О. Х. Масаева, Единственность решения задачи Дирихле для многомерного уравнения в частных производных дробного порядка, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018, номер 4, 50–53

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-50-53

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-50-53

УДК 517.95

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

О. Х. Масаева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

Доказана теорема единственности решения задачи Дирихле для многомерного уравнения с частными производными дробного порядка в неограниченной области. Исследуемое уравнение является уравнением эллиптического типа второго порядка при целых значениях порядков дробных производных.

Ключевые слова: задача Дирихле в неограниченной области, дробная производная Римана-Лиувилля, дробная производная Капуто, многомерное эллиптическое уравнение

MSC 35L05

UNIQUENESS OF A SOLUTION TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A MULTIDIMENSIONAL FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

O. Kh. Masaeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, st. Shortanova, 89a

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

The uniqueness theorem for the solution of the Dirichlet problem for a multidimensional partial differential equation of fractional order in an unbounded domain is proved. The equation under study is an equation of the second order elliptic type when the orders of fractional derivatives are integer.

Key words: Dirichlet problem in unbounded domain, Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, multidimensional elliptic equation

Введение

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = \overline{1,n}\}$. Рассмотрим в области Ω уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \left(D_{0x_i}^{\alpha_i} u_{x_i}(x) - \partial_{0x_i}^{\beta_i} u(x) \right) = 0,\, 0 < \alpha_i, \beta_i < 1, \tag{1}$$

$\partial_{0x_i}^{\beta_i} u = D_{0x_i}^{\beta_i - 1} \frac{\partial}{\partial x_i} u$ – дробная производная в смысле Капуто порядка β_i [1, с. 11], $D_{0x_i}^{\gamma}$ – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля порядка $|\gamma|$:

$$D_{0x_i}^{\gamma} u(x) = \int_0^{x_i} \frac{(x_i - \xi)^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)} u(x_1, ..., x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, ..., x_n) d\xi,\, \gamma < 0;$$

$$D_{0x_i}^{\gamma} u(x) = u(x),\, \gamma = 0; \quad D_{0x_i}^{\gamma} u(x) = \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} D_{0x_i}^{\gamma - m} u(x),\, m - 1 < \gamma \le m,\, m \in \mathbb{N}.$$

Уравнение (1) при $\alpha_i = \beta_i = 1$ переходит в уравнение эллиптического типа второго порядка

$$\sum_{i=1}^{n} \left(u_{x_i x_i}(x) - u_{x_i}(x) \right) = 0. \tag{2}$$

В работах [2] и [3] были исследованы аналоги трехмерного уравнения Лапласа дробного порядка. В работе [4] исследовалась задача Дирихле для уравнения с дробными производными с переменными коэффициентами в выпуклой области и доказана теорема единственности решения. Задача Дирихле для фрактального уравнения Лапласа с двумя независимыми переменными в ограниченной области, лежащей в первом квадранте, исследовалась в работе [5]. В данной работе доказана единственность решения задачи Дирихле для уравнения (1) в неограниченной области Ω.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x \in \Omega$, из класса $u(x) \in C(\bar{\Omega})$, $D_{0x_i}^{\alpha_i} u_{x_i}(x) \in C(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x_i с показателем $\varepsilon > \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Задача Дирихле. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условию

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Вспомогательная лемма

Лемма. *Пусть область $\Omega_\sigma \subset \Omega$ ограничена кусочно-гладкой выпуклой поверхностью σ и обладает тем свойством, что если точка $x \in \Omega_\sigma$, то $I_x \in \Omega_\sigma$, где $I_x = (0, x_1) \times (0, x_2) \times \cdots \times (0, x_n)$. Регулярное решение уравнения (1), нигде внутри Ω_σ не может принимать значений больших, чем наибольшее ее значение на границе, или меньших, чем ее значение на границе, т. е.*

$$\min_{x \in \partial\bar{\Omega}_\sigma} u(x) \le u(x) \le \max_{x \in \partial\bar{\Omega}_\sigma} u(x). \tag{4}$$

Доказательство. Утверждение леммы докажем методом от противного. Пусть $P=(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n)\in\Omega_\sigma$ точка, в которой $u(x)$ принимает наибольшее значение и

$$u(P)>\max_{\partial\bar\Omega_\sigma}u(x) \tag{5}$$

Так как

$$D^{\alpha_i}_{0\zeta_i}u_{\zeta_i}=D^{\alpha_i+1}_{0\zeta_i}u-\frac{\zeta_i^{-\alpha_i-1}}{\Gamma(-\alpha_i)}u(\zeta_1,...,\zeta_{i-1},0,\zeta_{i+1},...,\zeta_n),$$

и согласно принципу экстремума для оператора дробного дифференцирования в точке P наибольшего значения [1, с. 117]

$$D^{\alpha_i+1}_{0\zeta_i}u\le\frac{u(P)\zeta_i^{-\alpha_i-1}}{\Gamma(-\alpha_i)},\quad\forall\,\alpha_i\in]0,1[,$$

имеем

$$D^{\alpha_i}_{0\zeta_i}u_{\zeta_i}\le\frac{u(P)\zeta_i^{-\alpha_i-1}}{\Gamma(-\alpha_i)}-\frac{\zeta_i^{-\alpha_i-1}}{\Gamma(-\alpha_i)}u(\zeta_1,...,\zeta_{i-1},0,\zeta_{i+1},...,\zeta_n)=$$

$$=\frac{\zeta_i^{-\alpha_i}}{\Gamma(-\alpha_i)}\Big[u(P)-u(\zeta_1,...,\zeta_{i-1},0,\zeta_{i+1},...,\zeta_n)\Big]. \tag{6}$$

Так как $\Gamma(-\alpha_i)<0$ и $u(P)-u(\zeta_1,...,\zeta_{i-1},0,\zeta_{i+1},...,\zeta_n)>0$, из (6) получаем в точке максимума

$$D^{\alpha_i}_{0\zeta_i}u_{\zeta_i}<0. \tag{7}$$

Принимая во внимание формулу (7), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}D^{\alpha_i}_{0\zeta_i}u_{\zeta_i}<0. \tag{8}$$

С учетом того, что

$$\partial^{\beta_i}_{0\zeta_i}u=D^{\beta_i}_{0\zeta_i}u-\frac{\zeta_i^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)}u(\zeta_1,...,\zeta_{i-1},0,\zeta_{i+1},...,\zeta_n),$$

и в точке наибольшего значения [1, с. 104] $\forall\beta_i\in]0,1[,\ i=1,...,n,$

$$D^{\beta_i}_{0\zeta_i}u\ge\frac{u(P)\zeta_i^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)},$$

имеем

$$D^{\beta_i}_{0\zeta_i}u-\frac{\zeta_i^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)}u(\zeta_1,...,\zeta_{i-1},0,\zeta_{i+1},...,\zeta_n)\ge$$

$$\ge\frac{u(P)\zeta_i^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)}-\frac{\zeta_i^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)}u(\zeta_1,...,\zeta_{i-1},0,\zeta_{i+1},...,\zeta_n)=$$

$$=\frac{\zeta_i^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)}\Big[u(P)-u(\zeta_1,...,\zeta_{i-1},0,\zeta_{i+1},...,\zeta_n)\Big]. \tag{9}$$

Так как $\Gamma(1-\beta_i)>0$ и $u(P)-u(\zeta_1,...,\zeta_{i-1},0,\zeta_{i+1},...,\zeta_n)>0$, то из (9) следует, что в точке P

$$\partial^{\beta_i}_{0\zeta_i}u>0. \tag{10}$$

Отсюда и из формул (8), (10) следует

$$\sum_{i=1}^{n}\left[D_{0\zeta_i}^{\alpha_i}u_{\zeta_i}-\partial_{0\zeta_i}^{\beta_i}u\right]<0,$$

что противоречит уравнению (1). Это означает, что предположение (5) неверно. Аналогично доказывается второе неравенство из (4).
□

Теорема единственности

Теорема. *Пусть* $c(x)\leq 0, x\in\Omega$. *Тогда регулярное решение задачи (1), (3), стремящееся к нулю при* $|x|\to\infty$, *единственно.*

Доказательство. Пусть задача (1), (3) имеет какие-нибудь два решения u_1 и u_2. При этом разность $v=u_1-u_2$ будет решением уравнения (1), стремящаяся к нулю на бесконечности, а именно

$$|v(x)|<\varepsilon(R), \tag{11}$$

где $\varepsilon(R)\to 0$ при $R\to\infty$, $R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$. Далее, применим лемму к области $\Omega_R=\{|x|<R, x_1,x_2,...,x_n>0\}$ и будем считать R настолько большим, что в любой точке $x\in\Omega$ значение v сколь мало в силу (11). Отсюда и вытекает справедливость теоремы. □

Список литературы

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[2] Lopushanska G. P., "Basic boundary value problems for one equation with fractional derivatives,", *Ukrainian Mathematical Journal Ukr. Mat. Zh.*, **51**:1 (1999), 51–65.

[3] Ferreira M., Vieira N, "Eigenfunctions and fundamental solutions of the fractional Laplace and Dirac operators using Caputo derivatives,", *Complex variables and elliptic equations*, **62**:9 (2017).

[4] Masaeva O. H., "Princip ehkstremuma dlya fraktal'nogo ehllipticheskogo uravneniya", *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **16**:4 (2014), 31–35.

[5] Масаева О. Х., "Единственность решения задачи Дирихле для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части", *Известия КБНЦ РАН*, **(68)-2**:6 (2015), 127–130. [Masaeva O. H., "Edinstvennost' resheniya zadachi Dirihle dlya uravneniya s fraktal'nym operatorom Laplasa v glavnoj chasti", *Izvestiya KBNC RAN*, **(68)-2**:6 (2015), 127–130].

Для цитирования: Масаева О. Х. Единственность решения задчи Дирихле для многомерного уравнения в частных производных дробного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). C. 50-53. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-50-53

For citation: Masaeva O. Kh. Uniqueness of a solution to the Dirichlet problem for a multidimensional fractional partial differential equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 50-53. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-50-53

Поступила в редакцию / Original article submitted: 11.07.2018