



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, Итерационный метод определения диэлектрической проницаемости образца неоднородного материала, расположенного в прямоугольном волноводе, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2012, том 52, номер 12, 2228–2237

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

22 января 2025 г., 01:16:33



УДК 519.634

## ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ОБРАЗЦА НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА, РАСПОЛОЖЕННОГО В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

© 2012 г. М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов

(440026 Пенза, ул. Красная, 40, ПГУ)

e-mail: [\\_medv@mail.ru](mailto:_medv@mail.ru)

Поступила в редакцию 15.05.2012 г.

Работа посвящена исследованию задачи определения диэлектрической проницаемости материалов сложной геометрической формы, помещенных в волновод с идеально проводящими стенками. Задача сводится к решению нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения. Предложен и обоснован итерационный метод для решения обратной краевой задачи. Представлены численные результаты. Библ. 14. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** задача дифракции, интегральное уравнение, численный метод.

### ВВЕДЕНИЕ

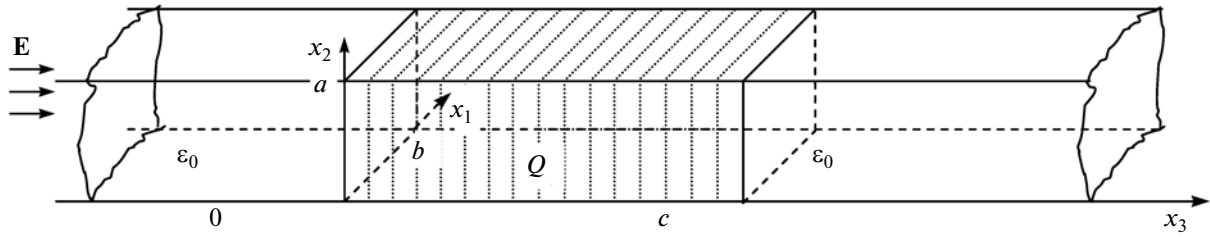
Определение диэлектрических и магнитных параметров нанокompозитных материалов и сложных наноструктур с различной геометрией является актуальной задачей нанотехнологии и наноэлектроники. Однако эти параметры, как правило, недоступны для экспериментального измерения (ввиду композитного характера материалов и малых размеров образцов), что приводит к необходимости применять методы математического моделирования и решать задачи численно с помощью компьютеров. При этом приходится решать трехмерные векторные задачи в полной электродинамической постановке. Решение таких задач является в настоящее время одной из самых актуальных проблем в электродинамике и с приемлемой для практики точностью на электродинамическом уровне строгости математическими методами требует очень большого объема вычислений, что зачастую невозможно даже на самых современных суперкомпьютерах. Особенно остро стоит проблема решения обратных электродинамических задач на сложной системе поверхностей и тел в резонансном диапазоне частот, возникающая при определении параметров нанокompозитных материалов и наноструктур. Многочисленные дорогостоящие пакеты прикладных программ для решения задач электродинамики (Ansis, Quikwave и т.д.), имеющиеся на рынке программных продуктов, решают задачу традиционными конечно-разностными методами или методами конечных элементов и не дают удовлетворительных по точности результатов.

Альтернативный подход состоит в применении метода объемных сингулярных интегральных уравнений (см. [1]). Настоящая статья посвящена численному методу определения диэлектрической проницаемости неоднородного образца материала по коэффициенту отражения. Методы, позволяющие определять диэлектрическую проницаемость материалов, рассмотрены в [2]–[4].

### 1. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу дифракции. Пусть в декартовой системе координат  $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < +\infty\}$  есть волновод с идеально проводящей поверхностью  $\partial P$ . В волноводе расположено объемное тело  $Q$  ( $Q \subset P$  – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_0$  и положительной  $3 \times 3$ -тензорной функцией диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}(x)$  (фиг. 1). Компоненты величины  $\hat{\epsilon}(x)$  являются ограниченными функциями в области  $\bar{Q}$ ,  $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$ , а также  $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$ .

Граница  $\partial Q$  области  $Q$  кусочно-гладкая. Будем также предполагать, что тело  $Q$  не касается стенок волновода,  $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$ . В  $P \setminus \bar{Q}$  среда изотропна и однородна с постоянными  $\epsilon_0(>0)$ ,  $\mu_0(>0)$ .



Фиг. 1.

Требуется определить электромагнитное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,\text{loc}}(P)$  (и, следовательно,  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(Q)$ ), возбуждаемое в волноводе сторонним полем с временной зависимостью вида  $\exp(-i\omega t)$ . Источник стороннего поля – электрический ток  $\mathbf{j}_E^0 \in L_{2,\text{loc}}(P)$  с компактным носителем в  $P$ .

В области  $P \subset \mathbf{R}^3$  стандартные дифференциальные операторы grad, div, rot понимаются в смысле обобщенных функций.

Будем искать “слабые” (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad x \in P. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти решения должны удовлетворять условиям на бесконечности (см. [5]): поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  при  $|x_3| > C$  для достаточно больших  $C > 0$  имеют представление (знак “+” соответствует  $+\infty$ , знак “-” соответствует  $-\infty$ )

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} &= \sum_p R_p^{(\pm)} \exp(i\gamma_p^{(1)} |x_3|) \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega \epsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_p Q_p^{(\pm)} \exp(i\gamma_p^{(2)} |x_3|) \begin{pmatrix} i\omega \mu_0 (\nabla_2 \Psi_p) \times \mathbf{e}_3 \\ \lambda_p^{(2)} \Psi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \Psi_p \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{e}_{1,2,3}$  – орты в декартовой системе координат,  $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$ ,  $\text{Im } \gamma_p^{(j)} > 0$  или  $\text{Im } \gamma_p^{(j)} = 0, k\gamma_p^{(j)} \geq 0$  и  $\lambda_p^{(1)}, \Pi_p(x_1, x_2)$  и  $\lambda_p^{(2)}, \Psi_p(x_1, x_2)$  ( $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ ) – полная система собственных значений и ортонормированных в  $L_2(\Pi)$  собственных функций двумерного оператора Лапласа  $-\Delta$  в прямоугольнике  $\Pi := \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$  с условиями Дирихле и Неймана соответственно и  $\nabla_2 \equiv \mathbf{e}_1 \partial/\partial x_1 + \mathbf{e}_2 \partial/\partial x_2$ . Для коэффициентов разложений (2) имеют место оценки

$$R_p^{(\pm)}, Q_p^{(\pm)} = O(p^m), \quad p \rightarrow \infty, \quad (3)$$

для некоторого  $m \in \mathbf{N}$ .

С физической точки зрения условия (2) означают, что рассеянное поле является суперпозицией нормальных волн, расходящихся от тела. Условия (3) обеспечивают экспоненциальную сходимость рядов (2), а также возможность их почленного дифференцирования по  $x_j$  любое число раз.

Для  $\mathbf{E}$  должно выполняться краевое условие на стенках волновода:

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0. \quad (4)$$

Из соотношений (1)–(4) для поля  $\mathbf{E}$  следует интегродифференциальное уравнение (см. [6])

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left( \frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left( \frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q, \quad (5)$$

где  $\hat{I}$  – единичный тензор.

Компоненты диагонального тензора Грина  $\hat{G}_E$  имеют вид (см. [2])

$$\begin{aligned} G_E^1 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|)}{\gamma_{nm}(1 + \delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2, \\ G_E^2 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|)}{\gamma_{nm}(1 + \delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2, \\ G_E^3 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|)}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \end{aligned}$$

В этих выражениях  $\gamma_{nm} = \sqrt{(\pi n/a)^2 + (\pi m/b)^2 - k_0^2}$ , при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы  $\text{Im} \gamma_{nm} \geq 0$ .

Численное решение интегродифференциального уравнения (5) представлено в [7].

## 2. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Будем предполагать, что тело имеет форму параллелепипеда  $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$ . Выберем равномерную прямоугольную сетку в  $Q$ , образованную элементарными параллелепипедами

$$\begin{aligned} \Pi_{klm} &= \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\}, \\ x_{1,k} &= a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n} k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n} m, \end{aligned}$$

где  $k, l, m = 0, \dots, n - 1$ .

Построим двухслойный итерационный процесс для решения обратной задачи по формулам:

$$\xi_n(x) = \left[ \frac{\hat{\varepsilon}_{n+1}(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right]^{-1}, \quad (6)$$

$$\xi_n(x) \mathbf{J}_n(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}(x, y) \mathbf{J}_n(y) dy + \text{grad div} \int_Q \hat{G}(x, y) \mathbf{J}_n(y) dy, \quad x \in Q, \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_n(x) = \xi_n(x) \mathbf{J}_n(x), \quad (8)$$

$$Q^{(-)} = k_0^2 \frac{1}{iab\gamma_1^{(2)}} \int_Q \sin\left(\frac{\pi y_1}{a}\right) e^{-i\gamma_1^{(2)} y_3} \eta_{n+1}(x) \mathbf{E}_n(y) e_2 dy, \quad (9)$$

где

$$\eta_n(x) = \left[ \frac{\varepsilon_n(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right], \quad \xi_n(x) = \eta_n^{-1}(x).$$

По этим формулам вычисление производится следующим образом. Сначала выбираем начальное приближение  $\hat{\varepsilon}_0(y) = \varepsilon_e$  ( $n = 0$ ), где  $\varepsilon_e = \varepsilon_{\text{eff}}$ ,  $\varepsilon_{\text{eff}}$  — эффективная диэлектрическая проницаемость тела, вычисленная как решение обратной краевой задачи с постоянной диэлектрической проницаемостью. Нельзя взять  $\varepsilon_0$  в качестве  $\varepsilon_e$ , так как по формуле (8) нельзя определить электрическое поле. По формуле (6) вычисляется значение функции  $\xi_0(x)$ .

Далее, по формуле (7) определяется ток  $J_n(y)$  как решение интегро-дифференциального уравнения методом коллокации. Затем по формуле (8) по току определяем электрическое поле  $E_n(y)$ . В соответствии с размером сетки ( $N_1 \times N_2 \times N_3$ ), наложенной на фигуры, данную процедуру проводим  $N = N_1 \times N_2 \times N_3$  раз при различных значениях  $k_0 = k^{(1)}$ ,  $k_0 = k^{(2)}$ , ...,  $k_0 = k^{(N)}$ . Таким образом, получаем  $N$  значений полей  $E_n^{(1)}$ ,  $E_n^{(2)}$ , ...,  $E_n^{(N)}$  при различных частотах. На этом заканчивается вычисление на первом “слое”.

На втором “слое” по известным значениям полей  $E_n^{(i)}(y)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , из формулы (9) определяем новое значение  $\eta_{n+1}(x)$ . Для этого потребуется произвести решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), составленной из уравнения (9) относительно неизвестных параметров. При этом “коэффициенты отражений”  $b_i = Q^{(-)}(k_0^{(j)})$  находятся с помощью измерений.

Мы предположили выше, что  $\eta_n(x) = \eta_n^{(j)}$  при  $x \in Q_j$ . Кроме того, пусть подобласти  $Q_j$  состоят из объединения элементарных параллелепипедов сетки  $Q_j = \bigcup_l \Pi_l$ . Будем считать также, что  $E_n^{(j)}(x) = E_n^{(i,l)}$  при  $x \in \Pi_l$ , т.е. поле аппроксимируется некоторой постоянной внутри элементарных параллелепипедов.

Формула (9) приводит к конечномерной СЛАУ. Образуем матрицы  $E = \{e_2 E_n^{(i,l)}\}_{i=1, l=1}^{N, N_0}$  размера  $N \times N_0$  и  $H = \{H_{l,j}\}_{l=1, j=1}^{N_0, N}$  размера  $N_0 \times N$ , где  $H_{l,j} = 0$  при  $l$  таких, что  $\Pi_l \notin Q_j$ . Тогда будем иметь СЛАУ с матрицей  $A_N \in EH$  размера  $N \times N$ :

$$A_N \eta_{n+1} = B, \quad (10)$$

которая решается относительно неизвестных  $\eta_{n+1} = (\eta_{n+1}^{(1)}, \dots, \eta_{n+1}^{(N)})^T$ . Здесь и ниже мы будем отождествлять (кусочно-постоянную) функцию  $\eta_{n+1} = \eta_{n+1}(x)$  и вектор  $(\eta_{n+1}^{(1)}, \dots, \eta_{n+1}^{(N)})^T$ , так как они однозначно определяют друг друга.

Коэффициенты матрицы  $A_N$  и правой части  $B$  в случае изотропного неоднородного тела вычисляются по следующим формулам:

$$a_{i,j} = \sum_{l: \Pi_l \subset Q_j} e_2 E_N^{(i,l)} H_{l,i},$$

$$H_{li} = \int_{\Pi_l} \sin\left(\frac{\pi y_1}{a}\right) e^{-iy_3 \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}} dy_1 dy_2 dy_3, \quad b_i = \frac{iabQ_i^{(-)}}{(k_0^{(i)})^2} \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

Значение интеграла по параллелепипеду  $\Pi_l$  можно вычислить аналитически:

$$H_{li} = \int_{x_{l0}-h_1/2}^{x_{l0}+h_1/2} \int_{y_{l0}-h_2/2}^{y_{l0}+h_2/2} \int_{z_{l0}-h_3/2}^{z_{l0}+h_3/2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-iz \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}} dx dy dz =$$

$$= \frac{iah_2}{\pi \sqrt{(k_0^{(j)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}} \left( e^{-i\left(z_{l0} + \frac{h_3}{2}\right) \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}} - e^{-i\left(z_{l0} - \frac{h_3}{2}\right) \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}} \right) \left( \cos\left(\frac{\pi}{a}\left(x_{l0} - \frac{h_1}{2}\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{a}\left(x_{l0} + \frac{h_1}{2}\right)\right) \right).$$

Далее проверяется выполнение неравенств  $|\eta_{n+1}^{(i)} - \eta_n^{(i)}| < \delta$ ,  $i = 1, \dots, n$ , с заданной точностью  $\delta$  ( $\delta > 0$ ). Если требуемая точность достигнута для каждого  $\eta_{n+1}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , то вычисления прекращаются. Если требуемая точность не достигнута, то  $\xi_n(x) = \eta_{n+1}^{-1}(x)$ ,  $n = n + 1$  и вычисления повторяются с формулы (7).

В качестве искомого выбирается значение для относительной диэлектрической проницаемости

$$\frac{\varepsilon_n(x)}{\varepsilon_0} = \eta_n(x) + 1.$$

Ключевым моментом в данном двухслойном итерационном процессе является возможность определения  $\varepsilon_{n+1}(x)$  по известному полю  $E_n(x)$  из формулы (8). Если искомая функция  $\varepsilon_n(x)$  имеет  $N$  неизвестных параметров, то необходимо иметь по крайней мере результаты  $N$  различных измерений.

Размер матрицы  $A_N$  сравнительно невелик (не более нескольких тысяч). При решении системы (12) можно воспользоваться итерационным методом решения СЛАУ, например, методом сопряженных градиентов.

### 3. ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ И О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

Для обоснования применения двухслойного процесса определения функции  $\varepsilon(x)$  при сделанных предположениях необходимо доказать однозначную разрешимость СЛАУ и сходимость итерационного метода.

Переформулируем итерационный метод и представим его в виде принципа сжимающих отображений для того, чтобы можно было воспользоваться известными результатами из [8].

Запишем итерационный метод в операторной форме:

$$(\xi_n I + S^{(i)}) \mathbf{J}_n^{(i)} = \mathbf{E}^{(0,i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (11)$$

$$\mathbf{E}_n^{(i)} = \xi_n \mathbf{J}_n^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$A_N \eta_{n+1} = B, \quad (12)$$

$$\xi_{n+1} = \eta_{n+1}^{-1}.$$

Здесь  $I$  – единичный оператор,

$$S\mathbf{J} = k_0^2 \int_Q \widehat{G}(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \widehat{G}(x, y) \mathbf{J}(y) dy$$

– линейный ограниченный оператор  $S : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  (см. [6], [9], [10]);  $S = S^{(i)}$  для  $k_0 = k_0^{(i)}$ . Уравнения (11), (12) рассматриваются в пространстве  $L_2(Q)$ .

Объединив эти уравнения, получим

$$\mathbf{E}_n^{(i)} = \xi_n (\xi_n I + S^{(i)})^{-1} \mathbf{E}^{(0,i)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\eta_{n+1} = A_N^{-1} B,$$

предполагая, что существует  $A_N^{-1} = A_N^{-1}(\eta_n)$ . Тогда

$$\eta_{n+1} = A_N^{-1} \left( (I + \eta_n S)^{-1} \mathbf{E}^0 \right) B$$

или

$$\eta_{n+1} = F(\eta_n)B, \quad (13)$$

где функция

$$F(\eta_n) \equiv A_N^{-1} \left( (I + \eta_n S)^{-1} \mathbf{E}^0 \right) \quad (14)$$

зависит от  $\eta_n$ . Функцию (14) можно рассматривать как матрицу-функцию  $N$  переменных  $\eta_n^{(1)}, \dots, \eta_n^{(N)}$ . Пусть  $\eta_n = (\eta_n^{(1)}, \dots, \eta_n^{(N)})^T$  – вектор из пространства  $R_\infty^N$  с нормой  $\|\bullet\|_\infty$ .

Пусть существует  $F(\eta_e)$  для некоторого  $\eta_e$ . В частности, это означает, что оператор  $(I + \eta_e S)^{-1}$  существует для данного  $\eta_e$  (условия существования имеются в теореме 2 из [11]). Будем предполагать, что

$$\eta_e = F(\eta_e)B_e. \quad (15)$$

Тогда, в силу непрерывности функции  $(I + \eta S)^{-1} \mathbf{E}^0$  по  $\eta$ , в некоторой окрестности точки  $\eta_e$  существует функция  $F(\eta) \equiv A_N^{-1}((I + \eta S)^{-1} \mathbf{E}^0)$ . Выберем в этой окрестности замкнутый шар  $B_r(\eta_e) := \{\eta : \|\eta - \eta_e\| \leq r\}$  (уменьшая  $r$ , если необходимо). Рассмотрим оценки

$$\begin{aligned} \|F(\eta)B - \eta_e\| &= \|F(\eta)B - F(\eta_e)B_e\| = \|(F(\eta) - F(\eta_e))B + F(\eta_e)(B - B_e)\| \leq \\ &\leq \|F(\eta) - F(\eta_e)\| \|B\|_\infty + \|F(\eta_e)\| \|B - B_e\|_\infty. \end{aligned}$$

Отображение (13) действует из шара в шар  $F(\bullet)B : B_r(\eta_e) \rightarrow B_r(\eta_e)$  при условии, что

$$\max_{\eta \in B_r(\eta_e)} \|F(\eta) - F(\eta_e)\| \|B\|_\infty + \|F(\eta_e)\| \|B - B_e\|_\infty \leq r. \quad (16)$$

Очевидно, что максимум в первом слагаемом в (16) существует и достигается на некотором элементе из шара, так как пространство  $R_\infty^N$  конечномерно, а шар замкнут. Оценка (16) будет выполняться при достаточно малом значении  $\max_{\eta \in B_r(\eta_e)} \|F(\eta) - F(\eta_e)\|$  (чего можно добиться уменьшением  $r$ ) и достаточно малом  $\|B - B_e\|_\infty$ .

Нетрудно видеть, что функция  $F(\eta) \equiv A_N^{-1}((I + \eta S)^{-1} \mathbf{E}^0)$  будет также сильно дифференцируема (по Фреше) как суперпозиция сильно дифференцируемых функций, поэтому справедлива оценка (см. [8], [12])

$$\|F(\eta) - F(\tau)\| \leq M \|\eta - \tau\|_\infty \quad (17)$$

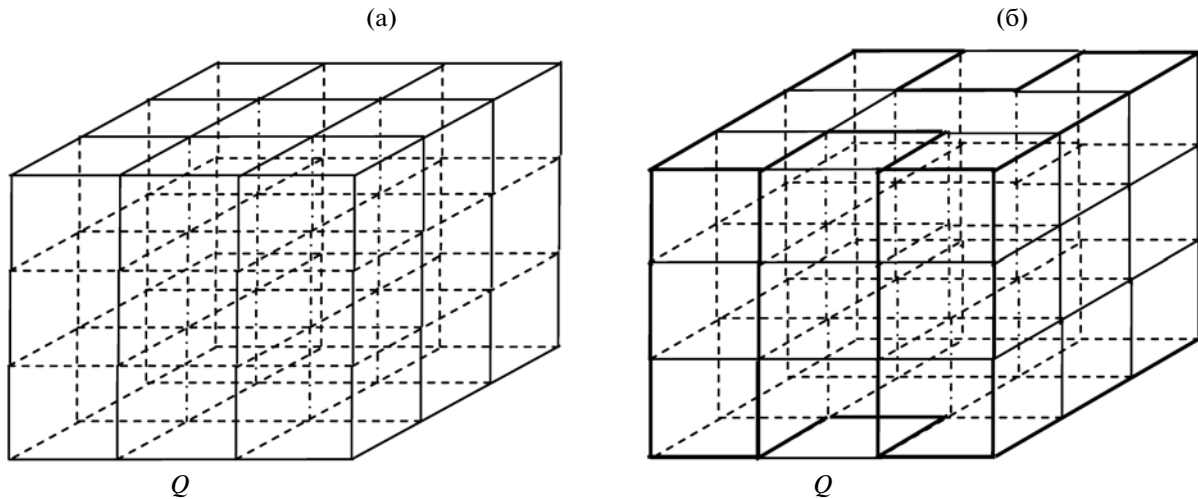
для некоторого  $M(>0)$  при  $\eta, \tau \in B_r(\eta_e)$ . Тогда отображение  $F(\bullet)B : B_r(\eta_e) \rightarrow B_r(\eta_e)$  будет сжимающим, если дополнительно выполнено условие

$$\|B\|_\infty < M^{-1}. \quad (18)$$

Итак, доказано, что при перечисленных выше условиях отображение будет сжимающим, поэтому (см. [13]) верна

**Теорема 1.** Пусть существует  $F(\eta_e)$  для некоторого  $\eta_e$  и верно условие (15). Тогда найдется такое  $M > 0$  и  $r > 0$ , что при выполнении условий (17) и (18) отображение  $F(\bullet)B : B_r(\eta_e) \rightarrow B_r(\eta_e)$  является сжимающим, итерационный процесс (13) сходится к точному (единственному) решению  $\eta \in B_r(\eta_e)$  уравнения

$$\eta = F(\eta)B$$



Фиг. 2. Тело  $Q$ , “выделенное” из тела канонической формы  $\Pi$ .

со скоростью геометрической прогрессии с показателем  $q := \|B\|_\infty$   $M(<1)$  при любом начальном приближении  $\eta_0 \in B_r(\eta_e)$  и имеет место оценка скорости сходимости итерационного метода (13)

$$\|\eta_n - \eta\| = \frac{q^n}{1-q} \|F(\eta_e)B - \eta_e\|,$$

где  $\eta_e$  – начальное приближение,  $\eta_n \in B_r(\eta_e)$  – приближенное решение, а  $\eta \in B_r(\eta_e)$  – точное решение уравнения (13).

Эта теорема теоретически обосновывает двухслойный итерационный метод определения функции  $\varepsilon(x)$ . Наиболее сложным является обеспечение условия (15). Оно означает, что должно быть известно решение обратной задачи с “близкими” параметрами. В качестве такой задачи можно выбрать, например, задачу определения эффективной диэлектрической проницаемости, когда  $\eta^{(1)} = \dots = \eta^{(N)} = \eta_e$ . Эта задача подробно исследована в [6], [10] (где также указаны условия существования ее решения).

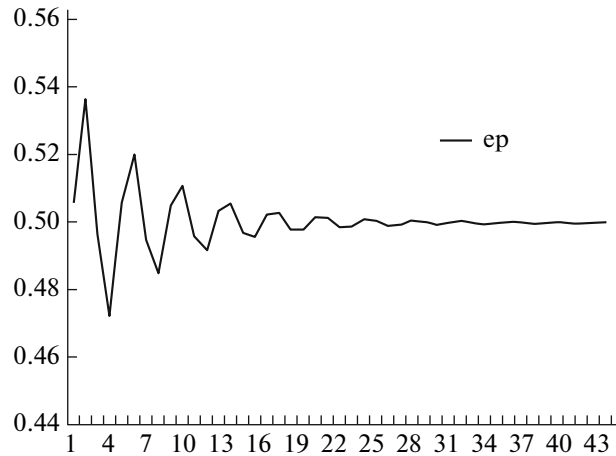
Кроме того, эта теорема дает достаточные условия существования единственного решения обратной краевой задачи.

Теорема 1 дает обоснование предложенного итерационного метода.

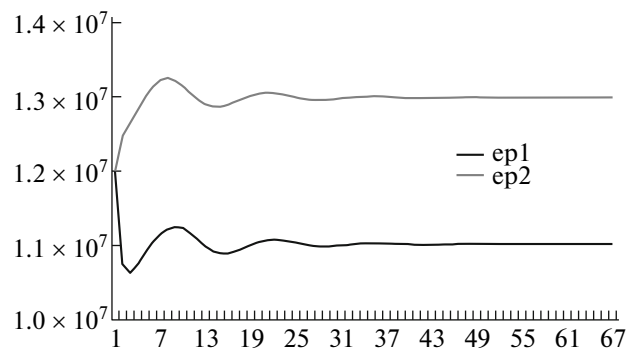
#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ФИГУРЫ НА ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРИ ПОМОЩИ СУБИЕРАРХИЧЕСКОГО МЕТОДА

Пусть  $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$  – заполненная секция волновода (фиг. 1) ( $a_1 = 0, a_2 = a, b_1 = 0, b_2 = b, c_1 = 0, c_2 = c$ ) (см. [7]). Алгоритм расчета диэлектрической проницаемости внутри полной секции волновода описан выше. Рассмотрим алгоритм расчета диэлектрической проницаемости в прямоугольном волноводе для тела сложной геометрической формы (фиг. 2). Будем предполагать, что решение задачи для заполненной секции получено и в нашем распоряжении находится матрица, составленная методом коллокации. Для решения задачи дифракции на теле сложной формы необходимо, чтобы тело целиком вмещалось в используемую нами секцию прямоугольного волновода и состояло из элементов сетки (см. [7], [14]). Субиерархический метод позволяет составить матрицу для определения электромагнитных полей внутри тела сложной конфигурации, используя матрицу, составленную для полной секции волновода. В построенной фигуре введем новую нумерацию элементарных параллелепипедов. Произведем

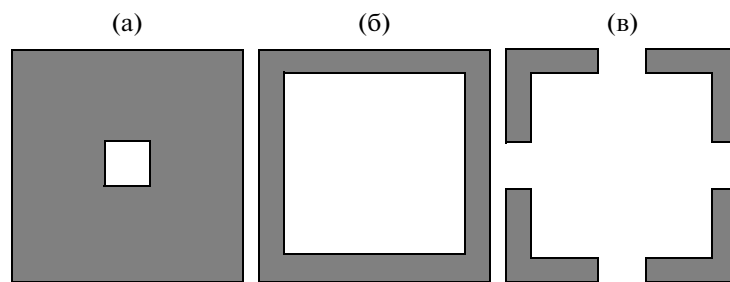




Фиг. 3.

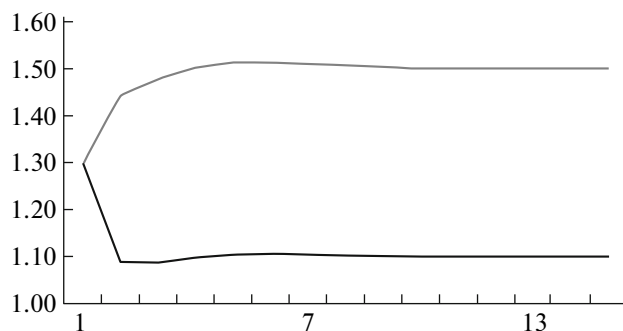


Фиг. 4.



Фиг. 5.

перебор всех элементарных параллелепипедов, принадлежащих фигуре сложной конфигурации, получаем новую сетку. Эту сетку будем использовать для расчета поля на теле сложной формы. Решая систему линейных алгебраических уравнений для матрицы, составленной с использованием новой сетки, находим значения диэлектрической проницаемости фигуры сложной формы. Скорость построения новой матрицы будет напрямую зависеть от размера фигуры и размера сетки. Субиерархический подход позволил избежать длительных расчетов, связанных с вычислением матричных элементов. Особенно хорошо данный метод проявляет себя при расчете серии задач на телах различной конфигурации.



Фиг. 6.

## 5. ЧИСЛОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть тело  $Q$  имеет вид полной секции волновода. Размеры секции следующие:  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$ . Секция волновода является однородной, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда. Диэлектрическая проницаемость секции равна  $\varepsilon_1 = 0.5$ . Расчет производился при волновых числах  $k_1 = 1.6$  и  $k_2 = 1.7$ . Сходимость итерационного процесса определения диэлектрической проницаемости представлена на фиг. 3.

Пусть тело  $Q$  имеет вид полной секции волновода. Размеры секции следующие:  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$ . Секция волновода является неоднородной и состоит из двух частей, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда. Длины частей секции соответственно равны  $l_1 = 2c/5$  и  $l_2 = 3c/5$ , а их диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_1 = 1.1$  и  $\varepsilon_2 = 1.3$ . Расчет производился при волновых числах  $k_1 = 1.6$  и  $k_2 = 1.7$ . Сходимость итерационного процесса определения диэлектрической проницаемости представлена на фиг. 4.

Форма фигуры сложной геометрической формы, построенная на расчетной сетке размером  $10 \times 10 \times 10$ , представлена на фиг. 5 по слоям, перпендикулярным оси  $OZ$ : а — слои 1,9; б — слои 2–4 и 6–8, в — слои 4, 5.

На фиг. 6 представлена сходимость итерационного процесса определения диэлектрической проницаемости неоднородного материала для фигуры сложной геометрической формы, показанной на фиг. 5.

Для решения рассмотренных задач использовался суперкомпьютерный комплекс Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998.
2. Васюнин Д.И., Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г. Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала // Изв. высш. учебн. заведений. Поволжский регион. Физ.-матем. науки. 2009. № 3. С. 71–87.
3. Смирнов Ю.Г., Медведик М.Ю., Гришина Е.Е. Итерационный метод определения диэлектрической проницаемости неоднородного образца материала // Изв. высш. учебн. заведений. Поволжский регион. Физ.-матем. науки. 2011. № 3. С. 3–13.
4. Smirnov Yu.G., Shestopalov Yu.V. Existence and uniqueness of a solution to the inverse problem of the complex permittivity reconstruction of a dielectric body in a waveguide // Inverse Problems. 2010. V. 26. № 105002. P. 1–14.
5. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: Радиотехника, 1996.
6. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
7. Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г. Субиерархический метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе // Радиотехн. и электроника. 2011. Т. 56. № 8. С. 940–945.

8. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
9. *Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г.* Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом // Изв. высш. учебн. заведений. Поволжский регион. Физ.-матем. науки. 2008. № 2. С. 2–14.
10. *Михлин С.Г.* Сингулярные интегральные уравнения // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. № 3. С. 29–112.
11. *Смирнов Ю.Г.* Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов // Изв. высш. учебн. заведений. Поволжский регион. Физ.-матем. науки. 2008. № 3. С. 39–54.
12. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
13. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов. Казань: Казан. гос. ун-т, 2009.
14. *Медведик М.Ю.* Применение субиерархического метода в задачах электродинамики // Вычисл. методы и программирование. 2012. Т. 13. С. 87–97.