А. В. Шутов, Проблема Гекке–Кестена для нескольких интервалов, *Чебышевский сб.*, 2011, том 12, выпуск 1, 172–177

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Посвящается 65-ой годовщине со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина

Том 12 Выпуск 1 (2011)

УДК 519.21

ПРОБЛЕМА ГЕККЕ — КЕСТЕНА ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ИНТЕРВАЛОВ [1]

А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

В работе получено полное описание множеств ограниченного остатка проблемы распределения дробных долей $n\alpha$, состоящих их нескольких интервалов. Также получена явная оценка остатка на найденных множествах.

Г.Вейль в работе [15] ввел понятие последовательности, равномерно распределенной по модулю 1, а также доказал свой знаменитый критерий равномерного распределения. В той же работе были приведены превые примеры последовательностей, равномерно распределенных по модулю 1. Простейшей такой последовательностью является последовательность $(n\alpha)_{n\geq 1}$ при иррациональном α.

Пусть X – некоторое множество с интегрируемой по Риману характеристической функцией, $\{\cdot\}$ – дробная доля и $N(\alpha, n, X) = \sharp\{k : 1 \leq k \leq n, \{k\alpha\} \in X\}$. Тогда теорема Вейля о равномерном распределении эквивалентна асимптотической формуле

$$N(\alpha, n, X) \sim |X|n, \tag{1}$$

где $|X|$ – мера множества X. Пусть $r(\alpha, n, X) = N(\alpha, n, X) - |X|n$ – остаточный член формулы (1). Ясно, что

$$r(\alpha, n, X) = o(n). \tag{2}$$

Возникает естественный вопрос об улучшении оценки (2). Хорошо известно, что в общем случае оценка (2) неулучшаема без дополнительных предположений об α и X. Выделяется два основных направления исследований функции $r(\alpha, n, X)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00578-а.

1) Получение оценок для функции $D(\alpha, n) = \sup_{X=(a;b)} r(\alpha, n, X)$ при различных ограничениях на α [7].

2) При фиксированном α найти множества X для которых справедлива оценка $r(\alpha, n, X) = O(1)$ и получить оценку $r(\alpha, n, X)$ для этих множеств. Соответствующие множества X называются множествами ограниченного остатка.

Второе направление берет свое начало в работе Гекке [9], в которой было показано, что интервалы I длины вида $a + b\alpha$, $a, b \in \mathbb{Z}$ являются интервалами ограниченного остатка и для них справедлива оценка

$$|r(\alpha, n, I)| \leq |b|. \tag{3}$$

Позднее Кестен [10] доказал обращение результата Гекке, то есть показал, что длина каждого интервала ограниченного остатка представима в виде $a+b\alpha$, $a, b \in \mathbb{Z}$ и высказал предположение, что оценка (3) может быть существенно улучшена. В дальнейшем было получено еще несколько доказательств теоремы Гекке-Кестена без улучшения оценки (3) [8], [12]. Позднее оценка Гекке была улучшена в работах [4], [5], [6], [14]. В работе [3], были получены неулучшаемые по порядку оценки для $r(\alpha, n, X)$ в случае когда X является интервалом. Более того, в работе [1] были найдены точные значения максимума и минимума остаточного члена.

В настоящей работе рассматривается случай, когда множетсво X является объединением нескольких интервалов. Очевидно, что объединение интервалов ограниченного остатка также является интервалом ограниченного остатка. Обратное утверждение однако неверно, то есть существует множества ограниченного остатка $I = I_1 \cup I_2$ для которых интервалы I_1, I_2 не являются интервалами ограниченного остатка.

Исследование проблемы Гекке-Кестена для объединений интервалов фактически было начато в работе [11]. Приведем основной результат данной работы. Пусть $f : [0; 1) \to \mathbb{R}$ – полунепрерывная справа функция с конечным числом точек разрыва. Пусть $\delta_f(x) = f(x^+) - f(x^-)$ и $\Delta_f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_f(\{x + i\alpha\})$.

Теорема 1. [11] *Пусть α – иррационально и $F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(\{x + i\alpha\})$. Тогда последовательность $\{F_n(x) - n \int_0^1 f(z)dz\}$ ограничена для некоторого (или каждого) x тогда и только тогда, когда $\Delta_f(x) \equiv 0$.*

Для описания множеств ограниченного остатка необходимо подставить в качестве функции f характеристическую функцию множества. Отметим, что теорема 1 доказывается методами эргодической теории, что не позволяет получить какой-либо оценки остатка. Кроме того, условие, даваемое теоремой 1, ненаглядно и сложно для понимания.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$, где $I_k = [i_k; j_k)$ и пересечение $I_i \cap I_j = \varnothing$ для всех i, j. Тогда I является множеством ограниченного остатка тогда и только тогда, когда существует перестановка $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$*

множества $(1, 2, \dots, m)$ *такая, что* $j_{l_k} - i_k = a_k + b_k\alpha$, $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$, $1 \le k \le m$. *Более того, в этом случае справедлива оценка*

$$|r(\alpha, n, I)| \le 2\sum_{k=1}^{m} |b_k|. \tag{4}$$

Доказательство. В начале докажем достаточность условий теоремы. Для этого заметим, что характеристическая функция полуинтервала $[c; d)$ может быть записана в виде $\chi(x) = (d - c) + \{x - d\} - \{x - c\}$. Ясно, что $N(\alpha, n, X) = \sum_{t=1}^{n} \chi_I(\{t\alpha\})$. Учитывая, что $\chi_I(x) = \sum_{k=1}^{m} \chi_{I_k}(x)$ и подставляя выражение для характеристической функции, имеем

$$N(\alpha, n, I) = \sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(|I_k| + \{t\alpha - j_k\} - \{t\alpha - i_k\}).$$

Поскольку $|I| = \sum_{k=1}^{m} |I_k|$, получаем

$$N(\alpha, n, I) = n|I| + \sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\{t\alpha - j_k\} - \{t\alpha - i_k\}),$$

или

$$r(\alpha, n, I) = \sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\{t\alpha - j_k\} - \{t\alpha - i_k\}).$$

Меняя порядок суммирования и перегруппировывая слагаемые, получим, что

$$r(\alpha, n, I) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}(\{t\alpha - j_{l_k}\} - \{t\alpha - i_k\}).$$

Поскольку $j_{l_k} - i_k = a_k + b_k\alpha$, имеем

$$r(\alpha, n, I) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}(\{(t - b_k)\alpha - i_k\} - \{t\alpha - i_k\}).$$

Обозначим внутреннюю сумму через S_k, то есть

$$r(\alpha, n, I) = \sum_{k=1}^{m} S_k, \tag{5}$$

где $S_k = \sum_{t=1}^{n}(\{(t - b_k)\alpha - i_k\} - \{t\alpha - i_k\})$. Предположим, что $b_k \ge 0$. Тогда

$$S_k = \sum_{t=1-b_k}^{0}\{t\alpha - i_k\} - \sum_{t=n-b_k+1}^{n}\{t\alpha - i_k\}. \tag{6}$$

Сумма S_k содержит не более $2b_k$ слагаемых вида $\{t\alpha - i_k\}$. Так как $0 \leq \{t\alpha - i_k\} < 1$, имеем $|S_k| \leq 2b_k$. Рассматривая аналогично случай $S_k < 0$, получаем оценку

$$|S_k| \leq 2|b_k|.$$

Учитывая (5), имеем

$$|r(\alpha, n, I)| \leq \sum_{k=1}^{m} |S_k| \leq 2\sum_{k=1}^{m} |b_k|.$$

Таким образом достаточность условий теоремы и оценка (4) доказаны.

Перейдем к доказательству необходимости условий теоремы. Для этого воспользуемся теоремой 1, взяв в качестве функции f характеристическую функцию множества I. Заметим, что $\delta_f(i_1) = 1$. Поскольку $\Delta_f(i_1) = 0$, существует целое t такое, что $\delta_f(\{i_1 + t\alpha\}) = -1$. Но тогда $\{i_1 + t\alpha\}$ есть правый конец некоторого интервала. Обозначим его номер через l_1. Получаем, что $j_{l_1} = \{i_1 + t\alpha\}$ откуда и следует, что $j_{l_1} - i_1 = a_1 + b_1\alpha$ с целыми a_1, b_1. Далее рассмотрим функцию $\delta'_f(x)$ отличающуюся от $\delta_f(x)$ тем, что она принимает нулевые значения в точках i_1 и j_{l_1}. Функция $\Delta'_f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta'_f(\{x + i\alpha\})$ вновь тождественно равна нулю. Повторяя приведенные выше рассуждения для $i_2, i_3, \ldots, i_m$ получаем утверждение теоремы.

Отметим, что оценка (4) может быть существенно усилена для некоторых классов иррациональностей. Перепишем равенство (6) в виде

$$S_k = \sum_{t=1}^{b_k} \{t\alpha - (b_k\alpha + i_k)\} - \sum_{t=1}^{b_k} \{t\alpha - (b_k\alpha - n\alpha + i_k)\}.$$

Пусть $C_r(\alpha, \gamma) = \sum_{t=1}^{r} (\{k\alpha + \gamma\} - \frac{1}{2})$. Тогда имеем

$$S_k = C_{b_k}(\alpha, \gamma_1) - C_{b_k}(\alpha, \gamma_2),$$

с $\gamma_1 = -(b_k\alpha + i_k)$ и $\gamma_2 = -(b_k\alpha - n\alpha + i_k)$. Обозначая $C_r^*(\alpha) = \sup_\gamma |C_r(\alpha, \gamma)|$, получаем

$$S_k \leq 2C_{b_k}^*(\alpha),$$

откуда выводим следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть в обозначениях теоремы 2 I является множеством ограниченного остатка. Тогда справедлива оценка*

$$|r(\alpha, n, I)| \leq 2\sum_{k=1}^{m} C_{b_k}^*(\alpha).$$

Задача об оценке величины $C_r^*(\alpha)$ является классической задачей теории чисел. В настоящее время получены неулучшаемые по порядку оценки для $C_{b_k}^*(\alpha)$ в терминах разложения α в цепную дробь [13], [2]. Приведем два следствия из этих оценок.

Следствие 1. *Пусть в обозначениях теоремы 2 I является множеством ограниченного остатка и неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены. Тогда справедлива оценка*

$$|r(\alpha, n, I)| \leq C_1 \sum_{k=1}^{m} \ln |b_k|$$

с некоторой абсолютной константой C_1.

Следствие 2. *Пусть в обозначениях теоремы 2 I является множеством ограниченного остатка и α – алгебраическое число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$|r(\alpha, n, I)| \leq C(\varepsilon) \sum_{k=1}^{m} |b_k|^{\varepsilon}$$

с некоторой константой, зависящей только от ε.

Отметим, что теорему 2 можно переформулировать следующим образом: *Множество I является множеством ограниченного остатка тогда и только тогда, когда запись функции $r(\alpha, n, I)$ в виде суммы дробных долей содержит независящее от n число слагаемых.*

В связи с этим замечанием представляет интерес следующая гипотеза.

Гипотеза. *Пусть числа $1, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ – линейно независимы над $\mathbb{Z}$, $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$ и $\sum_{i=1}^{m} k_i^2 \neq 0$. Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\sum_{i=1}^{m} k_i C_n(\alpha, \gamma_i)| = \infty.$$

Более того

$$|\sum_{i=1}^{m} k_i C_n(\alpha, \gamma_i)| \geq c(\alpha; \gamma_1, \ldots, \gamma_m; k_1, \ldots, k_m) \ln n$$

для бесконечно многих n.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Красильщиков В.В., Шутов А.В. Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей // Математические заметки. -2011. -Т. 89. -Вып. 1. -С. 43-52.

[2] Шутов А.В. О минимальных системах счисления // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам.:Межвуз.сб.науч.тр. -Саратов: Из-во Саратовского Университета. -2007. -Вып 4. -С. 125-138.

[3] Шутов А.В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. -2007. -Вып. 7(57) -С. 168-175.

[4] Шутов А.В. О распределении дробных долей // Чебышевский сборник. -Тула: Изд. ТГПУ. -2004. -Т. 5, Вып. 3. -С. 112-121.

[5] Шутов А.В. О распределении дробных долей II // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам.:Межвуз.сб.науч.тр. -Саратов: Из-во Саратовского Университета. -2005. -Вып 3. -С. 146-158.

[6] Шутов А.В. Системы счисления и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. - 2006. - Т. 7, Вып. 3. - С. 110-128.

[7] Drmota M., Tichy R. Sequences, discrepancies and applications. Springer. -1997.

[8] Furstenberg H., Keynes M., Shapiro L. Prime flows in topological dynamics // Israel J.Math. -1973. -V. 14. -P. 26-38.

[9] Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math.Sem.Hamburg Univ. -1921. -V. 5. -P. 54-76.

[10] Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. -1966. -V. 12. P. 193-212.

[11] Oren I. Admissible functions with multiplie discontinioutes // Israel J.Math. -1982. -V. 42. -P. 353-360.

[12] Petersen K. On a series of cosecants related to a problem in ergodic theory // Compositio Math. -1973. -V. 26. -P. 313-317.

[13] Pinner C.G. On Sums of Fractional Parts $\{n\alpha+\gamma\}$ // J.Number Theory. -1997. -V. 65. -P. 48-73.

[14] Shutov A.V. New estimates in the Hecke-Kesten problem // Anal. Probab. Methods Number Theory. Edited by E.Manstavičisus et al. Vilnius:TEV. -2007.

[15] Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. -1910. -V. 30. -P. 377-407.

Владимирский Государственный Университет
Поступило 15.08.2011