использованы стержневые модели продольных, крутильных и изгибных колебаний, для расчета спектра собственных радиальных колебаний — теория безмоментной цилиндрической оболочки. Коэффициенты, входящие в эти модели, подбирались путем согласования результатов, полученных на основе микромодели с потенциалом взаимодействия Китинга в длинноволновом приближении и континуальной модели. Показано, что спектры продольных, радиальных и крутильных колебаний углеродной нанотрубки одного порядка (минимальная частота $\sim 10^{11}$ Гц), а спектр собственных частот изгибных колебаний на 2 порядка ниже (минимальная частота $\sim 10^{9}$ Гц). Эти спектры находятся в сверхвысокочастотном диапазоне.

Ключевые слова: углеродная нанотрубка, собственные колебания, спектры собственных частот.

Rod models of longitudinal, torsional, and bending vibrations are used to find the natural vibration spectrum of a carbon nanotube. The spectrum of natural radial vibrations is found using the membrane theory of cylindrical shells. The coefficients of these models are chosen by comparing the results obtained on the basis of the micromodel with the Keating interaction potential in the framework of the long-wave approximation and the continuous model. It is shown that the spectra of longitudinal, radial, and torsional vibrations of the carbon nanotube are of the same order of magnitude (the minimum frequency is about 10^{11} Hz), whereas the natural frequency spectrum for the bending vibrations is of two orders of magnitude less (the minimum frequency is about 10^{9} Hz). These spectra belong to the super-high frequency range.

Key words: carbon nanotube, natural vibrations, spectrum of natural frequencies.

Углеродная нанотрубка представляет собой структурно-неоднородную конструкцию, механическое поведение которой можно описывать разными моделями.

Первый тип моделей — это модели, явно учитывающие микроструктуру и характер взаимодействия между ее элементами. К ним относятся модели, использующие понятие микроячейки и описывающие взаимодействие между ее элементами с помощью потенциала.

Второй тип — это континуальные модели, использующие понятия перемещений, деформаций, напряжений.

---

[1] *Бровко Георгий Леонидович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: glb@mech.math.msu.su.

[2] *Тунгускова Зоя Георгиевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: Tunguz44@mail.ru.

С точки зрения моделей первого типа континуальными моделями можно пользоваться в так называемом "длинноволновом приближении". Оценим этот диапазон волн, исходя из континуальной модели структурно-неоднородного тела [1]. Пусть λ — характерная длина волны, а $\tilde{l}$ — характерный размер "представительного объема". Условие $(\lambda/\tilde{l}) \geqslant 1$ определяет возможность использования континуальных моделей. Показано [2], что $\tilde{l} \approx 10a$, где a — характерный размер элемента структуры. Для углеродной нанотрубки $a \approx 2$ нм, т.е. $\lambda \geqslant 20$ нм $= 2 \cdot 10^{-6}$ см.

В работе [2] исследовался колебательный спектр углеродных нанотрубок в рамках моделей первого типа, построенных с использованием потенциала взаимодействия Китинга, учитывающего парные упругие связи и изменение угла между линиями действия этих связей. Константы этого потенциала определены путем согласования колебательного спектра одиночной графитной плоскости, полученного на его основе, с известным спектром кристалла графита. В случае длинноволнового приближения рассчитаны две скорости волн: $a_1 = 20{,}7 \cdot 10^5$ см/с — скорость распространения вдоль связей и $a_2 = 14{,}1 \cdot 10^5$ см/с — скорость распространения поперек связей.

С точки зрения континуальных моделей a_1 можно интерпретировать как скорость продольных колебаний, а a_2 — как скорость крутильных колебаний, т.е. для углеродной нанотрубки

$$a_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 20{,}7 \cdot 10^5 \text{ см/с}, \qquad a_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 14{,}1 \cdot 10^5 \text{ см/с}.$$

Учитывая, что $E = 2G(1+\nu)$, получим $\nu = 0{,}08$, где E, G, ν, ρ — соответственно модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и плотность. В дальнейших расчетах примем $l = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ см, $R = 6{,}7 \cdot 10^{-7}$ см $= 6{,}7$ нм, где l — длина трубки, а R — ее радиус.

Воспользуемся стержневыми моделями для оценки спектра собственных колебаний углеродной нанотрубки.

I. Для продольных колебаний [3, 4] имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

— уравнение движения, где u — продольное (вдоль оси x) перемещение, t — время. Граничные условия:

на свободном крае

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \tag{2}$$

на закрепленном крае

$$u = 0. \tag{3}$$

Собственное решение имеет вид

$$u = (c_1 \cos \rho x + c_2 \sin \rho x)(a \sin \omega t + b \cos \omega t),$$

где $\rho = \omega / a_1$ — дисперсионное уравнение.

В случае, когда оба конца свободны или закреплены, спектр собственных частот имеет вид $\omega_n = \omega_1 n$, где

$$\omega_1 = \frac{\pi a_1}{l} \approx 5 \cdot 10^{11} \text{ Гц} = 500 \text{ ГГц}, \qquad \rho_1 \approx 0{,}24 \cdot 10^6 \text{ 1/см}, \qquad \rho_n = \rho_1 n. \tag{4}$$

В случае, когда один конец закреплен, а другой — свободен, $\omega_n = (1+2n)\omega_0$, где

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2l} a_1 \approx 250 \text{ ГГц}, \qquad \rho_n = (1+2n)\rho_0, \qquad \rho_0 \approx 0{,}12 \cdot 10^6 \text{ 1/см}. \tag{5}$$

II. Для крутильных колебаний имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где φ — угол закручивания. Поэтому спектр собственных частот будет аналогичен (4), (5) с заменой a_1 на a_2. Имеем $\omega_n = \omega_1 n$, где $\omega_1 = \dfrac{\pi a_2}{l} \approx 3{,}4 \cdot 10^{11}$ Гц $= 340$ ГГц, $\rho_n = \rho_1 n$, $\rho_1 \approx 0{,}24 \cdot 10^6$ 1/см, или $\omega_n = (1+2n)\omega_0$, где $\omega_0 = 170$ ГГц, $\rho_n = (1+2n)\rho_0$, $\rho_0 \approx 0{,}12 \cdot 10^6$ 1/см.

III. Для изгибных колебаний имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{\rho S}\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \tag{7}$$

где w — прогиб, J — момент инерции сечения относительно нейтральной оси, S — площадь поперечного сечения. Считая, что поперечное сечение представляет собой кольцо, имеющее толщину h и внешний радиус R, получим

$$\frac{J}{S} = \frac{1}{2}\,R^2\Big(1 - \frac{h}{R}\Big), \qquad \tilde{a} = \sqrt{\frac{\bar{E}}{\rho}}\cdot\sqrt{\frac{J}{S}} = \frac{Ra_1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{h}{R}} \approx 10\sqrt{1-\frac{h}{R}}\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Граничные условия могут быть следующими:

$w = 0$, $w'' = 0$ на шарнирно опертом крае;

$w = 0$, $w' = 0$ на заделанном крае;

$w'' = 0$, $w''' = 0$ на свободном крае.

Собственное решение уравнения (7) имеет вид

$$w = (c_1 \sin qx + c_2 \cos qx + c_3 \operatorname{sh} qx + c_4 \operatorname{ch} qx)(a \sin\omega t + b\cos\omega t).$$

Дисперсионное уравнение таково: $\omega = \tilde{a} q^2$.

Для стержня со свободными краями при $x = 0$ и $x = l$ получим $c_2 = c_4 = 0$, а для c_1 и c_3 — систему

$$\begin{aligned} &c_1(-\cos ql + \operatorname{ch} ql) + c_3(-\sin ql + \operatorname{sh} ql) = 0,\\ &c_1(\sin ql + \operatorname{sh} ql) + c_3(-\cos ql + \operatorname{ch} ql) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Отличные от нуля c_1 и c_3 имеем при равенстве нулю определителя этой системы, что дает частотное уравнение

$$\cos ql \cdot \operatorname{ch} ql = 1, \tag{9}$$

первые корни которого [4] таковы: $q_0 l = 0$, $q_1 l = 4{,}73$; $q_2 l = 7{,}85$; $q_3 l = 14{,}14$; $q_4 l = 17{,}28$, следовательно,

$$q_1 = 3{,}6\cdot 10^5\ \frac{1}{\text{см}}; \qquad \omega_1 = 130\cdot 10^9\sqrt{1-\frac{h}{R}}\ \text{Гц} = 1{,}3\sqrt{1-\frac{h}{R}}\ \text{ГГц} \approx 130\ \text{ГГц}. \tag{10}$$

В случае, когда оба края заделаны, получим $c_1 = c_3 = 0$, а для c_2 и c_4 — систему (8), т.е. в этом случае частотное уравнение имеет вид (9), а спектр – вид (10).

Для случая, когда один край заделан, а другой свободен, частотное уравнение имеет вид $\cos ql \operatorname{ch} ql = -1$. Его первые корни таковы: $q_1 l = 1{,}88$, $q_2 l = 4{,}69$; $q_3 l = 11$; $q_4 l = 14{,}14$; $q_5 l = 17{,}28$. Отсюда

$$q_1 = 1{,}4\cdot 10^5\ \frac{1}{\text{см}}; \qquad \omega_1 = 30\cdot 10^9\sqrt{1-\frac{h}{R}}\ \text{Гц} = 30\sqrt{1-\frac{h}{R}}\ \text{ГГц} \approx 30\ \text{ГГц}.$$

В случае, когда оба конца шарнирно оперты, $c_2 = c_4 = c_3 = 0$. Частотное уравнение имеет вид

$$\sin ql = 0, \qquad q_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad \omega_n = \frac{10\pi^2 u^n}{l^2}\sqrt{1-\frac{h}{R}}\ \frac{1}{c}, \qquad \omega_1 = 58\cdot 10^9\ \text{Гц} = 58\ \text{ГГц}. \tag{11}$$

В работе [2] отмечается, что продольные колебания углеродной нанотрубки сопровождаются радиальными колебаниями (“дышащая” мода). Для описания этого эффекта воспользуемся моделью безмоментной теории цилиндрических оболочек [5]. Уравнение собственных колебаний срединной поверхности имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2}\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial\varphi^2} + \frac{1+\nu}{2R}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi\partial x} - \frac{\nu}{R}\,\frac{\partial u_r}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\ \frac{1+\nu}{2R}\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial\varphi} + \frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2},\\ \frac{\nu}{R}\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{u_r}{R^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \end{gathered}$$

где

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \approx a_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 20{,}7\cdot 10^5\ \frac{\text{см}}{\text{с}},$$

u_x — продольное перемещение, u_φ — перемещение вдоль дуги окружности в сечении, u_r — радиальное перемещение в сечении. Для этих уравнений возможно решение вида $u_\varphi = B\exp(-i\omega t + i\rho x)$, что приводит к задаче о крутильных колебаниях (6). Будем искать решение вида

$$u_\varphi = 0, \quad u_x = \tilde{u}(x)e^{i\omega t}, \quad u_r = \tilde{w}(x)e^{i\omega t}.$$

Подстановка этого решения в (11) дает систему

$$\begin{cases} \tilde{u}'' - \dfrac{\nu}{R}\,\tilde{w}' = -\dfrac{1}{c^2}\,\omega^2 u, \\ \dfrac{\nu}{R}\,\tilde{u}' - \dfrac{1}{R^2}\,\tilde{w} = -\dfrac{1}{c^2}\,\omega^2 \tilde{w}, \end{cases}$$

откуда $\tilde{w} = \dfrac{\nu R c^2}{c^2 - R^2\omega^2}\,\tilde{u}$, а для $\tilde{u}(x)$ получим уравнение

$$\frac{(1-\nu^2)c^2 - R^2\omega^2}{c^2 - R^2\omega^2}\,\tilde{u}'' + \frac{\omega^2}{c^2}\,\tilde{u} = 0.$$

Для углеродной нанотрубки $\nu \approx 0{,}08$, поэтому $1 - \nu^2 \approx 1$, $c \approx a_1$, и для продольных колебаний получим задачу (1)–(3), т.е. для продольных колебаний спектр собственных колебаний будет таким же, как и при использовании стержневой теории. Спектр собственных частот радиальных колебаний в углеродной нанотрубке будет таким же, как спектр собственных частот продольных колебаний, а коэффициент Пуассона влияет только на амплитуду собственных колебаний.

Таким образом, показано, что спектры собственных колебаний углеродной нанотрубки (продольных, радиальных, крутильных и изгибных) находятся в сверхвысокочастотном диапазоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06–01–00565а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тунгускова З.Г.* О представительном объеме упругих структурно-неоднородных материалов // Упругость и неупругость. Часть 1. М.: Изд-во МГУ, 1993. 128–138.
2. *Савинский С.С., Петровский В.Л.* Дискретная и континуальная модели для расчета спектров углеродных нанотрубок // Физ. твердого тела. 2002. **44**, вып. 9. 1721–1726.
3. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник. Т. 3 / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.
4. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: ГИФМЛ, 1959.
5. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: ГИФМЛ, 1963.

Поступила в редакцию
26.12.2007

УДК 531.3:681.5.01

ОЦЕНИВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ В РЕЖИМЕ ЗАДАЧИ "ПЕРИОД ШУЛЕРА"

О. В. Демидов[1]

Контрольная задача "Период Шулера" — это специальный режим функционирования платформенной инерциальной навигационной системы ИНС-2000. Он используется для проверки соответствия калибровочных параметров чувствительных элементов ИНС их реальным значениям. В работе для указанного режима построена модель уравнений

[1] *Демидов Олег Викторович* — асп. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ovdemidiv@mail.ru.