ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 12, с. 1680–1689

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

МЕТОД БУБНОВА–ГАЛЕРКИНА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

© 2002 г. С. Н. Тимергалиев

Целью настоящей работы является обоснование применимости метода Бубнова–Галеркина к исследованию краевых задач геометрически и физически нелинейной теории тонких упругих пологих оболочек. Особенностью работы является то, что исследования ведутся в некотором функциональном пространстве, отличном от пространств перемещений и усилий. В основе предложенного метода лежит идея выражения перемещения через вспомогательные функции. Такая же идея использовалась и в работах [1, 2], где разрешимость задач исследовалась топологическим методом с использованием аппарата обобщенных аналитических функций. В данной работе формулы для перемещения выводятся с помощью представления общего решения неоднородной системы Коши–Римана.

1. Построение математической модели. В основе исследований лежат следующие соотношения нелинейной теории пологих оболочек:

$$\varepsilon^0_{jj} \equiv \gamma^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - G^k_{jj}w_k - B_{jj}w_3 + \omega_j^2/2, \quad j = 1,2,$$

$$2\varepsilon^0_{12} \equiv \gamma^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G^k_{12}w_k - 2B_{12}w_3 + \omega_1\omega_2, \tag{1}$$

$$\varepsilon^1_{jj} \equiv \gamma^1_{jj} = -\omega_{j\alpha^j} + G^k_{jj}\omega_k, \quad j = 1,2,$$

$$2\varepsilon^1_{12} \equiv \gamma^1_{12} = -\omega_{1\alpha^2} - \omega_{2\alpha^1} + 2G^k_{12}\omega_k,$$

$$\sigma^{\lambda\mu} = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{qs} - \sigma^{\lambda\mu}_* \equiv \sigma^{\lambda\mu}_\tau - \sigma^{\lambda\mu}_*, \quad \lambda,\mu = 1,2, \tag{2}$$

где $\gamma_{qs} = \gamma^0_{qs} + \alpha^3\gamma^1_{qs}$, $\omega_j = w_{3\alpha^j}$ (здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование); ε^0_{ij} и ε^1_{ij} – компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности S_0 оболочки, заданной уравнением

$$\rho = \rho(\alpha^1, \alpha^2), \tag{3}$$

в котором α^1, α^2 будем рассматривать как декартовы координаты точек плоской ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей $\Gamma \in C^1_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$; предположим, что (3) есть гомеоморфизм между Ω и S_0 – непрерывное в обе стороны взаимно однозначное отображение, допускающее производные до второго порядка, ограниченные в $\bar\Omega$; кроме того, во всей области $\bar\Omega$ выполнено условие $D^2 = A_{11}A_{22} - A^2_{12} \geq c > 0$ (здесь и далее c – положительные постоянные), A_{ij} – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_0; B_{ij} – составляющие тензора кривизны S_0; $B^{\lambda\mu qs}$ – известные тензоры; G^k_{ij} – символы Кристоффеля; $\sigma^{\lambda\mu}$ – компоненты тензора напряжения, $\sigma^{\lambda\mu}_\tau$ и $\sigma^{\lambda\mu}_*$ – линейная и нелинейная части $\sigma^{\lambda\mu}$, причем считаем, что $\sigma^{\lambda\mu}_*$ как функция шести компонент деформации удовлетворяет условию Липшица; w_k и w_3 – тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0, удовлетворяющие следующим однородным граничным условиям на Γ:

$$w_1 = w_2 = w_3 = \partial w_3/\partial m = 0, \tag{4}$$

где m – орт нормали к Γ.

1.1. Вывод основных соотношений. Пусть $D_w(\bar\Omega)$ – пространство перемещений $w=(w_1,w_2,w_3)$ класса $w_i, w_{3\alpha^i}\in C(\bar\Omega)$, $w_{i\alpha^j}, w_{3\alpha^i\alpha^j}\in L_p(\bar\Omega)$, $p>2$, удовлетворяющих однородным граничным условиям (4). Каждому вектору перемещения w из $D_w(\bar\Omega)$ по формулам

$$\varepsilon_1=w_{1\alpha^1}-w_{2\alpha^2},\quad \varepsilon_2=w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1},\quad \varepsilon_3=-w_{3\alpha^1\alpha^1}-w_{3\alpha^2\alpha^2} \tag{5}$$

поставим в соответствие вектор-функцию $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$. Множество векторов ε обозначим через $D_\varepsilon(\bar\Omega)$, оно, очевидно, является линейным пространством.

Введем в рассмотрение комплексные функции $W_1=-w_{3\alpha^1}+iw_{3\alpha^2}$, $W_2=w_1+iw_2$. С их помощью соотношения (5) можно представить в комплексной форме

$$W_{j\bar z}=f_j/2,\quad j=1,2, \tag{6}$$

где $f_1=\varepsilon_3$, $f_2=\varepsilon_0=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$, $W_{j\bar z}=(W_{j\alpha^1}+iW_{j\alpha^2})/2$, $z=\alpha^1+i\alpha^2$.

Используя формулу (6.10) из [3, с. 42] и учитывая, что $W_j(z)$ удовлетворяют соотношению (6), для функций $W_j(z)$ будем иметь следующие представления через $\varepsilon\in D_\varepsilon(\bar\Omega)$:

$$W_j(z)=(Tf_j)(z)/2,\quad j=1,2, \tag{7}$$

где $Tf=-\pi^{-1}\iint_\Omega f(\zeta)/(\zeta-z)\,d\xi\,d\eta$, $\zeta=\xi+i\eta$.

Известно [3, с. 39, 46], что Tf суть вполне непрерывный оператор из $L_p(\bar\Omega)$ в $L_q(\bar\Omega)$ $(1\le q\le 2p/(2-p))$, если $1\le p\le 2$, и из $L_p(\bar\Omega)$ в $C_{(p-2)/p}(\bar\Omega)$, если $p>2$; функция $(Tf)(z)$ имеет обобщенные производные по $z,\bar z$ [3, с. 34, 36], которые определяются по формулам

$$\frac{\partial Tf}{\partial\bar z}=f,\quad \frac{\partial Tf}{\partial z}\equiv Sf=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta, \tag{8}$$

где интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. Отметим [3, с. 67], что Sf – линейный ограниченный оператор в $L_p(\bar\Omega)$, $p>1$. Кроме того, можно показать, что Tf – вполне непрерывный оператор из $L_p(\bar\Omega)$ $(1<p\le 2)$ в $L_\gamma(\Gamma)$ $(1<\gamma<p/(2-p))$.

Через функции $W_j(z)$ компоненты вектора перемещения $w\in D_w(\bar\Omega)$ выражаются формулами

$$w_1=2^{-1}\operatorname{Re}T\varepsilon_0,\quad w_2=2^{-1}\operatorname{Im}T\varepsilon_0,\quad w_3=-4^{-1}T\overline{T}\varepsilon_3\equiv 2^{-1}\tilde T\varepsilon_3. \tag{9}$$

Здесь мы учли, что $\partial w_3/\partial\bar z=-4^{-1}\overline{T}\varepsilon_3$, и воспользовались формулой (6.10) из [3, с. 42].

Компоненты деформации также выразим через $\varepsilon\in D_\varepsilon(\bar\Omega)$. Для этого с помощью формул (8) найдем производные по z, $\bar z$ функций $W_j(z)$, представленных в виде (7), затем через них определим $w_{i\alpha^j}$, $w_{3\alpha^i\alpha^j}$ и подставим их вместе с (7), (9) в соотношения (1). Тогда для компонент деформации получим следующие представления через $\varepsilon\in D_\varepsilon(\bar\Omega)$:

$$\gamma^k_{\lambda\mu}\equiv\gamma^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)=t^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)+\tau^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)+\varkappa^k_{\lambda\mu}(\varepsilon),\quad k=0,1,\quad \lambda,\mu=1,2, \tag{10}$$

которые в векторной форме запишем так: $\gamma\equiv\gamma(\varepsilon)=t(\varepsilon)+\tau(\varepsilon)+\varkappa(\varepsilon)$. Здесь

$$\begin{gathered} t^0_{jj}=(\operatorname{Re}S\varepsilon_0-(-1)^j\varepsilon_1)/2-\operatorname{Re}(g_{jj}T\varepsilon_0),\quad j=1,2,\quad t^0_{12}=\varepsilon_2-\operatorname{Re}(g_{12}T\varepsilon_0),\\ t^1_{jj}=(\varepsilon_3+(-1)^{j-1}\operatorname{Re}S\varepsilon_3)/2-\operatorname{Re}(\overline{g}_{jj}T\varepsilon_3),\quad j=1,2,\quad t^1_{12}=-\operatorname{Im}S\varepsilon_3-\operatorname{Re}(\overline{g}_{12}T\varepsilon_3), \end{gathered} \tag{11}$$

$$\tau^0_{ij}=b_{ij}\tilde T\varepsilon_3,\quad \tau^1_{ij}=0,\quad i,j=1,2, \tag{12}$$

$$\varkappa^0_{jj}=\omega_j^2(\varepsilon)/2,\quad \varkappa^0_{12}=\omega_1(\varepsilon)\omega_2(\varepsilon),\quad \varkappa^1_{ij}\equiv 0,\quad i,j=1,2, \tag{13}$$

где $b_{jj}=-B_{jj}$, $g_{jj}=(G^1_{jj}-iG^2_{jj})/2$, $j=1,2$, $b_{12}=-2B_{12}$, $g_{12}=G^1_{12}-iG^2_{12}$.

Используя соотношения (2), (7), (9), (10), с учетом тонкостенности оболочки для вариации потенциальной энергии деформации U и элементарной работы δA внешних сил нетрудно получить следующие представления через $\varepsilon \in D_\varepsilon(\bar{\Omega})$:

$$\delta U = \iint\limits_{\Omega} [Q\{t(\varepsilon); t(\delta\varepsilon)\} + Q_c(\varepsilon;\delta\varepsilon)] D\,d\alpha^1\,d\alpha^2 -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} [\sigma_1^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma^0_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon) + \sigma_2^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma^1_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon)] D\,d\alpha^1\,d\alpha^2, \tag{14}$$

$$\delta A \equiv A(\delta\varepsilon) = \operatorname{Re} \iint\limits_{\Omega} K(R,L;\delta\varepsilon) D\,d\alpha^1\,d\alpha^2, \tag{15}$$

$$Q_c(\varepsilon;\delta\varepsilon) = Q\{\gamma(\varepsilon); \tau(\delta\varepsilon) + \varkappa_\delta(\varepsilon;\delta\varepsilon)\} + Q\{\tau(\varepsilon) + \varkappa(\varepsilon); t(\delta\varepsilon)\}, \tag{16}$$

$$K(R,L;\delta\varepsilon) = 2^{-1}[(R^1 - iR^2)T\delta\varepsilon_0 - R^3\tilde{T}\delta\varepsilon_3 + (L^1 + iL^2)T\delta\varepsilon_3],$$
$$\sigma_k^{ij} = \int\limits_{-h}^{h} (\alpha^3)^{k-1}\sigma_*^{ij} d\alpha^3, \quad k = 1,2, \tag{17}$$

$Q\{\gamma_1;\gamma_2\}$ – билинейная форма переменных $\gamma_k = (\gamma_{k,11}, \gamma_{k,12}, \gamma_{k,22})$, $\gamma_{k,\lambda\mu} = \gamma^0_{k,\lambda\mu} + \alpha^3\gamma^1_{k,\lambda\mu}$, которая определяется формулой

$$Q\{\gamma_1;\gamma_2\} = \int\limits_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}\gamma_{1,\lambda\mu}\gamma_{2,qs}\,d\alpha^3 =$$

$$= D_p^{\lambda\mu qs}\gamma^0_{1,\lambda\mu}\gamma^0_{2,qs} + D_*^{\lambda\mu qs}(\gamma^0_{1,\lambda\mu}\gamma^1_{2,qs} + \gamma^1_{1,\lambda\mu}\gamma^0_{2,qs}) + D_u^{\lambda\mu qs}\gamma^1_{1,\lambda\mu}\gamma^1_{2,qs} \equiv$$
$$\equiv Q_p\{\gamma_1^0;\gamma_2^0\} + Q_*\{\gamma_1;\gamma_2\} + Q_u\{\gamma_1^1;\gamma_2^1\}, \tag{18}$$

$2h = \text{const}$ – толщина оболочки; R, L – известные вектор-функции, зависящие от внешних сил; для вариаций $\varkappa^k_{ij}(\varepsilon)$, $\gamma^k_{ij}(\varepsilon)$ приняты обозначения: $\delta\varkappa^k_{ij}(\varepsilon) \equiv \varkappa^k_{\delta,ij}(\varepsilon;\delta\varepsilon)$, $\delta\gamma^k_{ij}(\varepsilon) \equiv$ $\equiv \gamma^k_{\delta,ij}(\varepsilon;\delta\varepsilon)$.

В дальнейшем всюду будем считать, что $\Pi_\tau = \sigma_\tau^{\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}$ суть положительно-определенная квадратичная форма. Тогда, как легко видеть, квадратичные формы $Q\{\gamma;\gamma\} \equiv Q\{\gamma\}$, $Q_p\{\gamma^0\}$, $Q_u\{\gamma^1\}$, порожденные билинейной формой (18), также являются положительно-определенными в $\bar{\Omega}$.

1.2. Построение основного пространства. Каждой паре элементов $\varepsilon^j \in D_\varepsilon(\bar{\Omega})$, $j=1,2$, поставим в соответствие число

$$(\varepsilon^1,\varepsilon^2)_H = \iint\limits_{\Omega} Q\{t(\varepsilon^1); t(\varepsilon^2)\} D\,d\alpha^1\,d\alpha^2, \tag{19}$$

где билинейная форма Q дается формулой (18). Покажем, что (19) удовлетворяет всем условиям скалярного произведения. Пусть $(\varepsilon,\varepsilon)_H = 0$. В силу положительной определенности квадратичной формы $Q\{t\}$ имеем систему равенств $t^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) = 0$, $k = 0,1$, $\lambda,\mu = 1,2$. Из первого равенства вычтем второе, полученную разность прибавим к третьему равенству, умноженному на мнимую единицу i. В результате получим

$$\varepsilon_0 - \operatorname{Re}[(g_{11} - g_{22})T\varepsilon_0] - i\operatorname{Re}(g_{12}T\varepsilon_0) = 0. \tag{20}$$

Функция $W_2(z) = (1/2)T\varepsilon_0$ в силу (20) является обобщенной аналитической функцией в Ω. Кроме того, имеем $W_2(z) = 0$ на Γ. Тогда с учетом теоремы единственности для обобщенных аналитических функций [3, с. 123] получаем $W_2(z) \equiv 0$, следовательно, $\varepsilon_0 \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. С помощью остальных трех равенств $t^1_{\lambda\mu}(\varepsilon_3) = 0$, $\lambda, \mu = 1, 2$, аналогично показываем, что $\varepsilon_3 \equiv 0$. Выполнение остальных условий скалярного произведения очевидно. Замыкание $D_\varepsilon(\bar{\Omega})$ в норме $\|\varepsilon\|_H = (\varepsilon, \varepsilon)_H^{1/2}$ обозначим через $H(\bar{\Omega})$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть G^k_{ij}, $D^{\lambda\mu qs}_{p,*,u}$ ограничены в $\bar{\Omega}$ и область Ω является соболевской класса (2,1,2). Тогда $m_1\|\varepsilon\|^2_{L_2} \le \|\varepsilon\|^2_H \le m_2\|\varepsilon\|^2_{L_2}$, где $m_j > 0$ – постоянные, не зависящие от ε.*

Доказательство. Обозначим $v_1 = T\varepsilon_3$, $v_2 = T\varepsilon_0$. Выразив $\|\varepsilon\|^2_H$ через v_j $(j = 1, 2)$ и их производные по $z, \bar{z}$, заметим, что $\|\varepsilon\|^2_H$ в пространстве $W^{(1)}_{2\Omega}$ имеет ту же структуру, что и функционал $R(w)$ в теореме 10.8 из [4, с. 81]. Используя положительную определенность квадратичной формы $Q\{t\}$, неравенство Корна [5, с. 16], теоремы вложения для соболевских пространств (см., например, [4, с. 76–78]), указанные выше свойства операторов Tf, Sf, убеждаемся в том, что все условия теоремы 10.8 выполняются. Следовательно, $\|\varepsilon\|^2_H \ge c\|v\|^2_{W^{(1)}_{2\Omega}}$, $v = (v_1, v_2)$, откуда с учетом формул (8) получим нижнюю оценку. Верхняя оценка непосредственно вытекает из свойств операторов Tf, Sf и теорем вложения для пространств Соболева. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что $H(\bar{\Omega})$ – гильбертово пространство. В дальнейшем всюду будем считать, что упругие величины $B^{\lambda\mu qs}$ являются четными относительно переменной α^3. Тогда $D^{\lambda\mu qs}_* \equiv 0$ и для нормы $\|\varepsilon\|_H$ получаем $\|\varepsilon\|^2_H = \|\varepsilon_0\|^2_{H_1} + \|\varepsilon_3\|^2_{H_2}$, где $H_1(\bar{\Omega})$, $H_2(\bar{\Omega})$ – гильбертовы пространства функций $\varepsilon_0, \varepsilon_3$ соответственно с нормами $\|\varepsilon_0\|^2_{H_1} = \iint_\Omega Q_p\{t^0\}D d\alpha^1\, d\alpha^2$, $\|\varepsilon_3\|^2_{H_2} = \iint_\Omega Q_u\{t^1\}D\, d\alpha^1\, d\alpha^2$.

Имеет место

Лемма 1. *Пусть $\varepsilon \in H(\bar{\Omega})$. Тогда правые части формул (7) определяют функции $W_j(z) \in L_q(\bar{\Omega})$, $q \ge 1$, почти всюду удовлетворяющие граничным условиям (4).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in H(\bar{\Omega})$. Тогда существует последовательность $\varepsilon^n \in D_\varepsilon(\bar{\Omega})$ такая, что $\|\varepsilon^n - \varepsilon\|_H \to 0$, $n \to \infty$. Функции $W^n_j = Tf^n_j/2$, $n = 1, 2, \ldots$, по формулам (9) определяют $w^n \in D_w(\bar{\Omega})$. Используя свойства оператора Tf, будем иметь $\|W_j - W^n_j\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$, $\|w_3 - w^n_3\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$, $n \to \infty$, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть G^k_{ij}, B_{ij} ограничены в $\bar{\Omega}$. Тогда: 1) $t^k_{ij}(\varepsilon)$ суть линейные ограниченные операторы из $H(\bar{\Omega})$ в $L_2(\overline{\Omega})$ и $\|t^k_{ij}(\varepsilon)\|_{L_2} \le c\|\varepsilon\|_H$; 2) $\tau^k_{ij}(\varepsilon)$ и $\varkappa^k_{ij}(\varepsilon)$ суть вполне непрерывные соответственно линейные и нелинейные операторы из $H(\bar{\Omega})$ в $L_q(\bar{\Omega})$, $q \ge 1$, и $\|\tau^k_{ij}(\varepsilon)\|_{L_q} \le c\|\varepsilon\|_H$, $\|\varkappa^k_{ij}(\varepsilon)\|_{L_q} \le c\|\varepsilon\|^2_H$, $k = 0, 1$, $i, j = 1, 2$.*

Справедливость леммы 2 устанавливается с использованием формул (11)–(13), указанных выше свойств операторов Tf, Sf и теоремы 1.

1.3. Введение понятия обобщенного решения задачи.

Определение. Обобщенным решением задачи об изгибе оболочки в рамках модели (1)–(4) назовем вектор-функцию $\varepsilon \in H(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$(\varepsilon, \varphi)_H = A(\varphi) - \iint\limits_\Omega Q_c(\varepsilon; \varphi)D\, d\alpha^1\, d\alpha^2 + \iint\limits_\Omega [\sigma^{\lambda\mu}_1(\varepsilon)\gamma^0_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; \varphi) + \sigma^{\lambda\mu}_2(\varepsilon)\gamma^1_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; \varphi)]Dd\alpha^1 d\alpha^2 \quad (21)$$

для любой вектор-функции $\varphi \in H(\bar{\Omega})$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Здесь $A(\varphi)$, $Q_c(\varepsilon; \varphi)$, $\sigma^{\lambda\mu}_k(\varepsilon)$ даются формулами (15)–(17) соответственно.

В дальнейшем нахождение обобщенного решения задачи об изгибе оболочки назовем задачей A_0.

Если принять во внимание соотношения (14), (15), (19), то легко видеть, что (21) выражает вариационный принцип Лагранжа $\delta U = \delta A$, при этом вектор φ означает вариацию ε. В силу этого из интегрального соотношения (21) вытекают уравнения равновесия, представляющие собой систему нелинейных сингулярных интегральных уравнений относительно функций ε по области Ω. Поэтому при дополнительных условиях гладкости исходных данных обобщенное решение будет удовлетворять и этой системе. Если решение задачи существует, то по формулам (9), (10) можем найти компоненты перемещений и деформаций класса $w_i, w_{3\alpha^i} \in L_q(\bar{\Omega})$, $q \geq 1$, $\varepsilon^k_{\lambda\mu} \in L_2(\bar{\Omega})$, тем самым задача об изгибе оболочки полностью будет решена.

2. Исследование существования обобщенного решения. Имеет место следующая

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1, $R, L \in L_2(\bar{\Omega})$ и $|\sigma^{\lambda\mu}| \leq c(|\gamma_{11}| + |\gamma_{12}| + |\gamma_{22}|)$, $\lambda, \mu = 1, 2$. Тогда правая часть соотношения (21) представляет собой линейный ограниченный функционал в $H(\bar{\Omega})$ относительно $\varphi \in H(\bar{\Omega})$ при произвольно фиксированном $\varepsilon \in H(\bar{\Omega})$.*

Доказательство. Используя формулы (7), (13) и теорему 1, нетрудно получить оценки $\|\varkappa^0_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; \varphi)\|_{L_2} \leq c\|\varepsilon\|_H \|\varphi\|_H$, $\lambda, \mu = 1, 2$. Теперь если применить к интегралам в правой части соотношения (21) неравенство Гёльдера и учесть соотношения (15)–(17), лемму 2, то сразу получим утверждение леммы 3.

В силу леммы 3 по теореме Рисса существует элемент $G(\varepsilon) \in H(\bar{\Omega})$ такой, что правая часть соотношения (21) представляется в виде скалярного произведения $(G(\varepsilon), \varphi)_H$. Тогда с учетом произвольности вектора φ получаем равенство

$$\varepsilon - G(\varepsilon) = 0, \tag{22}$$

которое представляет собой нелинейное операторное уравнение в $H(\bar{\Omega})$.

Лемма 4. *Оператор $G(\varepsilon)$ представим в виде $G(\varepsilon) = G_c(\varepsilon; t_0) + G_*(\varepsilon; t_0) + t_0\varepsilon$, где операторы G_c, G_* определяются формулами*

$$(G_c(\varepsilon; t_0), \varphi)_H = A(\varphi) - (1 - t_0) \iint\limits_{\Omega} Q_c(\varepsilon; \varphi) D \, d\alpha^1 \, d\alpha^2, \tag{23}$$

$$(G_*(\varepsilon; t_0), \varphi)_H = \iint\limits_{\Omega} [\sigma_1^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma^0_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; \varphi) + \sigma_2^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma^1_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; \varphi) - t_0 Q\{\gamma(\varepsilon); \gamma_\delta(\varepsilon; \varphi)\}] D d\alpha^1 d\alpha^2, \tag{24}$$

t_0 – произвольно фиксированный параметр из промежутка [0,1).

Для доказательства леммы 4 к правой части соотношения (21) нужно добавить и вычесть величину $t_0 \iint_\Omega Q\{\gamma(\varepsilon); \gamma_\delta(\varepsilon; \varphi)\} D \, d\alpha^1 \, d\alpha^2$ и учесть соотношения (10), (19), лемму 3, теорему Рисса.

В силу леммы 4 уравнение (22) можно представить в виде

$$(1 - t_0)\varepsilon - G_c(\varepsilon; t_0) - G_*(\varepsilon; t_0) = 0. \tag{25}$$

Таким образом, нахождение обобщенного решения задачи A_0 свелось к эквивалентному уравнению (25). Прежде чем приступить к нахождению приближенных решений уравнения (25), докажем ряд утверждений.

Теорема 2. *Оператор $G_c(\varepsilon; t_0)$ при фиксированном $t_0 \in [0, 1)$ действует из $H(\bar{\Omega})$ в $H(\bar{\Omega})$ усиленно непрерывно.*

Доказательство. Пусть ε^n, $n = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon^0 \in H(\bar{\Omega})$ и $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ в $H(\bar{\Omega})$, $n \to \infty$ (здесь и в дальнейшем одной стрелкой будем обозначать слабую, а двумя стрелками – сильную сходимости в $H(\bar{\Omega})$). С учетом усиленной непрерывности линейных вполне непрерывных операторов из леммы 2 будем иметь $t(\varepsilon^n) \to t(\varepsilon^0)$ в $L_2(\bar{\Omega})$, $\tau(\varepsilon^n) \rightrightarrows \tau(\varepsilon^0)$, $\varkappa(\varepsilon^n) \rightrightarrows \varkappa(\varepsilon^0)$, $\varkappa_\delta(\varepsilon^n; \varphi) \rightrightarrows \varkappa_\delta(\varepsilon^0; \varphi)$ в $L_q(\bar{\Omega})$, $q \geq 1$, $n \to \infty$, причем $\|\varkappa_\delta(\varepsilon^n; \varphi) - \varkappa_\delta(\varepsilon^0; \varphi)\|_{L_q} \leq c_n \|\varphi\|_H$, где $c_n \to 0$ при $n \to \infty$. Учитывая это и принимая во внимание ограниченность слабо сходящихся последовательностей, усиленную непрерывность оператора T^*f, сопряженного Tf, из (23) при помощи неравенства Гёльдера получаем $|(G_c(\varepsilon^n; t_0) - G_c(\varepsilon^0; t_0), \varphi)_H| \leq c\delta_n \|\varphi\|_H$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда $\|G_c(\varepsilon^n; t_0) - G_c(\varepsilon^0; t_0)\|_H \leq c\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, т.е. оператор G_c усиленно непрерывен. Теорема доказана.

Пусть $\varepsilon^0 \in H(\bar{\Omega})$ – решение системы нелинейных уравнений

$$t^0_{ij}(\varepsilon_0) + \varkappa^0_{ij}(\varepsilon_3) = 0, \quad ij = 11, 22, 12, \tag{26}$$

где t_{ij}^0, $\varkappa_{ij}^0$ даны формулами (11), (13). Вычитая из первого уравнения в (26) второе и прибавляя к третьему, умноженному на мнимую единицу i, получаем

$$\varepsilon_0 - K\varepsilon_0 = 2^{-1}(\omega_2^2 - \omega_1^2) - i\omega_1\omega_2, \tag{27}$$

где оператор $K\varepsilon_0 = \operatorname{Re}[(g_{11} - g_{22})T\varepsilon_0] + i\operatorname{Re}(g_{12}T\varepsilon_0)$ вполне непрерывен в пространствах $L_p(\bar{\Omega})$, $p \geq 1$.

В уравнении (27) фиксируем ε_3 и исследуем его разрешимость относительно $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ в $L_1(\bar{\Omega})$. Пусть $\varepsilon_0 \in L_1(\bar{\Omega})$ – нетривиальное решение однородного уравнения

$$\varepsilon_0 - K\varepsilon_0 = 0. \tag{28}$$

Ясно, что это решение $\varepsilon_0 \in L_p(\bar{\Omega})$, $p > 2$. Введем функцию $v(z) = (T\varepsilon_0)(z)$, которая $v \in C_{(p-2)/p}(\bar{\Omega})$ и $\partial v/\partial\bar{z} = \varepsilon_0$. Тогда из (28) вытекает, что $v(z)$ суть обобщенная аналитическая функция в Ω. Кроме того, $v(z)$ непрерывно продолжается на всю плоскость, причем она голоморфна вне $\bar{\Omega}$ и $v(\infty) = 0$. В силу обобщенной теоремы Лиувилля [3, с. 128] $v(z) \equiv 0$, откуда $\varepsilon_0 \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Следовательно, существует обратный оператор $(I - K)^{-1}$ (I – тождественный оператор), ограниченный в $L_1(\bar{\Omega})$. Применяя этот оператор к обеим частям уравнения (27), получаем $\varepsilon_0 = (I - K)^{-1}(2^{-1}(\omega_2^2 - \omega_1^2) - i\omega_1\omega_2)$, откуда

$$\|\varepsilon_0\|_{L_1} \leq 2^{-1}\|(I - K)^{-1}\|_{L_1}\|\omega_1^2 + \omega_2^2\|_{L_1}. \tag{29}$$

Вернемся к системе (26), в которой ε заменим решением ε^0. Складывая первые два тождества в (26) и интегрируя по области Ω, после несложных преобразований получаем $\|\omega_1^2(\varepsilon_3^0) + \omega_2^2(\varepsilon_3^0)\|_{L_1} = -2\operatorname{Re}\iint_\Omega T(g_{11} + g_{22})\varepsilon_0^0\,d\alpha^1\,d\alpha^2$, откуда с учетом оценки (29), очевидно, справедливой для решения $\varepsilon^0 = (\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0)$ системы (26), будем иметь

$$\|\omega_1^2(\varepsilon_3^0) + \omega_2^2(\varepsilon_3^0)\|_{L_1} \leq q\|\omega_1^2(\varepsilon_3^0) + \omega_2^2(\varepsilon_3^0)\|_{L_1}, \tag{30}$$

где $q = \|(I - K)^{-1}\|_{L_1}\|T(g_{11} + g_{22})\|_C$.

Пусть выполнено условие

$$q < 1. \tag{31}$$

Тогда из (30) сразу следует, что $\omega_j(\varepsilon_3^0) \equiv 0$, откуда $\varepsilon_3^0 \equiv 0$ и из (29) $\varepsilon_0^0 \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Итак, доказана

Лемма 5. *Пусть выполнено условие (31). Тогда если $\varepsilon^0 \in H(\bar{\Omega})$ есть решение системы (26), то $\varepsilon^0 \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.*

Рассмотрим функционал $\Phi(\varepsilon;\mu) = ((1 - t_0)\varepsilon - \mu G_c(\varepsilon; t_0) - \mu G_*(\varepsilon; t_0), a)_H$, определенный на $H(\bar{\Omega}) \times [0, 1]$, где $a = (2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Получим оценку снизу для $\Phi(\varepsilon;\mu)$ на эллипсоиде $S(R, 0)$ пространства $H(\bar{\Omega})$, заданном при помощи соотношений $\varepsilon_i = R^2\varepsilon_i^*$, $i = 1, 2$, $\varepsilon_3 = R\varepsilon_3^*$, $\|\varepsilon^*\|_H = 1$, $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*)$, $R > 0$ – некоторая постоянная, при этом будем следовать схеме, предложенной в [4, с. 134–138] для оценки подобных функционалов.

Используя формулы (16), (18), (19), (23), (24), а также равенства $\varkappa_\delta(\varepsilon; a) = 2\varkappa(\varepsilon)$, $\gamma_\delta^0(\varepsilon; a) = 2\gamma^0(\varepsilon) - \tau^0(\varepsilon)$, $\gamma_\delta^1(\varepsilon; a) = \gamma^1(\varepsilon)$, функционалу $\Phi(\varepsilon;\mu)$ можно придать вид

$$\Phi(\varepsilon;\mu) = (1 - t_0)\left\{\|\varepsilon_3\|_{H_2}^2 + 2(1 - \mu)\|\varepsilon_0\|_{H_1}^2 + \mu\iint\limits_\Omega [2Q_p\{\gamma^0\} - Q_p\{\gamma^0; \tau^0\}]D\,d\alpha^1\,d\alpha^2\right\} -$$

$$- \mu(J_1(\varepsilon) - 2t_0J_2(\varepsilon)) - \mu\iint\limits_\Omega [t_0Q_p\{\gamma^0; \tau^0\} - \sigma_1^{\lambda\mu}\tau_{\lambda\mu}^0]D\,d\alpha^1\,d\alpha^2 - \mu A(a), \tag{32}$$

где $J_1(\varepsilon) = \iint_\Omega (2\sigma_1^{\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}^0 + \sigma_2^{\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}^1)D\,d\alpha^1\,d\alpha^2$, $J_2(\varepsilon) = 2^{-1}\|\varepsilon_3\|_{H_2}^2 + \iint_\Omega Q_p\{\gamma^0\}D d\alpha^1 d\alpha^2$; $Q_{p,u}$ определены формулой (18).

Пусть существует параметр $t_0 \in [0,1)$ такой, что в достаточно большой части пространства $H(\bar{\Omega})$ выполнены условия

$$|J_1(\varepsilon)-2t_0J_2(\varepsilon)| \le (1-t_0)J_2(\varepsilon), \quad \|G_*(\varepsilon^1;t_0)-G_*(\varepsilon^2;t_0)\|_H \le (1-t_0)q_*\|\varepsilon^1-\varepsilon^2\|_H, \quad q_*<1. \tag{33}$$

С помощью первого неравенства в (33) из (32) получаем

$$\Phi(\varepsilon;\mu) \ge (1-t_0)\left\{\frac{1}{2}\|\varepsilon_3\|^2_{H_2} + 2(1-\mu)\|\varepsilon_0\|^2_{H_1} + \mu\iint\limits_{\Omega} Q_p\{\gamma^0\}D\,d\alpha^1\,d\alpha^2\right\} -$$

$$-\mu\iint\limits_{\Omega}[|Q_p\{\gamma^0;\tau^0\}| + |\sigma_1^{\lambda\mu}\tau^0_{\lambda\mu}|]D\,d\alpha^1\,d\alpha^2 - \mu|A(a)| \equiv \Phi_c(\varepsilon;\mu). \tag{34}$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi_{41}(\varepsilon;\mu) = (1-t_0)\left[2(1-\mu)\|\varepsilon_0\|^2_{H_1} + \mu\iint\limits_{\Omega} Q_p\{t^0+\varkappa^0\}D\,d\alpha^1\,d\alpha^2\right].$$

Легко видеть, что $\Phi_{41}(\varepsilon;\mu)$ на $S(R,0)$ представляет собой однородную по R четвертой степени часть функционала $\Phi_c(\varepsilon;\mu)$; остальные слагаемые в (34) имеют по R степень не выше третьей. Используя лемму 2, теорему 1, будем иметь

$$\Phi_{41}(\varepsilon;\mu) \ge (1-t_0)(\|\varepsilon_0\|^2_{H_1} - c\|\varepsilon_0\|_{H_1}\|\varepsilon_3\|^2_{H_2}), \quad \mu\in[0,1]. \tag{35}$$

Пусть $S_1(R,0) = \{\varepsilon\in S(R,0)|\ \ \|\varepsilon_3\|_{H_2} \le \delta_0 R\}$, где $0<\delta_0<1$ – некоторая постоянная. В силу (35) δ_0 можем выбрать так, чтобы на $S_1(R,0)$ имело место неравенство

$$\Phi_{41}(\varepsilon;\mu) \ge (1-t_0)m_3R^4 \quad \forall\mu\in[0,1], \tag{36}$$

где $m_3>0$ не зависит от R, μ. Используя (36), а также оценки

$$\|\sigma_k^{\lambda\mu}\|_{L_2} \le c\|\gamma^j_{qs}\|_{L_2}\cdot 1^{qs}_j|_{j=0,1}, \quad \lambda,\mu,k=1,2, \tag{37}$$

которые легко получаются из (17) с учетом условий леммы 3, из (34) получаем $\Phi(\varepsilon;\mu) \ge$ $\ge (1-t_0)m_3R^4 - c(R^3+R^2+R)$, откуда при достаточно больших R

$$\Phi(\varepsilon;\mu) \ge 2^{-1}(1-t_0)m_3R^4 \quad \forall\mu\in[0,1]. \tag{38}$$

Теперь $\Phi(\varepsilon;\mu)$ оценим на остальной части эллипсоида $S_2(R,0) = S(R,0)\backslash S_1(R,0)$. Множество $S_2(R,0)$ разобьем на две части: $S_2(R,0) = S_2'(R,0)\cup S_2''(R,0)$, где $S_2'(R,0)$ – множество элементов $\varepsilon\in S_2(R,0)$, удовлетворяющих неравенству

$$I(\varepsilon) \equiv \iint\limits_{\Omega}|(R^1-iR^2)T\varepsilon_0|Dd\alpha^1d\alpha^2 + \frac{1}{2\delta}(\|DD_p^{\lambda\mu qs}\|_C\cdot 1_{\lambda\mu} + \|D\|_C)\|\tau^0_{qs}(\varepsilon_3)\|^2_{L_2} > \frac{1}{4}(1-t_0)\delta_0^2R^2, \tag{39}$$

где постоянная $\delta_0>0$ определена при помощи (36).

На $S_2''(R,0)$, следовательно, выполняется условие

$$I(\varepsilon) \le 4^{-1}(1-t_0)\delta_0^2R^2. \tag{40}$$

Пусть $\overline{S_2'(R,0)}$ есть слабое замыкание $S_2'(R,0)$. Имеет место

Лемма 6. *Множество* $\overline{S_2'(R,0)}$ *не содержит нуля.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon^n\in S_2'(R,0)$ и $\varepsilon^n\to 0$ в $H(\bar{\Omega})$, $n\to\infty$. В силу вполне непрерывности линейных операторов $T\varepsilon_0$, $\tau^0_{qs}(\varepsilon_3)$ в $L_2(\bar{\Omega})$ получаем $I(\varepsilon^n)\to 0$, $n\to\infty$, т.е.

начиная с некоторого номера n_0 для всех ε^n $(n > n_0)$ неравенство (39) становится невозможным. Полученное противоречие доказывает лемму 6.

Введем функционал $\Phi_{42}(\varepsilon) = \iint_\Omega Q_p\{t^0 + \varkappa^0\} D\, d\alpha^1\, d\alpha^2$. Справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 5. Тогда на* $S_2'(R,0)$ *имеет место неравенство* $\Phi_{42}(\varepsilon) \geq m_4 R^4$, *где постоянная* $m_4 > 0$ *не зависит от* R.

Доказательство. Пусть последовательность $\varepsilon^n \in S_2'(R,0)$ такая, что $\Phi_{42}(\varepsilon^n) \to 0$, $n\to\infty$, и пусть $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ в $H(\bar\Omega)$, $n \to \infty$, $\varepsilon^0 \in \overline{S_2'(R,0)}$. Нетрудно видеть, что функционал $\Phi_{42}(\varepsilon)$ слабо полунепрерывен снизу в $H(\bar\Omega)$. Следовательно, $\Phi_{42}(\varepsilon^0) = 0$, откуда $t^0(\varepsilon^0) + \varkappa^0(\varepsilon^0) = 0$, т.е. ε^0 – решение системы (26). В силу леммы 5 $\varepsilon^0 \equiv 0$ в $\bar\Omega$, что противоречит лемме 6. Теорема доказана.

Пусть $\varepsilon \in S_2'(R,0)$. Из (34) с учетом теоремы 3, леммы 2, неравенств (37) получаем $\Phi(\varepsilon;\mu) \geq 2^{-1}(1-t_0)\delta_0^2R^2 + \mu[(1-t_0)m_4R^4 - c(R^3+R^2+R)]$, откуда при достаточно больших R

$$\Phi(\varepsilon;\mu) \geq 2^{-1}(1-t_0)\delta_0^2R^2, \quad \mu\in[0,1]. \tag{41}$$

Пусть $\varepsilon \in S_2''(R,0)$. Применяя к интегралу $\iint_\Omega(|Q_p\{\gamma^0;\tau^0\}| + |\sigma_1^{\lambda\mu}\tau_{\lambda\mu}^0|)D\,d\alpha^1\,d\alpha^2$ в (34) неравенство Коши с “ δ ” и принимая во внимание теорему 3, лемму 2, неравенства (37), (40), из (34) получаем

$$\Phi(\varepsilon;\mu) \geq 8^{-1}(1-t_0)\delta_0^2R^2 +$$
$$+\mu(1-t_0)\left[\iint\limits_\Omega (8^{-1}Q_u\{\gamma^1\} + Q_p\{\gamma^0\})D\,d\alpha^1\,d\alpha^2 - c(\delta/2)\|\gamma_{\lambda\mu}^k\|_{L_2}^2\cdot 1_k^{\lambda\mu}\right] - cR. \tag{42}$$

Поскольку $Q_u\{\gamma^1\}$, $Q_p\{\gamma^0\}$ суть положительно-определенные квадратичные формы переменных $\gamma_{\lambda\mu}^1$, $\gamma_{\lambda\mu}^0$ соответственно, постоянную $\delta > 0$ можем выбрать так, чтобы выражение в квадратных скобках в (42) было неотрицательным. Выбрав δ таким образом, из (42) для любого $\varepsilon \in S_2''(R,0)$ при достаточно больших R получаем оценку

$$\Phi(\varepsilon;\mu) \geq (1-t_0)\delta_0^2R^2/16, \quad \mu\in[0,1], \tag{43}$$

которая в силу (38), (41) справедлива на всем эллипсоиде $S(R,0)$.

Перейдем к нахождению решений задачи A_0. Пусть $\{e_0^n = (e_1^n, e_2^n)\}$ и $\{e_3^n\}$ – базисы в пространствах $H_1(\bar\Omega)$ и $H_2(\bar\Omega)$, которые для простоты выкладок считаем ортонормированными. Тогда $\{e^n = (e_1^n, e_2^n, e_3^n)\}$, очевидно, есть ортонормированный базис в $H(\bar\Omega)$. Приближенное решение задачи A_0 ищем в виде

$$\varepsilon^n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^k \equiv \alpha_k e^k, \tag{44}$$

где $\alpha_k = \alpha_k(n)$ – неизвестные постоянные.

Подставляя (44) в (25) и умножая скалярно (25) последовательно на функции $\tilde e^1, \tilde e^2, \ldots, \tilde e^n$, $\tilde e^k = (2e_1^k, 2e_2^k, e_3^k)$, для определения неизвестных постоянных α_k получаем систему вида

$$3(1-t_0)\alpha_k - (G_c(\varepsilon^n;t_0), \tilde e^k)_H - (G_*(\varepsilon^n;t_0), \tilde e^k)_H = 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{45}$$

где параметр t_0 определен при помощи (33).

Исследуем разрешимость системы (45). Пусть H_n – n-мерное подпространство $H(\bar\Omega)$, натянутое на функции $e^1, e^2, \ldots, e^n$. В H_n рассмотрим непрерывное векторное поле $N(N_1,\ldots,N_n)$, $N_k(\varepsilon^n) = 3(1-t_0)\alpha_k - (G_c(\varepsilon^n;t_0), \tilde e^k)_H - (G_*(\varepsilon^n;t_0), \tilde e^k)_H$.

Имеет место

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда векторное поле* $N(\varepsilon^n)$ *на эллипсоиде* $S(R_n,0)$ *пространства* H_n *при достаточно большом* R_n *гомотопно полю* $3(1-t_0)I$.

Доказательство. Рассмотрим в H_n векторные поля $\tilde N(\varepsilon^n;\mu)(\tilde N_1,\ldots,\tilde N_n)$, $\tilde N_k(\varepsilon^n;\mu) = 3(1-t_0)\alpha_k - \mu(G_c(\varepsilon^n;t_0),\tilde e^k)_H - \mu(G_*(\varepsilon^n;t_0),\tilde e^k)_H$, $\mu\in[0,1]$.

Заметим, что $\tilde{N}(\varepsilon^n;0) = 3(1-t_0)I$, $\tilde{N}(\varepsilon^n;1) = N(\varepsilon^n)$. Покажем, что на $S(R_n,0)$ при достаточно большом R_n $\tilde{N}(\varepsilon^n;\mu) \neq 0$ $\forall\mu \in [0,1]$. Пусть от противного при некотором ε^n и $\mu_0 \in [0,1]$

$$\tilde{N}(\varepsilon^n;\mu_0) = 0. \tag{46}$$

Умножив (46) скалярно на $\varepsilon^n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, получим

$$3(1-t_0)\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 - \mu_0\sum_{k=1}^{n}(G_c(\varepsilon^n;t_0) + G_*(\varepsilon^n;t_0),\alpha_k\tilde{e}^k)_H =$$

$$= (1-t_0)(\varepsilon^n,a^n)_H - \mu_0(G_c(\varepsilon^n;t_0) + G_*(\varepsilon^n;t_0),a^n)_H = \Phi(\varepsilon^n;\mu_0) = 0, \quad a^n = \alpha_k\tilde{e}^k,$$

что в силу (43) невозможно, если $R_n = R$, где R определена с помощью неравенств (38), (41), (43) и, очевидно, не зависит от n. Теорема доказана.

Из теоремы 4 следует, что вращение векторного поля $N(\varepsilon^n)$ на $S(R_n,0)$ равно $+1$. Следовательно [6, с. 98–100], система (45) имеет при каждом n по крайней мере одно решение; приближенные решения ε^n, $n = 1,2,\ldots$, задачи A_0, определенные формулой (44), лежат внутри эллипсоида $S(R,0)$; в силу этого множество $\{\varepsilon^n\}$ приближенных решений является слабо компактным множеством.

Теорема 5. *Всякий слабый предел ε^0 элементов из $\{\varepsilon^n\}$ является обобщенным решением задачи A_0.*

Доказательство. В силу второго условия из (33) оператор $\tilde{G}_*(\varepsilon;t_0) = G_*(\varepsilon;t_0)/(1-t_0)$ в достаточно большой части пространства $H(\bar{\Omega})$ является сжимающим. Поэтому уравнение (25) в эллипсоиде $S(R,0)$ можно заменить эквивалентным

$$\varepsilon - \tilde{R}_*\tilde{G}_c(\varepsilon;t_0) = 0, \tag{47}$$

где $\tilde{G}_c = G_c/(1-t_0)$, $\tilde{R}_*$ – резольвента оператора $\tilde{G}_*$.

Пусть ε^n – подпоследовательность приближенных решений уравнения (25) из $\{\varepsilon^n\}$ и $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ в $H(\bar{\Omega})$, $n\to\infty$. Из свойств резольвенты [6, с. 148–150] и теоремы 2 следует, что $\tilde{R}_*\tilde{G}_c(\varepsilon;t_0)$ суть усиленно непрерывный оператор в $H(\bar{\Omega})$. Из эквивалентности уравнений (25) и (47) вытекает, что ε^n удовлетворяют также системе

$$(\varepsilon^n,e^k)_H - (\tilde{R}_*\tilde{G}_c(\varepsilon^n;t_0),e^k)_H = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{48}$$

Если теперь в (48) при фиксированном k перейти к пределу при $n\to\infty$, то получим $(\varepsilon^0,e^k)_H - (\tilde{R}_*\tilde{G}_c(\varepsilon^0;t_0),e^k)_H = 0$, $k=\overline{1,n}$, откуда $(\varepsilon^0,\varphi^n)_H - (\tilde{R}_*\tilde{G}_c(\varepsilon^0;t_0),\varphi^n)_H = 0$ для любого $\varphi^n = c_ke^k$ с любым n.

Так как множество таких φ^n плотно в $H(\bar{\Omega})$, элемент ε^0 будет удовлетворять равенству

$$(\varepsilon^0,\varphi)_H - (\tilde{R}_*\tilde{G}_c(\varepsilon^0;t_0),\varphi)_H = 0 \tag{49}$$

для любого $\varphi \in H(\bar{\Omega})$, т.е. ε^0 – решение уравнения (47), а значит, и уравнения (25). Теорема доказана.

Теорема 6. *Всякая слабо сходящаяся последовательность из $\{\varepsilon^n\}$ сходится сильно в $H(\bar{\Omega})$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$, $n\to\infty$. В силу теоремы 5 элемент ε^0 суть обобщенное решение задачи A_0. Из (49) при $\varphi = \varepsilon^0$ будем иметь

$$\|\varepsilon^0\|_H^2 = (\tilde{R}_*\tilde{G}_c(\varepsilon^0;t_0),\varepsilon^0)_H, \tag{50}$$

а из (48) получаем

$$\|\varepsilon^n\|_H^2 = (\tilde{R}_*\tilde{G}_c(\varepsilon^n;t_0),\varepsilon^n)_H. \tag{51}$$

Теперь, используя (50), (51), легко получаем $\|\varepsilon^n\|_H \to \|\varepsilon^0\|_H$, $n\to\infty$. Следовательно [7, с. 196], $\varepsilon^n \rightrightarrows \varepsilon^0$, $n\to\infty$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00410).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н.* // Изв. вузов. Математика. 1998. № 9. С. 70–80.
2. *Тимергалиев С.Н.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1412–1419.
3. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1988.
4. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М., 1989.
5. Математическая энциклопедия. Т. 3. М., 1982.
6. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.

Камский политехнический институт

Поступила в редакцию
11.12.1999 г.