ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 80, № 1
июль, 1989

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ УРАВНЕНИЯ SINE-ГОРДОН

Котляров В. П.

Изучается асимптотика при больших временах решений уравнения sine-Гордон, стремящихся к нулю при $x\to\infty$, а при $x\to-\infty$ – к конечнозонному решению уравнения (1). Показано, что в области переднего фронта такие решения при $t\to\infty$ распадаются на бесконечную серию солитонов с переменными фазами, порожденных непрерывным спектром L-оператора из соответствующей пары Лакса.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются решения $u(x, t)$ уравнения

$$(1) \qquad u_{xt}+4\sin u=0,$$

которые стремятся к нулю при $x\to\infty$, а при $x\to-\infty$ – к конечнозонным решениям уравнения (1). Изучается поведение таких решений при больших временах. Оказывается, что $u(x, t)$ в окрестности переднего фронта представляет собой суперпозицию обычных и асимптотических солитонов. Первые, как обычно, порождены дискретным спектром оператора Дирака, ассоциированного с уравнением (1) в методе обратной задачи рассеяния, а вторые – непрерывным спектром этого оператора, лежащим в комплексной области спектрального параметра и обусловленного осциллирующим характером поведения решения $u(x, t)$ при $x\to-\infty$.

Аналогичные задачи для других вполне интегрируемых нелинейных уравнений рассматривались в [1–4].

Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим следующую задачу для уравнения, эквивалентного (1):

$$(2) \qquad v_t=4\sin\left[\int\limits_x^\infty v(\xi,t)\,d\xi\right],\qquad u(x,t)=-\int\limits_x^\infty v(\xi,t)\,d\xi,$$

$$(3) \qquad v(x,0)=v_0(x),\ -\infty<x<\infty,\ t>0,$$

$$(4) \qquad v_0(x)\to\begin{cases}0, & x\to+\infty,\\ u_n'(x,0), & x\to-\infty,\end{cases}$$

а функция $u_n'(x, 0)$ – производная по x n-зонного решения $u_n(x, t)$ уравнения (1) [5].

Будем предполагать, что решение задачи (2)–(4) существует, является единственным, обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам.

Основная цель работы — исследовать асимптотику $u(x, t)$ при $t\to\infty$ в окрестности переднего фронта на основе метода обратной задачи рассеяния.

Как известно [6], уравнение (1) представимо в форме Захарова — Шабата

$$U_t-V_x+[U, V]=0, \tag{5}$$

представляющего собой условие совместности систем линейных уравнений

$$F_x=UF, \quad U=-i\lambda\sigma_3+iu_x\sigma_1/2, \tag{6}$$

$$F_t=VF, \quad V=(\sigma_3\cos u+\sigma_2\sin u)/i\lambda, \tag{7}$$

где σ_i — матрицы Паули. Оператор, порожденный системой (6) с функцией (4), является несамосопряженным в $L_2(R)$, и его спектр есть объединение спектров операторов (6) с $u(x, t)\equiv 0$ и $u(x, t)\equiv u_n(x, t)$, соответственно, т. е. состоит из вещественной оси (двукратный спектр) и аналитических дуг, концы которых E_j и $\bar{E}_j$ $(j=\overline{1, 2n})$ расположены симметрично относительно вещественной и мнимой осей (простой спектр). Точки E_j и $\bar{E}_j$ удобно задавать как нули полинома

$$P(\lambda^2)=\prod_{i=1}^{2k}(\lambda^2+E_i^2)\prod_{j=2k+1}^{m+2k+1}(\lambda^2-E_j^2)(\lambda^2-\bar{E}_j^2), \qquad \operatorname{Re}E_i=0, \qquad i\leqslant 2k. \tag{8}$$

Пусть

$$C=\max_{\lambda\in S\setminus S_0}\{|\lambda|^{-2}\chi[\rho(\lambda, S_0)]\}>0, \tag{9}$$

где $\rho(\lambda, S_0)$ — расстояние от точки $\lambda\in S\setminus S_0$ до S_0, $\chi(\rho)=1$, $\rho>0$ и $\chi(0)=0$, S — непрерывный спектр, а S_0 — невозмущенный спектр (вещественная ось). Будем предполагать, что максимум в (9) достигается лишь в конечном числе точек $\bar{E}_j$ $(j=\overline{1, 2p})$ и что внутри круга радиуса $1/C$ нет точек дискретного спектра системы (6). Тогда при $t\to\infty$ для решения $u(x, t)$ задачи (2) — (4) в области $x>Ct-(2a)^{-1}\ln t^{N+1}$ ($a=\max\operatorname{Im}\bar{E}_j$, N — любое натуральное число) справедлива асимптотическая формула

$$u(x,t)=4\operatorname{arctg}\left.\frac{\operatorname{Im}\det[I+\Omega(\xi,t)]}{\operatorname{Re}\det[I+\Omega(\xi,t)]}\right|_{\xi=x-Ct}, \qquad (\operatorname{mod}2\pi), \tag{10}$$

где $\Omega(\xi, t)=\|A^{lr}(\xi, t)\|_1^p$ — блочная матрица с элементами

$$A_{kj}^{lr}(\xi,t)=\sum_{m=0}^{N-k-1}\frac{\omega_l^{(k+m)}(t)}{k!m!t^{k+m+3/2}}J_{m+j}^{lr}(\xi), \qquad k,j=\overline{0,N-1},$$

$$J_n^{lr}(\xi)=\int_\xi^\infty\tau^n\exp[i(E_l+F_r)\tau]d\tau, \qquad l,r=\overline{1,p},$$

в которых функции $\omega_l^{(n)}(t)$ определяются начальными данными (см. формулу (2.8)).

Рассмотрим два типичных случая.

1. Пусть максимум в (9) достигается в двух точках $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$. Тогда эти

точки $\pm iE$ лежат на мнимой оси и являются нулями полинома (8), а $C=$ $=E^{-2}$. Из формулы (10) в этом случае вытекает, что при $t\to\infty$ в области $x>Ct-(2E)^{-1}\ln t^{N+1}$ верна формула

$$(11)\qquad u(x,t)\simeq\pm\sum_{n=1}^{N_1}\{4\,\mathrm{arctg}\exp[-2E(x-Ct-\alpha_n)-\ln t^{2n-1/2}]+2\pi(n-1)\},$$

где N_1 — целая часть $\left[\dfrac{N+1}{2}\right]$, α_n — фазы, определяемые по начальным данным (см. формулы (3.13)).

2. Пусть максимум в (9) достигается в четырех точках: $\pm E$, $\pm\bar{E}$. Тогда для решения $u(x,t)$ справедлива формула

$$(12)\qquad u(x,t)\simeq$$
$$\simeq\sum_{n=1}^{N_1}4\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{\mathrm{Im}\,E}{|\mathrm{Re}\,E|}\frac{\sin[2\,\mathrm{Re}\,E(x+\beta_n+t|E|^{-2})]}{\mathrm{ch}[2\,\mathrm{Im}\,E(x+\gamma_n-t|E|^{-2})+\ln t^{2n-1/2}]}\right\}.$$

Фазы β_n и γ_n определяются начальными данными (формулы (3.22), (3.23)).

Если у рассматриваемого оператора (6) имеется и дискретный спектр, то при условии, что все точки этого спектра лежат вне круга радиуса $|E|^{-2}$, асимптотические формулы (10)—(12) не изменятся. Если среди них имеются точки, лежащие внутри круга радиуса $|E|^{-2}$, то в области $x>$ $>Ct$ появятся обычные солитоны — кинки и бризеры, движущиеся со скоростями большими, чем C.

1. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Определим одно из решений Йоста уравнения

$$(1.1)\qquad i\sigma_3\frac{d\psi}{dx}+\frac{i}{2}u_x\sigma_2\psi=\lambda\psi$$

условием

$$\Phi(x,\lambda)=\exp(-i\lambda x\sigma_3)+o(1),\quad x\to\infty,\quad \mathrm{Im}\,\lambda=0.$$

Такое решение может быть представлено в виде [6]

$$(1.2)\qquad \Phi(x,\lambda)=\exp(-i\lambda x\sigma_3)+\int_x^\infty K(x,y)\exp(-i\lambda y\sigma_3)\,dy,$$

где ядро $K(x,y)$ обладает свойствами

$$(1.3)\qquad \begin{aligned}&K(x,y)=\sigma_2\bar{K}(x,y)\sigma_2=K_1(x,y)\sigma_0+K_2(x,y)\sigma_1,\\&[\sigma_3,K(x,x)]=v(x)\sigma_2,\quad v(x)=u_x(x)/2.\end{aligned}$$

Из (1.2) вытекает, что первый столбец $\Phi(x,\lambda)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\mathrm{Im}\,\lambda<0$, а второй — в полуплоскость $\mathrm{Im}\,\lambda>0$.

Для построения второго решения Йоста необходимо ввести функцию Флоке — Блоха для конечнозонного потенциала — функцию Бейкера — Ахиезера.

Пусть Γ — риманова поверхность рода n, заданная уравнением $w^2 = zP(z)$, где $z=\lambda^2$, а полином P определен формулой (8).

Определение. Функцией Бейкера — Ахиезера называется вектор $\psi(x, t, p)$, который всюду, за исключением нуля и бесконечности, является мероморфной функцией с предписанными полюсами в точках $p_1, \ldots, p_n$, образующих неспециальный дивизор на Γ, а в нуле и бесконечности имеет существенные особенности вида

$$\psi(x,t,p)=\begin{pmatrix} 1+\sum_1^\infty A_k(x,t)\lambda^{-k} \\ \sum_1^\infty B_k(x,t)\lambda^{-k}\end{pmatrix}\exp(-i\lambda x),\quad \lambda=\sqrt{z}\to\infty,$$

$$\psi(x,t,p)=\begin{pmatrix} \sum_0^\infty C_k(x,t)\lambda^{k} \\ \sum_0^\infty D_k(x,t)\lambda^{k}\end{pmatrix}\exp(it/\lambda),\quad \lambda=\sqrt{z}\to 0,$$

где $z=\pi(p)$ — каноническая проекция точки $p\in\Gamma$ на $\mathbb{C}$.

Можно показать [7—9], что такая функция существует, единственна и является совместным решением систем (6) и (7). Для того чтобы функция $u(x, t)$ в (6) и (7) была вещественной, необходимо и достаточно, чтобы нули полинома (8) $P(z)$ и дивизор $D=\sum p_i$ полюсов функции Бейкера — Ахиезера были связаны соотношением [5]

$$(1.4)\qquad P(z)-\prod_{k=1}^{n}(z-\mu_k)(z-\bar{\mu}_k)=zf^2(z),$$

где $\mu_k=\pi(p_k)$ — проекции полюсов p_k на $\mathbb{C}$, а $f(z)$ — полином степени $n-1$ с вещественными коэффициентами. Соответствующие $\psi(x, t, p)$ n-зонные решения $u(x, t)=u_n(x, t)$ рассматриваются в качестве асимптотики при $x\to-\infty$ в начальном условии задачи (2)—(4).

Рассмотрим сужение $\tilde{\psi}(x, z)$ вектор-функции $\psi(x, 0, p)$ на верхний лист поверхности Γ. Положим $e(x, \lambda)=\tilde{\psi}(x, \lambda^2)$. Вектор $e(x, \lambda)$ удовлетворяет по x уравнению (1.4), а по λ является аналитической в верхней полуплоскости функцией с числом полюсов, не превосходящим n. Используя явные формулы для $\psi(x, t, p)$, можно показать, что $e(x, \lambda)$ представим в виде

$$(1.5)\qquad e(x,\lambda)=\exp[-i\omega(\lambda)x]e_0(x,\lambda),$$

где вектор $e_0(x, \lambda)$ ограничен по x при $\lambda\neq\mu_k$, а квазиимпульс $\omega(\lambda)$ обладает свойством $\operatorname{Im}\omega(\lambda)\geqslant 0$ при $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$.

Определим матрицу

$$E(x,\lambda)=\begin{pmatrix} e_1(x,\lambda) & -\bar{e}_2(x,\lambda) \\ e_2(x,\lambda) & \bar{e}_1(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

по вектору (1.5) и второе решение Йоста уравнения (1.1) следующей асимптотикой:

$$F(x, \lambda)=E(x, \lambda)+o(1), \; x\to-\infty, \; \operatorname{Im}\lambda=0.$$

Для этого решения справедливо представление

$$F(x,\lambda)=E(x,\lambda)+\int\limits_{-\infty}^{x} K(x,y,\lambda)\,w(y)\,\sigma_1 E(y,\lambda)\,dy,$$

$$w(y)=\frac{i}{2}\frac{d}{dy}(u-u_n),$$

где $K(x, y, \lambda)$ — функция Коши уравнения (1.1). Матричные элементы $K(x, y, \lambda)$ являются целыми функциями λ. Поэтому $F(x, \lambda)$ полностью наследует аналитические свойства $E(x, \lambda)$: ее первый столбец допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость с разрезами по дугам простого спектра, у него те же полюса, что и у $e(x, \lambda)$, его производная по λ имеет корневые особенности в окрестности точек E_j.

Введем матрицу перехода задачи (1.1). Матрицы

$$F(x,\lambda)=\begin{pmatrix} f(x,\lambda) & -\bar{g}(x,\lambda) \\ g(x,\lambda) & \bar{f}(x,\lambda)\end{pmatrix}, \qquad \Phi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \bar{\psi}(x,\lambda) & \varphi(x,\lambda) \\ -\bar{\varphi}(x,\lambda) & \psi(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

являются решениями уравнения (1.1) при $\operatorname{Im}\lambda=0$, поэтому

(1.6) $$F(x,\lambda)=\Phi(x,\lambda)T(\lambda), \qquad T(\lambda)=\begin{pmatrix} a(\lambda) & -\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda)\end{pmatrix},$$

где

$$a(\lambda)=f(x, \lambda)\psi(x, \lambda)-g(x, \lambda)\varphi(x, \lambda),$$
$$b(\lambda)=f(x, \lambda)\bar{\varphi}(x, \lambda)+g(x, \lambda)\bar{\psi}(x, \lambda).$$

При этом $a(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость с разрезами по дугам простого спектра. Как обычно, можно получить стандартные оценки:

$$a(\lambda)=1+O(|\lambda|^{-1}), \; |\lambda|\to\infty, \; \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0,$$
$$b(\lambda)=O(|\lambda|^{-1}), \; \lambda\to\pm\infty,$$

а из инволютивных свойств уравнения (1.1) следующие соотношения:

$$\bar{a}(-\bar{\lambda})=a(\lambda), \quad \bar{b}(-\lambda)=-b(\lambda).$$

Предположив для простоты отсутствие дискретного спектра, будем иметь, что $a(\lambda)\neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$.

Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, связанные в силу (1.6) соотношением $|a(\lambda)|^2+|b(\lambda)|^2=1+|e_2(0, 0, \lambda)|^2$, образуют данные рассеяния задачи (1.1), по которым можно восстановить потенциал $u(x)$. Как и в [4, 10], интегральные уравнения обратной задачи имеют вид

(1.7) $$K_1(x,z)+\int\limits_{x}^{\infty} K_2(x,y)H(y+z)\,dy=0 \qquad (z>x),$$

$$K_2(x,z)+\int\limits_{x}^{\infty} K_1(x,y)H(y+z)\,dy=-H(x+z),$$

где

$$(1.8)\qquad H(x)=\int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda)\exp(i\lambda x)\,d\lambda+\sum_{k=1}^{2n}\int_{\gamma_k} h(\lambda)\exp(i\lambda x)\,d\lambda=H_0(x)+H_1(x),$$

а функции $r(\lambda)$ и $h(\lambda)$ определены на спектре следующими формулами:

$$(1.9)\qquad r(\lambda)=\frac{b(\lambda)}{2\pi a(\lambda)},\qquad h(\lambda)=\frac{\sqrt{P(\lambda^2)}}{2\pi\prod_{k=1}^{n}(\lambda^2-\mu_k)\,a_+(\lambda)\,a_-(\lambda)}.$$

Знаками плюс и минус отмечены предельные значения функции $a(\lambda)$ справа и слева от дуги γ_k. Из свойств $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и $P(\lambda^2)$ вытекает, что

$$(1.10)\qquad r(-\lambda)=-\bar r(\lambda),\quad \operatorname{Im}\lambda=0,\quad \bar h(-\bar\lambda)=h(\lambda),\quad \lambda\in\gamma_k.$$

Коэффициент отражения $r(\lambda)$ имеет разрывы в точках λ_k $(k=\overline{1,\ q\leqslant 2n})$ пересечения дуг γ_k с вещественной осью, причем

$$(1.11)\qquad r_+(\lambda_k)-r_-(\lambda_k)=h(\lambda_k),\quad k=\overline{1,\ q}.$$

Наконец, из (1.10) следует, что $H(x)=-\bar H(x)$. Это свойство ядра обеспечивает однозначную разрешимость уравнений обратной задачи.

2. ЭВОЛЮЦИЯ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ И АСИМПТОТИКА ЯДРА УРАВНЕНИЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть теперь потенциал в уравнении (6) зависит от времени и удовлетворяет (1). Используя тот факт, что оператор (7) в этом случае переводит любое решение уравнения (6) снова в решение этого уравнения, найдем $a_t+ia/\lambda=0$, $b_t-ib/\lambda=0$. Таким образом,

$$(2.1)\qquad r(\lambda,t)=r(\lambda)\exp(2it/\lambda),\quad h(\lambda,t)=h(\lambda)\exp(2it/\lambda),$$

где $r(\lambda)$ и $h(\lambda)$ определены формулами (1.9).

Изучим поведение при $t\to\infty$ ядра $H(x+y,\ t)$, определенного формулами (1.8) и (2.1).

Рассмотрим ядро

$$(2.2)\qquad H_1(x+y,t)=\sum_{k=1}^{2n}\int_{\gamma_k} h(\lambda)\exp[i\lambda(x+y)+2it/\lambda]\,d\lambda,$$

положив $x=Ct+\xi$, $y=Ct+\eta$, $\lambda=\mu+i\nu$. Тогда

$$\exp\left[i\lambda(x+y)+\frac{2it}{\lambda}\right]=\exp[i\lambda(\xi+\eta)+$$
$$+2it\mu(C+|\lambda|^{-2})]\exp[-2\nu t(C-|\lambda|^{-2})].$$

В силу предположения (9) о спектре эта величина при фиксированных ξ и η экспоненциально убывает по t всюду при $\lambda\in\gamma_k$, кроме точек $\tilde E_k\in\gamma_k$, наименее удаленных от начала координат. Точки $\tilde E_k$, лежащие на окружности $|\lambda|=C=|\tilde E_k|^{-2}$, дают основной вклад в асимптотику, а число C является асимптотической скоростью переднего фронта рассматриваемого решения.

Интегралы в (2.2), которые содержат точки $\tilde{E}_k$, разобьем на два — $I_k^1 + I_k^2$, где I_k^1 — интеграл по части дуги γ_k, лежащей в достаточно малой окрестности точки $\tilde{E}_k$, а I_k^2 — по остальной части дуги γ_k. Пусть для простоты $\tilde{E}_k = E_k$. Положим $s=2\nu(C-(\nu^2+\mu^2)^{-2})$ и выберем окрестность точки E_k столь малой, что для точек дуги γ_k из этой окрестности $\mu=\mu(s)$ и $\nu=\nu(s)$ $(0<s<\varepsilon)$. Разложим входящие в I_k^1 величины в ряды по степеням s:

$$\lambda = E_k + c_{k1}s + \dots, \tag{2.3}$$

$$h(\lambda(s)) = \sqrt{s}(h_{k0} + h_{k1}\sqrt{s} + \dots), \tag{2.4}$$

$$2\mu(C+|\lambda|^{-2}) = d_{k0} + d_{k1}s + \dots, \qquad d_{k0} = \frac{4\operatorname{Re} E_k}{|E_k|^2}, \tag{2.5}$$

$$\exp[i\lambda(\xi+\eta)] = \exp[iE_k(\xi+\eta)]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n(\xi+\eta)^n}{n!}s^n\sum_{j=1}^{\infty}c_{kj}^{(n)}s^j. \tag{2.6}$$

Собирая разложение (2.3)—(2.6) и учитывая, что при $t\to\infty$

$$\int_0^{\varepsilon} s^n \exp[-s(1-id_{k1})t]\,ds = \frac{\Gamma(n)}{[(1-id_{k1})t]^n} + O(e^{-\varepsilon t/2}),$$

получим

$$I_k^1 = \exp[iE_k(\xi+\eta)]\sum_{n=0}^{\infty}(\xi+\eta)^n\omega_k^{(n)}(t)\,t^{-(n+3/2)}, \tag{2.7}$$

где

$$\omega_k^{(n)}(t) = \frac{i^n h_{k0} c_{k1}^{n+1}\Gamma(n+{}^3/_2)\exp(id_{k0}t)}{n!\,(1-id_{k1})^{n+3/2}}[1+\psi_{nk}(t)], \tag{2.8}$$

причем $|\psi_{nk}(t)| \leqslant \tilde{c}_k n^2/\sqrt{t}$ $(\tilde{c}_k=\mathrm{const})$.

Для оценки интеграла I_k^2 по оставшейся части дуги γ_k заметим, что он содержит быстроосциллирующую экспоненту с фазовой функцией $S(\lambda,\tau)=\lambda+\tau/\lambda$, $\tau=2t/(x+y)$. Она имеет производную, отличную от нуля на γ_k, и максимум $\operatorname{Re}[iS(\lambda,\tau)]$ достигается в точке λ_k пересечения дуги γ_k с вещественной осью. Поэтому, интегрируя по частям, получим

$$I_k^2 = \frac{h(\lambda_k)\exp[i(x+y)S(\lambda_k,\tau)]}{i(x+y)S'(\lambda_k,\tau)}\left[1+O\left(\frac{1}{x+y}\right)\right]. \tag{2.9}$$

Заметим, что если γ_k — отрезок мнимой оси, то I_k^2 будет экспоненциально мал.

Совершенно аналогично (2.9) оцениваются те интегралы в (2.2), для которых дуги γ_j лежат строго вне круга радиуса $C=|E_k|^{-2}$. Таким образом, для ядра (2.2) справедлива следующая асимптотика:

$$H_1(x+y,t) = \sum_{k=1}^{p}\exp[iE_k(\xi+\eta)]\sum_{n=0}^{\infty}(\xi+\eta)^n\omega_k^{(n)}(t)\,t^{-(n+3/2)} + \sum_{j=1}^{q}\frac{h(\lambda_j)\exp[i(x+y)S(\lambda_j,\tau)]}{i(x+y)S'(\lambda_j,\tau)}\left[1+O\left(\frac{1}{x+y}\right)\right].$$

Для ядра $H_0(x+y,\ t)$ запишем

$$H_0(x+y,t)=\left(\int\limits_{-\infty}^{\lambda_1}+\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}+\int\limits_{\lambda_q}^{\infty}\right)r(\lambda)\exp[i(x+y)S(\lambda,\tau)]\,d\lambda.$$

Производная $S'(\lambda,\ \tau)$ обращается в нуль в точках $\pm\sqrt{\tau}$, лежащих между двумя точками λ_j, ближайших к началу координат, если только $(\xi+\eta)/2t$ достаточно мало. При этом $S''(\pm\sqrt{\tau},\ \tau)=\pm2/\sqrt{\tau}$. Поэтому $H_0(x+y,\ t)$ оценивается [11] вкладами от стационарных точек и точек λ_j $(j=\overline{1,q})$:

$$H_0(x+y,t)=\sum_{j=1}^{q}\frac{(r_-(\lambda_j)-r_+(\lambda_j))\exp[i(x+y)S(\lambda_j,\tau)]}{i(x+y)S'(\lambda_j,\tau)}\times$$

$$\times\left[1+O\left(\frac{1}{x+y}\right)\right]+\frac{\sqrt{\pi}(2t)^{1/4}}{(x+y)^{3/4}}\left[r(\tau)\exp\left[2i(x+y)\sqrt{\tau}+\frac{i\pi}{4}\right]+\right.$$

$$\left.+r(-\tau)\exp\left[-2i(x+y)\sqrt{\tau}-\frac{i\pi}{4}\right]\right].$$

Объединяя оценки для H_0 и H_1 и учитывая (1.11), получим

$$H(x+y,t)=\sum_{k=1}^{p}\exp[iE_k(\xi+\eta)]\sum_{n=0}^{N-1}(\xi+\eta)^n\omega_k^{(n)}(t)\,t^{-(n+3/2)}+ \tag{2.10}$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}(2t)^{1/4}}{(x+y)^{3/4}}\left[r\left(\frac{2t}{x+y}\right)\exp\left(2i\sqrt{2t(x+y)}+\frac{i\pi}{4}\right)-\text{к. с.}\right]+$$

$$+O[(\xi+\eta)^N t^{-N-3/2}\exp(-\operatorname{Im}E(\xi+\eta))]+O\left(\frac{1}{(x+y)^{3/2}}\right).$$

Эта оценка справедлива при $t\to\infty$ в области $x+y>2Ct-C_1t^\alpha$ $(C=|E_k|^{-2}$, $k=\overline{1,p}$; $C_1>0$, $0<\alpha<1)$.

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Решение $u(x,\ t)$ задачи Коши (2)—(4) определяется формулами (1.3), в которых $K_i(x,\ y)$ $(i=1,\ 2)$ являются решением уравнений обратной задачи (1.7). Согласно (2.10) в области $x>Ct-(2\operatorname{Im}E)^{-1}\ln t^{N+1}$ (N — любое число) главная часть ядра этих уравнений при больших t вырождена,

$$H_N(\xi+\eta,t)=\sum_{l=1}^{p}\exp[iE_l(\xi+\eta)]\sum_{k=0}^{N-1}\eta^k\sum_{m=0}^{N-k-1}\omega_{km}^{(l)}(t)\,\xi^m,$$

где

$$\omega_{km}^{(l)}(t)=\frac{\omega_l^{(k+m)}(t)}{k!\,m!\,t^{k+m+3/2}},$$

а числа E_l и функции $\omega_k^{(n)}(t)$ обладают свойствами $E_{l+1}=-\bar{E}_l$, $\omega_{l+1}^{(n)}(t)=-\bar{\omega}_l^{(n)}(t)$, $l=\overline{1,\ p}$. Положив в уравнениях (1.7) $x=Ct+\xi$, $y=Ct+\tau$, $z=Ct+\eta$ и

$$K_1(Ct+\xi,Ct+\eta,t)=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=0}^{N-1}X_k^l(\xi,t)\,\eta^k\exp(iE_l\eta), \tag{3.1}$$

$$(3.2)\qquad K_2(Ct+\xi, Ct+\eta, t)=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=0}^{N-1} Y_k{}^l(\xi, t)\,\eta^k \exp(iE_l\eta),$$

получим систему линейных алгебраических уравнений

$$(3.3)\qquad X_k{}^l+\sum_r\sum_s A_{ks}{}^{lr}Y_s{}^r=0,$$

$$\sum_r\sum_s A_{ks}{}^{lr}X_s{}^r+Y_k{}^l=\exp(-iE_r\xi)\,\frac{dA_{k0}{}^{lr}}{d\xi},$$

где

$$(3.4)\qquad A_{ks}{}^{lr}=\sum_{m=0}^{N-k-1}\omega_{km}^{(l)}(t)\,J_{m+s}^{lr}(\xi),\qquad J_m{}^{lr}(\xi)=\int_\xi^\infty \tau^m \exp[i(E_l+E_r)\tau]\,d\tau.$$

Введем блочную матрицу $\Omega(\xi,\ t)=\|A^{lr}(\xi,\ t)\|$, где $N\times N$-матрицы $A^{lr}(\xi, t)$ определены в (3.4). Тогда система (3.3) примет вид

$$X+\Omega Y=0,\quad \Omega X+Y=f.$$

Отсюда следует, что $(I-\Omega^2)Y=f$ и потому

$$Y={}^1/_2[(I+\Omega)^{-1}f+(I-\Omega)^{-1}f].$$

Тогда для $K_2(Ct+\xi,\ Ct+\xi,\ t)$ согласно (3.2) и (3.3) получим

$$K_2(Ct+\xi, Ct+\xi, t)=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=0}^{N-1} Y_k(\xi)\,\xi^k \exp(iE_l\xi)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\ln\frac{\det[I+\Omega(\xi,t)]}{\det[I-\Omega(\xi,t)]},$$

а для функции $u(x,\ t)$ в силу (1.3) –

$$(3.5)\qquad u(x,t)=2i\ln\frac{\det[I+\Omega(\xi,t)]}{\det[I-\Omega(\xi,t)]}\bigg|_{\xi=x-Ct},$$

причем $\det[I-\Omega(\xi,\ t)]=\det[I+\bar\Omega(\xi,\ t)]$.

Это представление решения справедливо при $t\to\infty$ и $\xi>-(2a)^{-1}\ln t^{N+1}$, где $a=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant p}\operatorname{Im}E_k$, N – любое натуральное число.

В заключение приведем анализ формулы (3.5) в двух простейших случаях.

1. Пусть максимум в (9) достигается в двух точках. Тогда эти точки лежат на мнимой оси, а матрица $\Omega(\xi,\ t)$ состоит из одного блока $A(\xi,\ t)$, элементы которого имеют вид

$$\Omega_{kj}(\xi,t)=\sum_{m=0}^{N-k-1}\omega_{km}(t)\,I_{m+j}(\xi),$$

где

$$\omega_{km}(t)=-ih_0\Gamma(n+{}^3/_2)\,[k!m!t^{n+3/2}(4a)^{2(n+1)}]^{-1}(1+\psi_n(t)),\ n=k+m,$$

$$I_m(\xi)=\int_\xi^\infty\tau^m\exp(-2a\tau)\,d\tau,\qquad a=\operatorname{Im}E.$$

Для величины $\Delta(\xi, t)=\det[I+\Omega(\xi, t)]$, входящей в формулу (3.5), можем записать

$$(3.6) \qquad \Delta(\xi,t)=1+\sum_{k=1}^{N} D_k(\xi,t), \qquad D_k(\xi,t)=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \det\|\Omega_{i_j i_m}\|.$$

Легко видеть, что при $t\to\infty$

$$(3.7) \qquad D_k(\xi, t)=\det\|\omega_{ij}(t)\|\det\|I_{i+j}(\xi)\|[1+O(\xi/t)],$$

где $\omega_{ij}(t)$ доопределены нулем при $j>N-i-1$. Если $k\leqslant N_1=\left[\frac{N+1}{2}\right]$, то у матрицы $\|\omega_{ij}(t)\|$ все элементы отличны от нуля, ее определитель не изменяется с ростом N и равен

$$(3.8) \qquad \det\|\omega_{ij}(t)\|=\frac{(-ih_0)^k\Gamma_1^{(k)}[1+\delta_k(t)]}{(1!2!\ldots(k-1)!)^2(4a)^{2k^2}t^{k(k+1/2)}},$$

где $\Gamma_1^{(k)}$ — определитель матрицы с элементами $\Gamma(i+j+3/2)$ $(i, j=\overline{0, k-1})$, а $|\delta_k(t)|>c_1k^2/\sqrt{t}$. Для $k>N_1$ $\det\|\omega_{ij}(t)\|=O(t^{-k(k+1/2)})$. Второй определитель в (3.7)

$$(3.9) \qquad \det\|I_{i+j}(\xi)\|=\Gamma^{(k)}(2a)^{-k^2}\exp(-2ka\xi),$$

где $\Gamma^{(k)}$ — определитель с элементами $\Gamma(i+j+1)$ $(i, j=\overline{0, k-1})$. Формулы (3.6) – (3.9) дают

$$(3.10) \qquad \Delta(\xi,t)=\sum_{n=0}^{N} i^nP_nt^{-n(n+1/2)}\exp(-2na\xi)[1+\delta_n(t)],$$

где $|\delta_n(t)|<c_1n^2/\sqrt{t}$, а

$$(3.11) \qquad P_n=\begin{cases}(-h_0)^n\Gamma^{(n)}\Gamma_1^{(n)}(1!2!\ldots(n-1)!)^{-2}(4a)^{-2n^2}(2a)^{-n^2}, & n\leqslant N_1,\\ O(1), & n>N_1.\end{cases}$$

Для получения асимптотики выражения (3.5) покроем область $\xi>-(2a)^{-1}\ln t^{N+1}$ интервалами

$$(3.12) \qquad \alpha_1=(b\ln t^{5/2-\varepsilon}<\xi<\infty),\ b=-(2a)^{-1},\ \varepsilon>0,$$

$$\alpha_n=(b\ln t^{\frac{4n+1}{2}-\varepsilon}<\xi<b\ln t^{\frac{4n-3}{2}+\varepsilon}),$$

$$\alpha_{N_1}=(b\ln t^{N+1}<\xi<b\ln t^{\frac{4N_1-3}{2}+\varepsilon}), \qquad N_1=\left[\frac{N+1}{2}\right].$$

Из (3.10) вытекает, что при $\xi\in\alpha_n$

$$u_n(\xi, t)=4\operatorname{sgn}(h_0)\operatorname{arctg}\{\exp[-2a(\xi-\alpha_n)-\ln t^{2n-1/2}]\}+2\pi(n-1),$$

где фаза

$$(3.13) \qquad \alpha_n=\frac{1}{2a}\ln\left[\frac{|h_0|}{((n-1)!)^2 4^{2n-1}(2a)^{6n-3}}\frac{\Gamma^{(n)}\Gamma_1^{(n)}}{\Gamma^{(n-1)}\Gamma_1^{(n-1)}}\right].$$

Отсюда получаем формулу (11) введения.

2. Пусть максимум в (9) достигается в четырех точках $(\pm E, \pm\bar{E})$.

Тогда $C=|E|^{-2}$, а матрица $\Omega(\xi, t)$ в (3.5) имеет вид

$$\Omega(\xi,t)=\begin{pmatrix} A(\xi,t) & B(\xi,t) \\ -\bar{B}(\xi,t) & -\bar{A}(\xi,t)\end{pmatrix}$$

где

$$A_{ij}(\xi,t)=\sum_{m=0}^{N-i-1}\omega_{im}(t)J_{m+j}(\xi),\qquad J_n(\xi)=\int_\xi^\infty \tau^n\exp(2iE\tau)\,d\tau,$$

$$B_{ij}(\xi,t)=\sum_{m=0}^{N-i-1}\omega_{im}(t)I_{m+j}(\xi),\qquad I_n(\xi)=\int_\xi^\infty \tau^n\exp(-2\,\mathrm{Im}\,E\tau)\,d\tau,$$

$$\omega_{jm}(t)=i^n h_0 e^{id_0 t}c_1^{n+1}\Gamma(n+{}^3/_2)\,(j!m!t^{n+{}^3/_2})^{-1}(1-id_1)^{-n-{}^3/_2}[1+\psi_n(t)],$$
$$n=j+m.$$

Как и в первом случае, для определителя $\Delta(\xi, t)$ справедлива формула (3.6), в которой для величин $D_n(\xi, t)$ при $t\to\infty$ можно записать

$$D_n(\xi,\ t)=(\Delta^{(n,\ 0)}+\Delta^{(n,\ n-1)}+\ldots+\Delta^{(1,\ n-1)}+\Delta^{(0,\ n)})\,[1+O(\xi/t)], \tag{3.14}$$

где определители

$$\Delta^{(k,\ l)}=\begin{vmatrix} A_{00},\ldots, & A_{0k-1}, & B_{00},\ldots, & B_{0l-1} \\ A_{k-10},\ldots, & A_{k-1k-1}, & B_{k-10},\ldots, & B_{k-1l-1} \\ -\bar{B}_{00},\ldots, & -\bar{B}_{0k-1}, & -\bar{A}_{00},\ldots, & -\bar{A}_{0l-1} \\ -\bar{B}_{l-10},\ldots, & -\bar{B}_{l-1k-1}, & -\bar{A}_{l-10},\ldots, & -\bar{A}_{l-1l-1}\end{vmatrix}.$$

Доопределив функции $\omega_{im}(t)$ нулем при $m>N-i-1$, $i=\overline{0,N-1}$, детерминант $\Delta^{(k,\ l)}(\xi, t)$ можно представить в виде произведения двух:

$$\begin{vmatrix} \begin{matrix}\omega_{00},\ldots,\omega_{0k-1}, \\ \omega_{k-10},\ldots,\omega_{k-1k-1},\end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix}-\bar{\omega}_{00},\ldots,-\bar{\omega}_{0l} \\ -\bar{\omega}_{l-10},\ldots,-\bar{\omega}_{l-1l-1}\end{matrix}\end{vmatrix}\times$$
$$\times\begin{vmatrix} J_0,\ldots, & J_{k-1}, & I_0,\ldots, & I_{l-1} \\ J_{k-1},\ldots, & J_{2k-2}, & I_{k-1},\ldots, & I_{k+l-2} \\ I_0,\ldots, & I_{k-1}, & \bar{J}_0,\ldots, & \bar{J}_{l-1} \\ I_{l-1},\ldots, & I_{k+l-2}, & \bar{J}_{l-1},\ldots, & J_{2l-2}\end{vmatrix}\left[1+O\left(\frac{\xi}{t}\right)\right]=$$
$$=\det\|\omega_{ij}(t)\|_0^{k-1}\det\|-\bar{\omega}_{ij}(t)\|_0^{l-1}\mathscr{E}_{kl}(\xi)\,[1+O(\xi/t)].$$

Как и в первом случае,

$$\det\|\omega_{ij}(t)\|_0^{k-1}=\begin{cases}\dfrac{(-ih_0)^k\exp(id_0t)\,(ic_1)^{k^2}\Gamma_1^{(k)}\,[1+\delta_k(t)]}{t^{k(k+{}^1/_2)}(1-id_1)^{k(k+{}^1/_2)}\left(\prod\limits_1^{k-1}m!\right)^2}, & k\leqslant N_1, \\ O(t^{-k(k+{}^1/_2)}), & k>N_1.\end{cases}$$

Определитель $\mathscr{E}_{kl}(\xi)$ вычисляется и равен

$$\mathscr{E}_{kl}(\xi)=\mathscr{E}_{kl}(0)\exp[2i(kE-l\bar{E})\xi].$$

Поэтому

(3.15) $$\Delta^{kl}(\xi,t)=$$
$$=\frac{(-1)^l\exp[i(k-l)d_0t+2i(kE-l\bar{E})\xi]q_k\bar{q}_l\mathcal{E}_{kl}(0)}{t^{k(k+{}^1/_2)+l(l+{}^1/_2)}}[1+\delta_{kl}(t)],$$

где

$$q_k=\begin{cases}(-ih_0)^k(ic_1)^{k^2}\Gamma_1^{(k)}(1-id_1)^{-k(k+{}^1/_2)}\left(\prod\limits_1^{k-1}m!\right)^{-2}, & k\leqslant N_1,\\ O(1), & k>N_1.\end{cases}$$

Следовательно, для $D_n(\xi,t)$ из (3.14) имеем

$$D_{2m}(\xi,t)=\Delta^{(m,m)}(\xi,t)\,[1+O(t^{-2})][1+O(\xi/t)],$$
$$D_{2m-1}(\xi,t)=[\Delta^{(m,m-1)}(\xi,t)+\Delta^{(m-1,m)}(\xi,t)]\,[1+O(t^{-4})][1+O(\xi/t)].$$

Наконец, из последних формул и (3.15) получаем

(3.16) $$D_{2n}(\xi,t)=P_{2n}t^{-n(2n+1)}\exp[-4n\operatorname{Im}E\xi](1+\delta_n(t)),$$

(3.17) $$D_{2n-1}(\xi,t)=2iP_{2n-1}t^{n-2n^2-{}^1/_2}\sin\varphi_n(\xi,t)\exp[-4(n-{}^1/_2)\operatorname{Im}E\xi]\times$$
$$\times(1+\delta_n(t)),$$

где

$$\varphi_n(\xi,t)=2\operatorname{Re}E(\xi+2|E|^{-2}t+\beta_n),\quad |\delta_n(t)|\leqslant c_1n^2/\sqrt{t},$$

(3.18) $$\beta_n=(2\operatorname{Re}E)^{-1}\{(n-1)\pi+\arg[q_n\bar{q}_{n-1}\mathcal{E}_{nn-1}(0)\,(1+\delta_n(t))]\},$$

(3.19) $$P_{2n}=(-1)^n|q_n|\mathcal{E}_{nn}(0),\quad P_{2n-1}=|q_nq_{n-1}\mathcal{E}_{nn-1}(0)|.$$

Таким образом, из (3.14)—(3.19) с учетом (3.6) находим

$$\operatorname{Im}\Delta(\xi,t)=2\sum_{n=1}^{N}P_{2n-1}t^{n-2n^2-{}^1/_2}\sin\varphi_n(\xi,t)\times$$
$$\times\exp[-4(n-{}^1/_2)\operatorname{Im}E\xi](1+\delta_n(t)),$$
$$\operatorname{Re}\Delta(\xi,t)=1+\sum_{n=1}^{N}P_{2n}t^{-2n^2-n}\exp(-4n\operatorname{Im}E\xi)(1+\delta_n(t)).$$

Покроем область $\xi>-(2\operatorname{Im}E)^{-1}\ln t^{N+1}$ системой интервалов (3.12). Оказывается, что при $\xi\in\alpha_n$

(3.20) $$\frac{\operatorname{Im}\Delta(\xi,t)}{\operatorname{Re}\Delta(\xi,t)}=\frac{|\mathcal{E}_{nn-1}(0)|\sin\varphi_n(\xi,t)[1+O(n^2t^{-{}^1/_2})]}{(-\mathcal{E}_{n-1n-1}(0)\mathcal{E}_{nn}(0))^{{}^1/_2}\operatorname{ch}\psi_n(\xi,t)}$$

где

$$\psi_n(\xi,t)=2\operatorname{Im}E(\xi+\gamma_n)+\ln t^{2n-{}^1/_2},$$
$$\gamma_n=(4\operatorname{Im}E)^{-1}\ln[|q_n{}^2\mathcal{E}_{nn}(0)|\,|q_{n-1}^{-2}\mathcal{E}_{n-1n-1}^{-1}(0)|].$$

Определители $\mathcal{E}_{nn-1}(0)$ и $\mathcal{E}_{nn}(0)$ вычисляются и равны

$$\mathcal{E}_{nn-1}(0)=J_0{}^{n^2}\bar{J}_0^{(n-1)^2}\varkappa^{2n^2-2n},$$
$$\mathcal{E}_{nn}(0)=(-1)^n|J_0|^{2n^2}\varkappa^{2n^2},\ J_0=-1/2iE,\ \varkappa=\operatorname{Re}E/\operatorname{Im}E.$$

Поэтому из (3.20) и (3.5) при $\xi \in \alpha_n$ получаем

$$(3.21)\qquad u_n(\xi, t)=4\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{\mathrm{Im}\,E}{|\mathrm{Re}\,E|}\frac{\sin[2\,\mathrm{Re}\,E(\xi+\beta_n+2|E|^{-2}t)]}{\mathrm{ch}[2\,\mathrm{Im}\,E(\xi+\gamma_n)+\ln t^{2n-1/2}]}\right\},$$

где фазы β_n и γ_n соответственно равны

$$(3.22)\qquad \beta_n=\frac{1}{2\,\mathrm{Re}\,E}\left\{(2n-1)\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Re}\,E}{\mathrm{Im}\,E}+\arg[h_0c_1^{2n-1}(1-id_1)^{1/2-2n}]\right\},$$

$$(3.23)\qquad \gamma_n=\frac{1}{2\,\mathrm{Im}\,E}\ln\left[\frac{|h_0|\,|c_1|^{2n-1}\Gamma_1^{(n)}}{((n-1)!)^2|1-id_1|^{2n-1/2}\Gamma_1^{(n-1)}}\left(\frac{|\mathrm{Re}\,E|}{2|E|\,\mathrm{Im}\,E}\right)^{2n-1}\right]$$

Наконец, выражение для $u_n(\xi, t)$ в (3.21) влечет справедливость формулы (12) введения.

В заключение отметим одно интересное следствие. Положим

$$\tau=x+t,\qquad \xi=x-t,\qquad v(\xi,\tau)=u\left(\frac{\tau+\xi}{2},\frac{\tau-\xi}{2}\right).$$

Тогда решение уравнения (1) перейдет в решение уравнения

$$(1')\qquad v_{\tau\tau}-v_{\xi\xi}+4\sin v=0.$$

Известно, что убывающие при $x\to\pm\infty$ решения уравнения (1) переходят [6, 12] в убывающие решения уравнения (1′), а множества конечнозонных решений уравнений (1) и (1′) совпадают [5]. Поэтому $v(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению (1′), стремится к нулю при $\xi\to\infty$ и стремится к некоторому конечнозонному решению уравнения (1′) при $\xi\to-\infty$. При этом асимптотическая скорость переднего фронта в лабораторных координатах C_0 выражается через скорость $C=|E|^{-2}$ в координатах светового конуса по формуле

$$C_0=(1-|E|^2)/(1+|E|^2),\ |E|=|\tilde{E}_j|,\ j=\overline{1, 2p},$$

и потому $0<C_0<1$, когда $|E|<1$, и $-1<C_0<0$, когда $|E|>1$. Таким образом, если точки $\tilde{E}_j$, в которых достигается максимум выражения (9), лежат внутри единичного круга, то асимптотические солитоны (10) будут двигаться в положительном направлении оси ξ, если же они лежат вне единичного круга, то в отрицательном направлении оси ξ. В последнем случае обычные солитоны, порожденные дискретным спектром, могут двигаться в обоих направлениях, а конечнозонная асимптотика «убегает» налево со скоростью, большей по абсолютной величине, чем C_0.

Литература

[1] *Гуревич А. В., Питаевский Л. П.* // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2. С. 590–604.

[2] *Хруслов Е. Я.* // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. № 8. С. 469–472; Мат. сб. 1976. Т. 99. № 2. С. 261–286.

[3] *Ермакова В. Д.* // ДАН СССР, сер. А. 1982. № 7. С. 3–6.

[4] *Котляров В. П., Хруслов Е. Я.* // ТМФ. 1986. Т. 86. № 2. С. 172–186; ДАН УССР, сер. А. 1986. № 10. С. 61–64.

[5] *Козел В. А., Котляров В. П.* // ДАН УССР, сер. А. 1976. № 10. С. 878–881; // Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Сб. научн. трудов. К.: Наукова думка, 1978. С. 89–103.

[6] *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

[7] *Matveev V. B.* Abelian functions and solitons: Preprint 373. Wroclaw: University. 1976.
[8] *Итс А. Р.* Метод изомонодромных деформаций в теории вполне интегрируемых нелинейных эволюционных систем: Дис. докт. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1986.
[9] *Кричевер И. М.* Нелинейные уравнения и эллиптические кривые. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 79–136.
[10] *Котляров В. П., Хруслов Е. Я.* Асимптотические солитоны модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза: Препринт 24-86. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1986.
[11] *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
[12] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
11.I.1988 г.

ASYMPTOTIC SOLITONS OF THE SINE-GORDON EQUATION

Kotlyarov V. P.

The large time asymptotics of the solutions of the sine-Gordon equation which tend to zero when $x\to\infty$ and tend to the finite-gap solution of this equation when $x\to-\infty$ are investigated. It is proved that at $t\to\infty$ these solutions split into infinite series of solitons with variable phases. These solitons are generated by the continuous spectrum of the L-operator from the corresponding Lax representation.